Θεωρία Αριθμών Ι

Άρτιοι - Περιττοί

Βαγγέλης Ψύχας

Mathematics is the queen of the sciences and number-theory the queen of mathematics.

Carl Friedrich Gauss.

Euclid's Elements constitutes one of the great success stories of world literature. Scarcely any other book save the Bible has been more widely circulated or studied.

Euclid's *Elements* constitutes one of the great success stories of world literature. Scarcely any other book save the Bible has been more widely circulated or studied. Over a thousand editions of it have appeared since the first printed version in 1482, and before its printing, manuscript copies dominated much of the teaching of mathematics in Western Europe. Unfortunately, no copy of the work has been found that actually dates from Euclid's own time; the modern editions are descendants of a revision prepared by Theon of Alexandria, a commentator of the 4th century A.D.

Κυριότερα Αριθμοσύνολα Ι

- Το σύνολο των **Φυσικών** Αριθμών

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

- Το σύνολο των **Ακεραίων** Αριθμών

$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\}$, $\mathbb{Z}^* = \{\pm1, \pm2, \pm3, \dots\}$

Κυριότερα Αριθμοσύνολα ΙΙ

✧ Το σύνολο των **Ρητών** Αριθμών

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\right\}, \qquad \mathbb{Q}^* = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$$

✧ Ρητοί είναι οι αριθμοί που είναι γραμμένοι ή μπορούν να γραφούν σαν κλάσματα.

✧ Οι ακέραιοι αριθμοί, μπορούν να θεωρηθούν ως ρητοί με παρονομαστή τη μονάδα.

Κυριότερα Αριθμοσύνολα ΙΙΙ

✧ Το σύνολο των Άρρητων Αριθμών

✧ Άρρητοι είναι οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν σαν κλάσματα.

- π.χ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, … (οι τετραγωνικές ρίζες αριθμών που δεν είναι τέλεια τετράγωνα).
- Το 350 π.Χ, ο Εύδοξος ο Κνίδιος , απέδειξε ότι ο $\sqrt{2}$, είναι άρρητος.

Κυριότερα Αριθμοσύνολα IV

✧ Υπερβατικοί Αριθμοί

✧ π.χ π=3,14159…,

e=2,71…=

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

✧ π.χ $2^{\sqrt{3}}$, $3^{\sqrt{5}}$, …

$$\lim_{\nu \to +\infty} \rho_\nu = \sqrt{3} \Rightarrow 2^{\sqrt{3}} = 2^{\lim_{\nu \to +\infty} \rho_\nu}$$

Κυριότερα Αριθμοσύνολα V

- **Πραγματικοί Αριθμοί:** $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

- **Μιγαδικοί Αριθμοί**
- $\mathbb{C} = \left\{\alpha + \beta i : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \& \ i^2 = -1\right\}$
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$

Άρτιοι-Περιττοί

✧ Τους ακέραιους αριθμούς τους συμβολίζουμε (συνήθως) με τα γράμματα $\kappa, \lambda, \mu, \nu$, ... ή k, l, m, n, ... και τους χωρίζουμε σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τους άρτιους (ζυγούς) και τους περιττούς (μονούς).

✧ Κάθε ακέραιος αριθμός, θα είναι ή άρτιος ή περιττός.

✧ Ο **επόμενος** του ακεραίου αριθμού $\boldsymbol{k}$, είναι ο $\boldsymbol{k+1}$ και **προηγούμενος** ο $\boldsymbol{k-1}$.

✧ Αν υπάρχει ακέραιος αριθμός $\boldsymbol{k}$ ώστε να ισχύει η ισότητα $\mathbf{n} = \boldsymbol{3k+1}$, τότε λέμε ότι ο ακέραιος $\boldsymbol{n}$ <u>είναι της μορφής</u> $\boldsymbol{3k+1}$.

✧ Γενικότερα, αν υπάρχει ακέραιος αριθμός $\boldsymbol{k}$ ώστε να ισχύει η ισότητα $\mathbf{n} = \boldsymbol{m \cdot k + l}$, τότε λέμε ότι ο ακέραιος $\boldsymbol{n}$ <u>είναι της μορφής</u> $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{k+l}$, $(\boldsymbol{k, l} \in \mathbb{Z})$.

♢ Το γινόμενο οποιονδήποτε ακεραίων της μορφής $4k+1, \quad k \in \mathbb{Z}$ είναι επίσης ακέραιος της ίδιας μορφής

♢ Έστω m, n ακέραιοι της παραπάνω μορφής.

Τότε $m = 4k+1$ και $n = 4l+1$.

Άρα $m \cdot n = (4k+1)(4l+1) =$

$$= 16kl + 4k + 4l + 1 = 4\underbrace{(4kl + k + l)}_{r} + 1 = 4r + 1.$$

Άρτιοι-Περιττοί I

✧ Ένας ακέραιος αριθμός είναι **άρτιος** αν και μόνο αν είναι της μορφής $2k$ (όπου k τυχόν ακέραιος).

✧ Ένας ακέραιος αριθμός είναι **περιττός** αν και μόνο αν είναι της μορφής $2k+1$ (όπου k τυχόν ακέραιος).

✧ Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών είναι **άπειρο**.

Άρτιοι-Περιττοί ΙΙ

- Το άθροισμα και το γινόμενο δύο άρτιων ακέραιων αριθμών είναι άρτιος ακέραιος αριθμός.

- Έστω $m = 2k$ και $n = 2l$ δύο άρτιοι ακέραιοι αριθμοί.

Τότε:

$m + n = 2k + 2l = 2(k + l) = 2\rho$ (άρτιος) και

$m \cdot n = (2k) \cdot (2l) = 2(2kl) = 2\tau$ (άρτιος).

Άρτιοι-Περιττοί III

♢ Το άθροισμα δύο περιττών ακέραιων αριθμών είναι άρτιος ακέραιος αριθμός και το γινόμενό τους είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

♢ Έστω $m = 2k + 1$ και $n = 2l + 1$ δύο περιττοί ακέραιοι αριθμοί. Τότε:

$$m + n = (2k + 1) + (2l + 1) = 2(k + l + 1) = 2\rho \text{ (άρτιος)}$$

και

$$m \cdot n = (2k + 1) \cdot (2l + 1) = 2k \cdot 2l + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1 = 2\tau + 1 \text{ (περιττός)}.$$

✧ Το γινόμενο ενός άρτιου και ενός οποιουδήποτε ακέραιου αριθμού είναι άρτιος αριθμός.

✧ Έστω $\boldsymbol{k}$ άρτιος και $\boldsymbol{m}$ ένας οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός.
Τότε: $\boldsymbol{k \cdot m = 2n \cdot m = 2(n \cdot m) = 2l}$ (άρτιος).

✧ Το γινόμενο δύο **διαδοχικών** ακεραίων αριθμών είναι άρτιος ακέραιος.

✧ Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι ένα γινόμενο ακεραίων της μορφής $k(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Αν ο αριθμός k είναι άρτιος, τότε:

$$k(k+1) = 2m(2m+1) = 2\left(2m^2 + m\right) = 2n \text{ (άρτιος).}$$

Αν ο αριθμός k είναι περιττός, τότε:

$$k(k+1) = (2m+1)(2m+2) = 2\left(2m^2 + 3m + 1\right) = 2n$$

(άρτιος).

Κάθε ακέραιος αριθμός είναι ή άρτιος ή περιττός.

✧ Το τετράγωνο οποιουδήποτε ακέραιου αριθμού είναι της μορφής $4k$ ή $4k+1$, $k \in \mathbb{Z}$.

✧ Έστω m τυχόν ακέραιος.

Αν m άρτιος, τότε $m = 2n \Rightarrow m^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 4k$.

Αν m περιττός, τότε $m = 2n + 1 \Rightarrow m^2 = (2n+1)^2 =$
$= 4n^2 + 4n + 1 = 4\left(n^2 + n\right) + 1 = 4k + 1$.

✧ Το τετράγωνο οποιουδήποτε περιττού ακέραιου αριθμού είναι της μορφής $\mathbf{8}k+\mathbf{1}$, $\quad m \in \mathbb{Z}$.

✧ Έστω m τυχόν περιττός ακέραιος.

Τότε $\mathrm{m} = 2\mathrm{n}+1 \Rightarrow m^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 =$

$= 4\,\underbrace{n(n+1)}_{2k} + 1 = 4(2k)+1 = 8k+1.$

Το γινόμενο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός.