Θεωρία Αριθμών III

Συστήματα Αρίθμησης

Βαγγέλης Ψύχας

Συστήματα Αρίθμησης

✧ **Κάθε ακέραιος αριθμός, μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια δυνάμεων του 10.**

✧ Δεκαδική αναπαράσταση.

✧ **π.χ ο αριθμός 3952 "αποτελείται" από:**

τρεις χιλιάδες
εννέα εκατοντάδες
πέντε δεκάδες
δύο μονάδες

...οπότε γράφεται...

✧ $3952 = 3 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 2 =$

$= 3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

Δεκαδική Αναπαράσταση

✧ Κάθε ακέραιος αριθμός $m = \overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ γράφεται:
$a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_k \cdot 10^0$.

✧ Αν (π.χ) μας δοθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{xyz}}$,
τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1) Ο αριθμός x είναι μονοψήφιος θετικός ακέραιος.
2) Οι αριθμοί y, z είναι μη αρνητικοί μονοψήφιοι ακέραιοι.
3) Ο x εκφράζει το ψηφίο των εκατοντάδων,
ο y εκφράζει το ψηφίο των δεκάδων
και ο z εκφράζει το ψηφίο των μονάδων.
4) $\mathrm{A} = \mathrm{x} \cdot 10^2 + \mathrm{y} \cdot 10^1 + \mathrm{z} \cdot 10^0$.

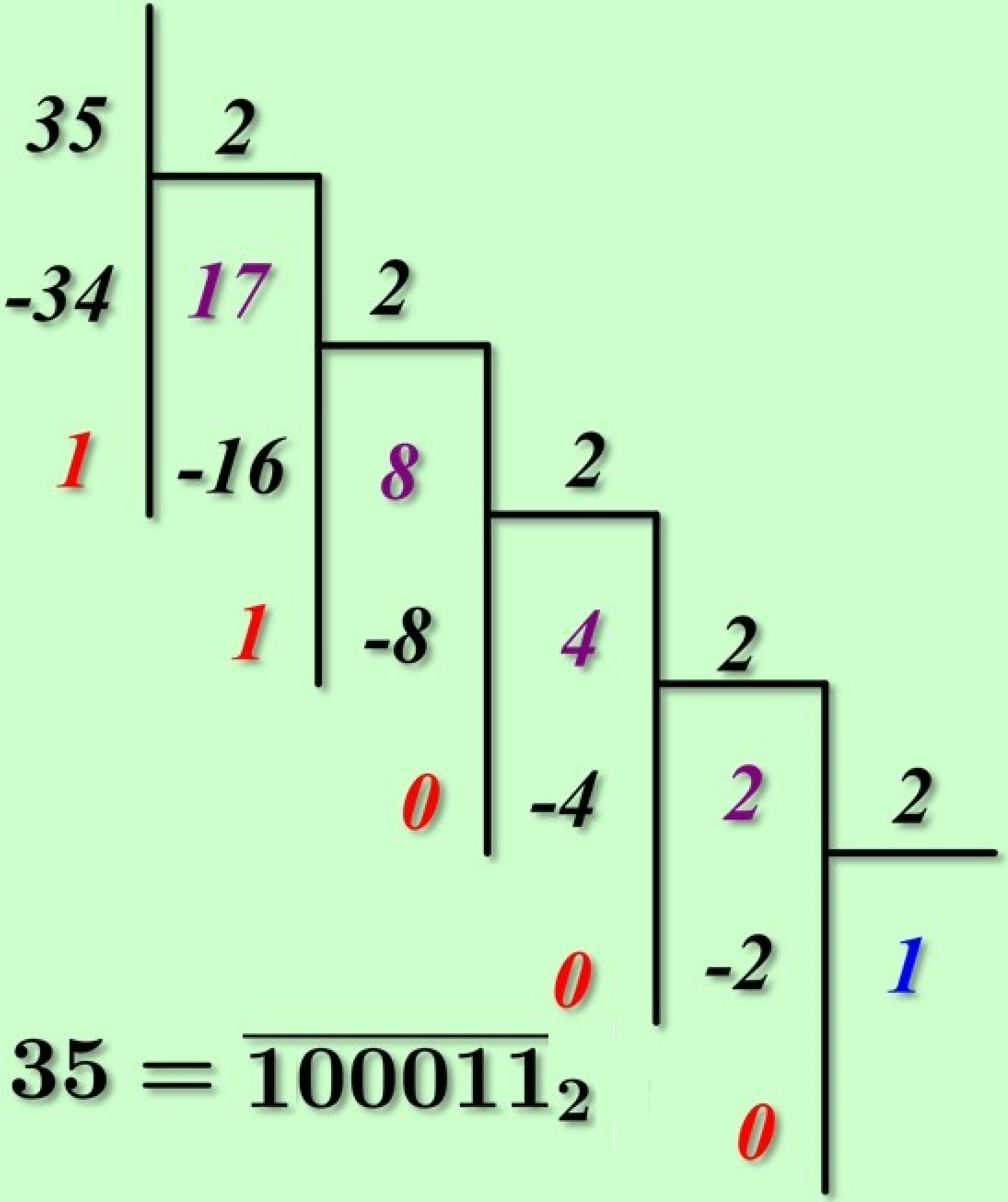
Δυαδική Αναπαράσταση

✧ Κάθε ακέραιος αριθμός, μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια δυνάμεων και άλλων θετικών ακεραίων (εκτός του 10).

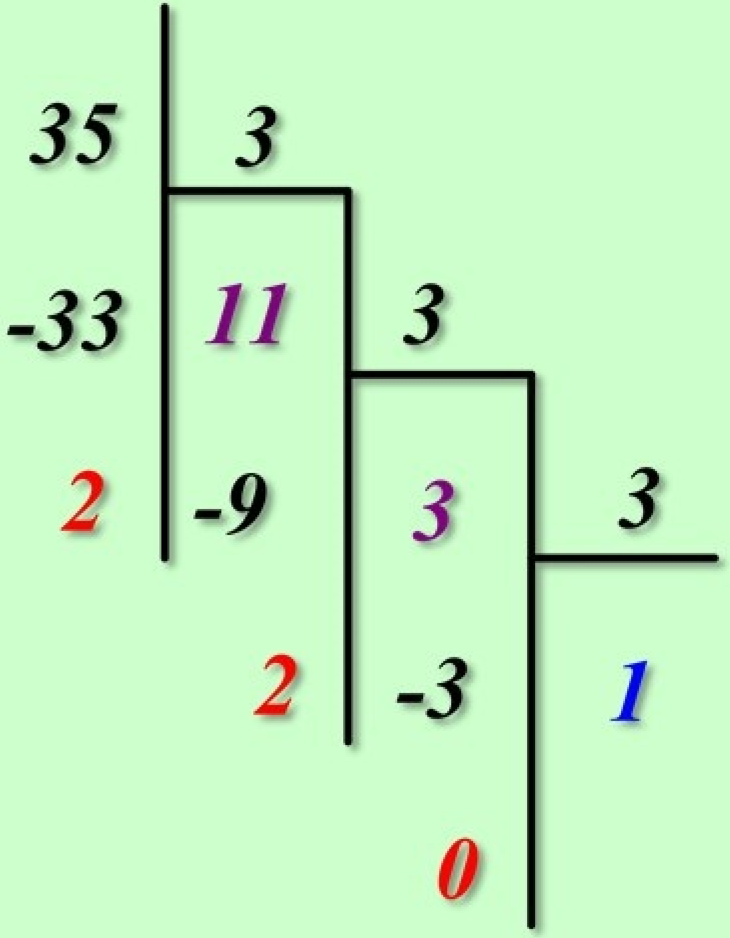
✧ Ο αριθμός 35 γράφεται με τη βοήθεια δυνάμεων του 2, ως εξής:

$$35 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

✧ Συμβολικά ο αριθμός 35 γράφεται $\overline{100011}_{(2)}$ (στο δυαδικό σύστημα).



$$35 = \overline{100011}_2$$



$$35 = \overline{1022}_3$$

✧ Αν το τελευταίο ψηφίο του ακέραιου αριθμού m είναι x τότε ο m θα γράφεται στη μορφή:

$$m = 10 \cdot k + x, k \in \mathbb{Z}.$$

✧ Αν το τελευταίο **διψήφιο τμήμα** του ακέραιου αριθμού m είναι $\overline{xy}$ τότε ο m θα γράφεται στη μορφή:

$$m = 100 \cdot k + \overline{xy}, k \in \mathbb{Z}.$$

✧ Αν το τελευταίο **τριψήφιο τμήμα** του ακέραιου αριθμού m είναι $\overline{xyz}$ τότε ο m θα γράφεται στη μορφή:

$$m = 1000 \cdot k + \overline{xyz}, k \in \mathbb{Z}.$$

✧ Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους 15. Αποδείξτε ότι το άθροισμά τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

✧ Κάθε θετικός ακέραιος που τελειώνει σε 15,
είναι της μορφής: $100k + 15$,
(όπου k μη αρνητικός ακέραιος).
Άρα το άθροισμα των 15 ακεραίων θα είναι:

$$S = (100k_1 + 15) + (100k_2 + 15) + \cdots + (100k_{15} + 15) =$$
$$= 100(k_1 + k_2 + \cdots + k_{15}) + 15 \cdot 15 =$$
$$= 25 \cdot 4(k_1 + k_2 + \cdots + k_{15}) + 25 \cdot 9 =$$
$$= 25 \cdot (4 \cdot (k_1 + k_2 + \cdots + k_{15}) + 9).$$

✧ m θετικοί ακέραιοι αριθμοί, έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους 15. Αν το m είναι πολλαπλάσιο του 5 ($m = 5n$), αποδείξτε ότι το άθροισμά τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

✧ Κάθε θετικός ακέραιος που τελειώνει σε 15,
είναι της μορφής: $100k + 15$,
(όπου k μη αρνητικός ακέραιος).
Άρα το άθροισμα των m ακεραίων θα είναι:

$$S = (100k_1 + 15) + (100k_2 + 15) + \cdots + (100k_m + 15) =$$
$$= 100(k_1 + k_2 + \cdots + k_m) + m \cdot 15 =$$
$$= 25 \cdot 4 \cdot (k_1 + k_2 + \cdots + k_m) + 5n \cdot 15 =$$
$$= 25 \cdot 4 \cdot (k_1 + k_2 + \cdots + k_m) + 25 \cdot 3n.$$

✧ Εννέα θετικοί ακέραιοι αριθμοί, έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, και 19 αντίστοιχα. Να βρεθεί το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αθροίσματος των τετραγώνων τους.

✧ Κάθε θετικός ακέραιος που τελειώνει σε 11, είναι της μορφής: $100k + 11$, (όπου k μη αρνητικός ακέραιος).

Άρα το τετράγωνό του θα είναι:

$$(100k + 11)^2 = 100^2k^2 + 2 \cdot 100 \cdot 11k + 11^2 =$$
$$= 100\left(100k^2 + 22k\right) + 121 =$$
$$= 100\left(100k^2 + 22k + 1\right) + 21.$$

✧ Δηλαδή το τελευταίο διψήφιο τμήμα του ακεραίου $(100k + 11)^2$, ταυτίζεται με το τελευταίο τμήμα του ακέραιου $11^2 = 121$.
Όμοια το τελευταίο διψήφιο τμήμα του ακεραίου $(100k + 12)^2$, ταυτίζεται με το τελευταίο τμήμα του ακέραιου $12^2 = 144$.
Ισχύει όμως:

$$11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2 + 19^2 =$$
$$= 121 + 144 + 169 + 196 + 225 + 256 + 289 + 324 + 361 =$$
$$= 2085.$$

Άρα τελευταίο διψήφιο τμήμα του αθροίσματος των τετραγώνων είναι 85.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν θεωρήσουμε το άθροισμα:

$$21 + 44 + 69 + 96 + 25 + 56 + 89 + 24 + 61 = 485.$$

✧ Αποδείξτε ότι κάθε ακέραιος που όλα του τα ψηφία είναι μονάδες δεν μπορεί να είναι το τετράγωνο οποιουδήποτε ακέραιου.

✧ Θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση:
"Το τετράγωνο οποιουδήποτε ακέραιου αριθμού είναι ακέραιος της μορφής $4k$ ή $4k+1$".

✧ Κάθε ακέραιος m (που όλα του τα ψηφία είναι μονάδες) γράφεται: $m = 111\cdots111 = 111\cdots108 + 3 = 4k + 3$.
Άρα ο ακέραιος m δεν μπορεί να είναι το τετράγωνο ακέραιου αριθμού.