Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

Λύση

Τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186,\ \alpha \in \mathbb{R}$ με τον άξονα των x είναι της μορφής $\mathrm{A}_1(x_1, 0)$ και $\mathrm{A}_2(x_2, 0)$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - (3\alpha - 5)x + 186 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Άρα έχουμε:

$$x_1 + x_2 = 3a - 5, \qquad (1)$$

$$x_1 x_2 = 186 \qquad (2).$$

Επειδή πρέπει οι ρίζες x_1 και x_2 να είναι ακέραιοι αριθμοί, σύμφωνα με την υπόθεση διαφορετικοί μεταξύ τους, έστω $|x_1| < |x_2|$, από την εξίσωση (2), έχουμε ότι οι x_1, x_2 πρέπει να είναι ομόσημοι ακέραιοι με γινόμενο $186 = 2 \cdot 3 \cdot 31$. Άρα έχουμε τα εξής δυνατά ζεύγη:

$$(x_1, x_2) \in \{(1,186), (2,93), (3,62), (6,31), (-1,-186), (-2,-93), (-3,-62), (-6,-31)\}$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι: $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2 + 5}{3}$, οπότε οι δυνατές τιμές για την παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι οι εξής: $64, \dfrac{100}{3}, \dfrac{70}{3}, 14, -\dfrac{182}{3}, -30, -20, -\dfrac{32}{3}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\begin{Bmatrix} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{Bmatrix}$$

Λύση (1ος τρόπος)

Προσθέτοντας και αφαιρώντας το x^2y^2 η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - x^2y^2 = \left(x^2 + y^2 + xy\right)\left(x^2 + y^2 - xy\right)$$

Επομένως, έχουμε $x^2 + y^2 - xy = \dfrac{91}{13} = 7$. Προσθέτοντας τώρα αυτή και τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, βρίσκουμε ότι: $2\left(x^2 + y^2\right) = 20 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10$, οπότε

$xy=3$ από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Έτσι καταλήγουμε στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=10 \\ 2xy=6 \end{array}\right\},$$

από το οποίο με πρόσθεση και αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη, λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2+2xy=16 \\ x^2+y^2+2xy=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (x+y)^2=16 \\ (x-y)^2=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y=\pm 4 \\ x-y=\pm 2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y=4 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+y=-4 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+y=4 \\ x-y=-2 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+y=-4 \\ x-y=-2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)=(3,1) \text{ ή } (x,y)=(-1,-3) \text{ ή } (x,y)=(1,\,3) \text{ ή } (x,y)=(-3,-1).$$

2[ος] τρόπος

Έχουμε

$$\left\{\begin{array}{l} x^4+x^2y^2+y^4=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(x^2+y^2\right)^2-(xy)^2=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{array}\right\},$$

οπότε, αν θέσουμε $\varphi=x^2+y^2$ και $\omega=xy$, λαμβάνουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi^2-\omega^2=91 \\ \varphi+\omega=13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (\varphi+\omega)(\varphi-\omega)=91 \\ \varphi+\omega=13 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi-\omega=7 \\ \varphi+\omega=13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi=10 \\ \omega=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{array}\right\}.$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε, όπως στον πρώτο τρόπο.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Η διχοτόμος $B\Delta$ τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$, στο σημείο Z. Έστω E τυχόν σημείο του τμήματος $\Delta\Gamma$. Η ευθεία BE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο H. Οι ευθείες $A\Gamma$ και ZH τέμνονται στο σημείο Θ. Επίσης, η ευθεία ZE τέμνει τον κύκλο στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $B\Delta H\Theta$, $B\Delta EK$ και $\Delta Z\Theta K$ είναι εγγράψιμα.

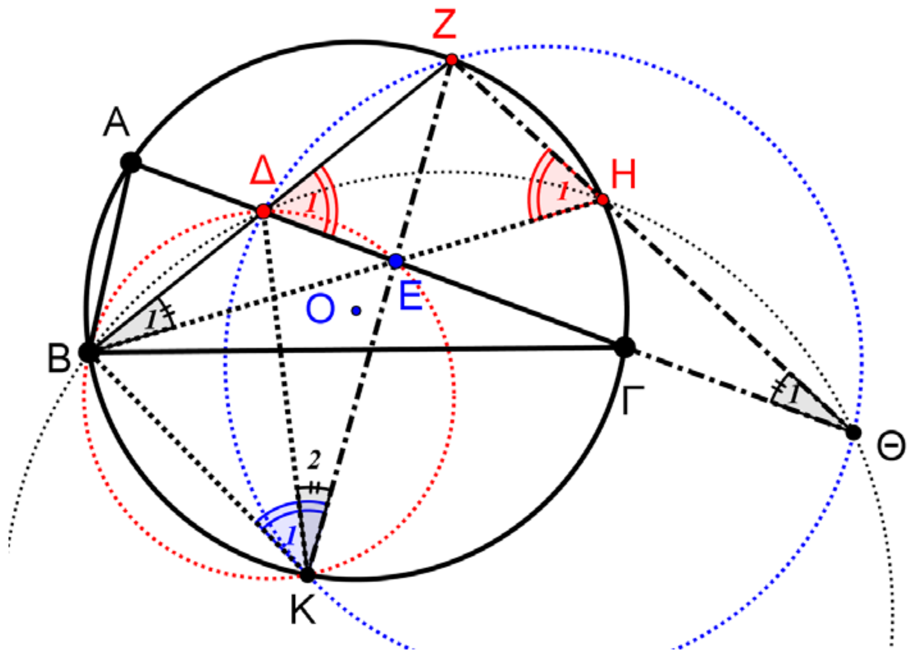
Λύση

Η γωνία $\hat{H}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $C(O,R)$ και βαίνει στο τόξο BZ. Άρα:

$$\hat{H}_1=\hat{\Gamma}+\frac{\hat{B}}{2}.$$

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $A\Delta Z$. Άρα:

$$\hat{\Delta}_1=\Delta\hat{A}Z+A\hat{Z}B=\frac{\hat{B}}{2}+\hat{\Gamma}.$$



Σχήμα 6

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$, προκύπτει η ισότητα των παραπληρωματικών τους γωνιών και από εκεί ότι **το τετράπλευρο** $B\Delta H\Theta$ **είναι εγγράψιμο.**

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $BKHZ$ έχουμε: $\hat{H}_1 = \hat{K}_1$, η οποία σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$, μας δίνει **την εγγραψιμότητα του τετραπλεύρου** $B\Delta EK$ **.**

Από το εγγράψιμο $B\Delta EK$ έχουμε: $\hat{K}_2 = \hat{B}_1$.Από το εγγράψιμο $B\Delta H\Theta$ έχουμε: $\hat{\Theta}_1 = \hat{B}_1$. Άρα είναι: $\hat{K}_2 = \hat{\Theta}_1$.

Επομένως και **το τετράπλευρο** $\Delta Z\Theta K$ **είναι εγγράψιμο.**

Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n, που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$

Λύση

Για τους τέσσερις διαιρέτες ισχύουν οι σχέσεις

$$d_1 = 1,\ d_4 = n \ \text{ και } \ d_2 \cdot d_3 = n.$$

Επομένως, έχουμε

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640 \Leftrightarrow 1 + d_2 + d_3 + d_2 d_3 = 640$$

$$\Leftrightarrow (1+d_2)(1+d_3) = 640 \Leftrightarrow (1+d_2)(1+d_3) = 2^7 \cdot 5$$

Αλλά $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 \Rightarrow 2 < 1 + d_2 < 1 + d_3$ και επειδή οι d_2 και d_3 είναι ακέραιοι αριθμοί, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $1 + d_2 = 4, 1 + d_3 = 160 \Leftrightarrow d_2 = 3, d_3 = 159 = 3 \cdot 53$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 3 \cdot 159$ έχει και άλλους διαιρέτες.

- $1+d_2=5, 1+d_3=128 \Leftrightarrow d_2=4, d_3=127$, απορρίπτονται, αφού ο $n=4\cdot 127$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=8, 1+d_3=80 \Leftrightarrow d_2=7, d_3=79$, οπότε είναι $n=7\cdot 79=553$
- $1+d_2=10, 1+d_3=64 \Leftrightarrow d_2=9, d_3=63,$ απορρίπτονται, αφού ο $n=9\cdot 63$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=16, 1+d_3=40 \Leftrightarrow d_2=15, d_3=39,$ απορρίπτονται, αφού ο $n=15\cdot 39$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=20, 1+d_3=32 \Leftrightarrow d_2=19, d_3=31,$ οπότε είναι $n=19\cdot 31=589$

Τελικά, οι αριθμοί που ικανοποιούν τις αρχικές υποθέσεις είναι οι 553 και 589.

Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τις υπερβολές με εξισώσεις $y=\frac{1}{x}$ και $y=-\frac{1}{x}$. Μία ευθεία ε τέμνει τον κλάδο της υπερβολής $y=\frac{1}{x}$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων στα σημεία $\mathrm{A}\left(\alpha,\frac{1}{\alpha}\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta,\frac{1}{\beta}\right)$, και τους δύο κλάδους της υπερβολής $y=-\frac{1}{x}$ στα σημεία $\Gamma\left(\gamma,-\frac{1}{\gamma}\right)$ και $\Delta\left(\delta,-\frac{1}{\delta}\right)$ με $\gamma<0<\beta<\alpha<\delta$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha+\beta=\gamma+\delta$

(ii) τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν ίσα εμβαδά.

Λύση

Η ευθεία $\varepsilon_{\mathrm{AB}}$ που περνάει από τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση:

$$y-\frac{1}{\alpha}=\left(\frac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}{\beta-\alpha}\right)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{\alpha\beta}x+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}.$$

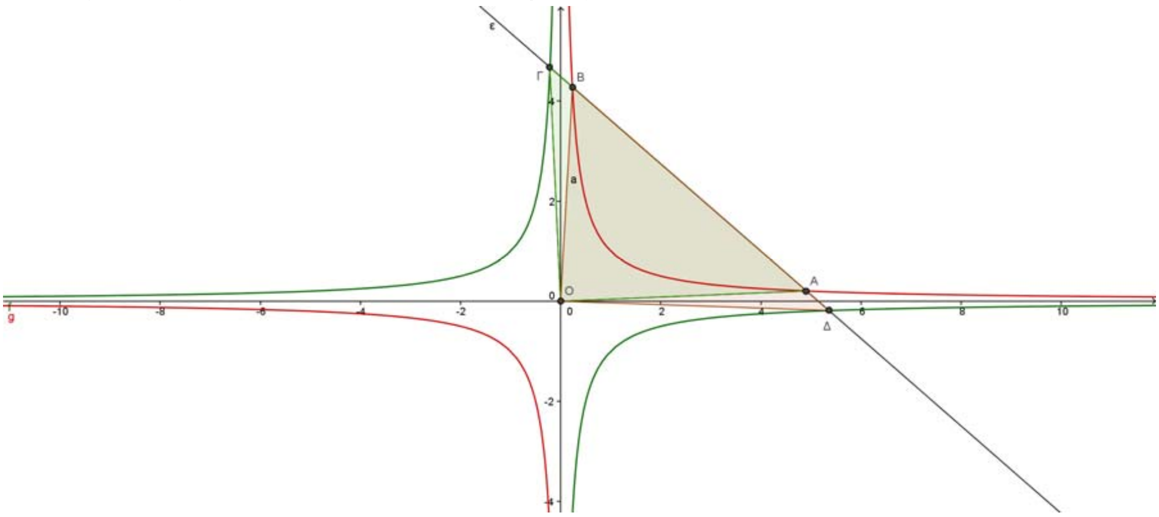
Η ευθεία $\varepsilon_{\Gamma\Delta}$ που περνάει από τα σημεία Γ και Δ έχει εξίσωση:

$$y+\frac{1}{\gamma}=\left(\frac{-\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\gamma}}{\delta-\gamma}\right)(x-\gamma)\Leftrightarrow y=\frac{1}{\gamma\delta}x-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}.$$

Επειδή οι ευθείες $\varepsilon_{\mathrm{AB}}$ και $\varepsilon_{\Gamma\Delta}$ συμπίπτουν, έπεται ότι:

$$-\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\gamma\delta}\quad\text{και}\quad\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta},$$

από τις οποίες προκύπτει η ισότητα: $\alpha+\beta=\gamma+\delta$.



Σχήμα 5

(ii) Τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ και ΓΔ έχουν τετμημένες $\frac{\alpha+\beta}{2}$ και $\frac{\gamma+\delta}{2}$ οι οποίες λόγω της (i) ταυτίζονται, οπότε τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν κοινό μέσο, έστω Μ. Τότε, δεδομένης της διάταξης των σημείων πάνω στην ευθεία ε που προκύπτει από τις συνθήκες $\gamma<0<\beta<\alpha<\delta$, ισχύει ότι:

$$\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{AM}+\mathrm{M}\Gamma=\mathrm{BM}+\mathrm{M}\Delta=\mathrm{B}\Delta,$$

οπότε τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν ίσες βάσεις στις οποίες αντιστοιχούν ίσα ύψη από την κορυφή Ο, οπότε έχουν και ίσα εμβαδά.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{3x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+2}\,.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\mathrm{A}(x)=3x^2-3x+4,\ \mathrm{B}(x)=x^2+3,\ \Gamma(x)=2x^2-3x+5, \Delta(x)=2x^2+2\,,$$

παρατηρούμε ότι όλα τα παραπάνω τριώνυμα έχουν αρνητική διακρίνουσα, οπότε έχουν θετική τιμή, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι ποσότητες μέσα στα ριζικά των δύο μελών της εξίσωσης έχουν σταθερό άθροισμα, δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(x)=\Gamma(x)+\Delta(x)\Leftrightarrow \mathrm{A}(x)-\Delta(x)=\Gamma(x)-\mathrm{B}(x)=\mathrm{P}(x)=x^2-3x+2.$$

Τότε η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\Delta(x)+\mathrm{P}(x)}+\sqrt{\mathrm{B}(x)}=\sqrt{\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)}+\sqrt{\Delta(x)}\\
&\Leftrightarrow \Delta(x)+\mathrm{P}(x)+\mathrm{B}(x)+2\sqrt{\mathrm{B}(x)\left[\Delta(x)+\mathrm{P}(x)\right]}=\\
&\quad (x)+\mathrm{P}(x)+\Delta(x)+2\sqrt{\Delta(x)\left[\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)\right]}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{B}(x)\left[\Delta(x)+\mathrm{P}(x)\right]=\Delta(x)\left[\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)\right]\\
&\Leftrightarrow \mathrm{P}(x)\left[\mathrm{B}(x)-\Delta(x)\right]=0\Leftrightarrow \mathrm{P}(x)=0 \text{ ή } \mathrm{B}(x)-\Delta(x)=0\\
&\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \text{ ή } x^2+3-2x^2-2=0 \qquad ,\\
&\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2=1\Leftrightarrow x=1(\text{διπλή}) \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-1.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακεραίους x,y που ικανοποιούν την εξίσωση $x^3+y^3-x-y=pq$, όπου p,q πρώτοι αριθμοί.

Λύση

Γράφουμε $\mathrm{x}^3-\mathrm{x}=\mathrm{x}\left(\mathrm{x}^2-1\right)=(\mathrm{x}-1)\mathrm{x}(\mathrm{x}+1)$, το οποίο είναι γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων, επομένως διαιρείται και από το 2 και από το 3. Επομένως ο 6 διαιρεί το $(x-1)x(x+1)$.

Όμοια ο 6 διαιρεί το $(y-1)y(y+1)$, οπότε το αριστερό μέλος διαιρείται από 6. Άρα ο 6 διαιρεί το pq, και αφού p,q πρώτοι αριθμοί, θα πρέπει $pq=6$.

Επομένως η εξίσωση γίνεται $(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)=6$. Αν τώρα $x,y\geq 2$, τότε $(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)\geq 6+6=12$, οπότε κάποιος είναι μικρότερος του 2, έστω ο y. Τότε όμως $(y-1)y(y+1)=0$, οπότε $(x-1)x(x+1)=6$ και αφού x μη αρνητικός ακέραιος, πρέπει $x=2$. Επομένως οι λύσεις είναι:

$$(x,y)\in\{(2,0),(2,1),(0,2),(1,2)\}\,.$$

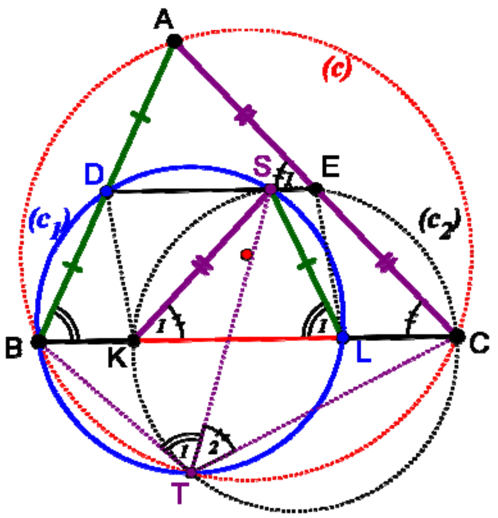
Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ και έστω D,E τα μέσα των AB και AC αντίστοιχα. Έστω T τυχόν σημείο του μικρού τόξου BC και (c_1), (c_2) οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BDT και CET αντίστοιχα. Οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνουν την BC στα σημεία L και K. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DELK$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

Η DE συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, άρα $\mathrm{DE} // = \frac{\mathrm{BC}}{2}$, άρα το τετράπλευρο $DELK$, είναι τραπέζιο. Επομένως, για να είναι το τετράπλευρο $DELK$ παραλληλόγραμμο, αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $DE = KL = \dfrac{BC}{2}$.

Έστω ότι ο κύκλος (c_1), τέμνει το τμήμα DE στο σημείο S. Θα αποδείξουμε ότι και ο κύκλος (c_2) περνάει από το σημείο S. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $CEST$ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 6

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABTC$, έχουμε: $\hat{A}+\hat{T}_1+\hat{T}_2=180^o$ (1).
Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $SLTB$, έχουμε: $\hat{T}_1=\hat{L}_1$ (2).
Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $DSLB$, έχουμε: $\hat{L}_1=\hat{B}$ (3).
Από τις σχέσεις (1),(2),(3) έχουμε: $\hat{T}_2=\hat{C}$ και επειδή $\hat{E}_1=\hat{C}$ (από την παραλληλία $DE // BC$), συμπεραίνουμε ότι $\hat{T}_2=\hat{E}_1$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $CEST$ είναι εγγράψιμο (η εξωτερική γωνία $\hat{E}_1$ είναι ίση με την απέναντι εσωτερική $\hat{T}_2$). Επομένως έχουμε αποδείξει ότι **το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκεται πάνω στην ευθεία DE.**

Παρατηρούμε τώρα ότι τα τετράπλευρα $DSLB$ και $SECK$ είναι εγγεγραμμένα τραπέζια (άρα ισοσκελή τραπέζια), οπότε θα ισχύουν οι ισότητες τμημάτων

$$SL=DB=\frac{AB}{2},\ SK=EC=\frac{AC}{2},$$

από τις οποίες σε συνδυασμό με τις ισότητες γωνιών $\hat{L}_1=\hat{B}$ και $\hat{K}_1=\hat{C}$, συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ABC και SLK είναι όμοια (με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

Τελικά προκύπτει ότι: $DE=KL=\frac{BC}{2}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση $y = x^2$ και τα σημεία της A, B και Γ με τετμημένες α, β και γ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \omega > 0$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του ω.

Λύση

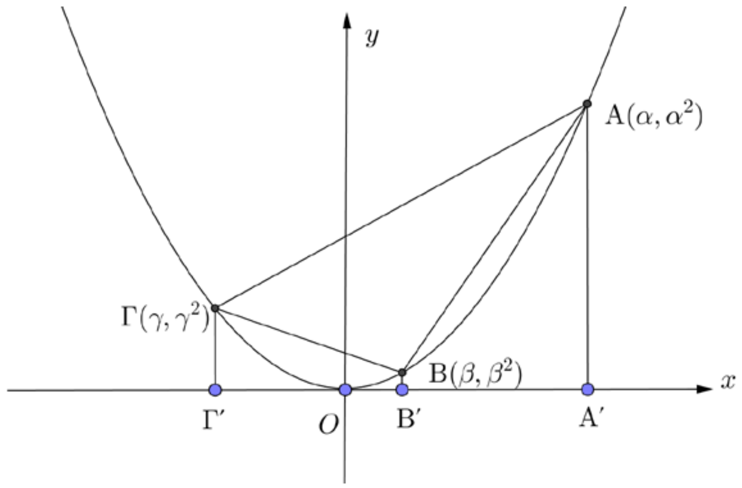
Αν είναι A', B' και Γ' οι προβολές των σημείων A, B και Γ πάνω στον άξονα $x'x$, τότε έχουμε:

$$E(\mathrm{AB\Gamma}) = E(\mathrm{A\Gamma\Gamma'A'}) - E(\mathrm{ABB'A'}) - E(\mathrm{B\Gamma\Gamma'B'})$$

$$= \frac{\alpha^2+\gamma^2}{2}\cdot 2\omega - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\cdot\omega - \frac{\beta^2+\gamma^2}{2}\cdot = \frac{\omega}{2}\cdot\left(2\alpha^2+2\gamma^2-\alpha^2-\beta^2-\beta\quad-\gamma^2\right)$$

$$= \frac{\omega}{2}\cdot\left(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\beta\quad\right) = \frac{\omega}{2}\cdot\left[\alpha^2-\beta^2-\left(\beta^2-\gamma^2\right)\right] = ,$$

$$= \frac{\omega}{2}\cdot\left[(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)\right] = \frac{\omega^2}{2}\cdot(\alpha+\beta-\beta-\gamma) = \frac{\omega^2}{2}\cdot 2\omega = \omega^3$$



Σχήμα 5

Σημείωση.

Η άσκηση μπορεί να λυθεί με χρήση του τύπου εμβαδού τριγώνου από την Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου της Β΄ Λυκείου. Έχουμε

$$E(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\det(\mathbf{BA}, \mathbf{B\Gamma}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\alpha-\beta & \alpha^2-\beta^2 \\ \gamma-\beta & \gamma^2-\beta^2\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)\left(\gamma^2-\beta^2\right)-\left(\alpha^2-\beta^2\right)(\gamma-\beta)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\gamma\quad\beta-\alpha-\beta)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha) = \frac{1}{2}\omega\cdot(-\omega)(-2\omega) = \omega^3.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{A} = 45^\circ$. Στο ύψος ΑΔ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΔΒ = ΔΓ = ΔΚ. Οι προεκτάσεις των υψών ΒΕ και ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ν, Κ και Μ είναι συνευθειακά.

Λύση

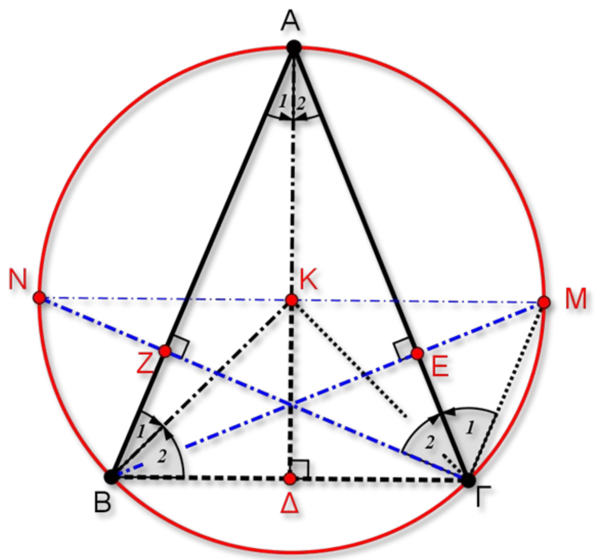
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ (δηλαδή ότι το σημείο Κ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ).

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΚ, έχουμε: $\widehat{B}_2 = 45^\circ$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (αφού $\widehat{A} = 45^\circ$) έχουμε:

$$\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{A}_1 = 90^\circ - 22{,}5^\circ = 67{,}5^\circ.$$

Άρα $\hat{B}_1 = \hat{B} - \hat{B}_2 = 67{,}5^\circ - 45^\circ = 22{,}5^\circ = \hat{A}_1$, δηλαδή το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές με ΚΑ=ΚΒ. Όμοια αποδεικνύουμε ότι ΚΑ=ΚΓ, οπότε το Κ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 6

Η γωνία $\widehat{\Gamma}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου που βαίνει στο τόξο ΑΜ.

Άρα $\hat{\Gamma}_1 = M\hat{B}A = 90^\circ - \hat{A} = 45^\circ$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ).

Ισχύει επίσης $\hat{\Gamma}_2 = 90^\circ - \hat{A} = 45^\circ$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΖ).

Επομένως $M\hat{\Gamma}N = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 90^\circ$, δηλαδή η ΜΝ είναι διάμετρος του κύκλου, άρα θα περνά από το κέντρο Κ του κύκλου.

Πρόβλημα 3

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, τέτοιο ώστε:

(α) $P(1)=1,\ P(2)=4, P(3)=9,\ P(4)=16.$

(β) Όλοι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 10.

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(5)$.

Λύση

Το πολυώνυμο $Q(x)=P(x)-x^2$ είναι τετάρτου βαθμού και λόγω της (α) έχει ρίζες τους αριθμούς 1,2,3 και 4. Επομένως μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$Q(x)=P(x)-x^2=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$
$$\Leftrightarrow P(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+x^2$$
$$\Leftrightarrow P(x)=ax^4-10ax^3+(35a+1)x^2-50ax+24a$$

Άρα είναι

$$P(5)=24a+25.$$

Λόγω της (β) έχουμε:

$$a\le 10,\ -10a\le 10,\ 35a+1\le 10,\ -50a\le 10,\ 24a\le 10$$
$$\Leftrightarrow a\le 10,\ \ a\ge -1,\ a\le \frac{9}{35},\ a\ge -\frac{1}{5},\ a\le \frac{10}{24}\Leftrightarrow -\frac{1}{5}\le a\le \frac{9}{35}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$-\frac{1}{5}\le a\le \frac{9}{35}\Leftrightarrow -\frac{24}{5}\le 24a\le \frac{9\cdot 24}{35}\Leftrightarrow -\frac{24}{5}+25\le 24a+25\le \frac{9\cdot 24}{35}+25$$
$$\Leftrightarrow \frac{101}{5}\le 24a+25\le \frac{1091}{35}\Leftrightarrow \frac{101}{5}\le P(a)\le \frac{1091}{35},$$

δηλαδή η μικρότερη δυνατή τιμή του $P(a)$ είναι $\frac{101}{5}$ και η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(a)$ είναι $\frac{1091}{35}$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό $\mathrm{A}=14^7+14^2+1$.

Λύση

Θέτουμε για ευκολία $n=14$ και θα προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμό $\mathrm{A}=n^7+n^2+1$. Πράγματι, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο n^2+n+1 είναι παράγοντάς του Α ως εξής:

$$\mathrm{A}=n^7+n^2+1=n^7-n+n^2+n+1=n(n^6-1)+n^2+n+1=$$
$$=n(n^3+1)(n^3-1)+n^2+n+1=n(n^3+1)(n-1)(n^2+n+1)+n^2+n+1=$$
$$=(n^2+n+1)(n^5-n^4+n^2-n+1)$$

Επομένως ο αριθμός $n^2+n+1=14^2+14+1=211$ διαιρεί τον αριθμό A. Επιπλέον, ο 211 είναι πρώτος και το ζητούμενο έπεται.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$f(a)=0 \text{ και } f\left(f(x)\right)=xf(x)+a, \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του a και μία μη μηδενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Λύση
Θέτοντας $x=a$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f\left(f(a)\right)=af(a)+a\Rightarrow f(0)=a.$$

Για $x=0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε: $f\left(f(0)\right)=0\cdot f(0)+a\overset{(1)}{\Rightarrow} f(a)=a,$

οπότε από τη σχέση $f(a)=0$ έπεται ότι $a=0$.

Για $a=0$ πρέπει να υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f\left(f(x)\right)=xf(x),$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Μία συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να βρεθεί, αν αναζητήσουμε συνάρτηση της μορφής $f(x)=x^c,\ c\in\mathbb{R}.$ Τότε πρέπει να ισχύει:

$$f\left(x^c\right)=x\cdot x^c\Rightarrow\left(x^c\right)^c=x^{c+1}\Rightarrow x^{c^2}=x^{c+1}\Rightarrow c^2=c+1\Rightarrow c^2-c-1=0\Rightarrow c=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Άρα μία συνάρτηση είναι η $f(x)=\begin{cases}0, \text{ αν } x\le 0\\ x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \text{ αν } x>0.\end{cases}$

Πρόβλημα 2
Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^7+x^6+x^5+1=0 .$$

Λύση
Έχουμε

$$\begin{aligned}x^7+x^6+x^5+1&=x^5\left(x^2+1\right)+\left(\left(x^2\right)^3+1\right)=x^5\left(x^2+1\right)+\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)\\&=\left(x^2+1\right)\left(x^5+x^4-x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)\left[x^4(x+1)-(x+1)(x-1)\right]\\&=\left(x^2+1\right)(x+1)\left(x^4-x+1\right).\end{aligned}$$

Το πολυώνυμο x^2+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επίσης, αν το πολυώνυμο x^4-x+1 είχε πραγματική ρίζα, τότε θα υπήρχε $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\alpha^4-\alpha+1=0\Leftrightarrow\alpha\left(\alpha^3-1\right)+1=0\Leftrightarrow\alpha(\alpha-1)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)+1=0\Leftrightarrow f(\alpha)+1=0.$$

Όμως για $\alpha\le 0$ ή $\alpha\ge 1$ η παράσταση $f(\alpha)=\alpha(\alpha-1)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)$ είναι μη αρνητική, οπότε $f(\alpha)+1>0$.

Για $0<\alpha<1$ είναι $\alpha^4>0,\ -\alpha+1>0$ και $\alpha^4-\alpha+1>0.$ Επομένως η υπόθεση που κάναμε παραπάνω δεν μπορεί να ισχύει.
Επομένως έχουμε

$$x^7+x^6+x^5+1=0\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)(x+1)\left(x^4-x+1\right)=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $\hat{A} = 36°$. Ο κύκλος $C_1(Γ, ΓΑ)$ (που έχει κέντρο το $Γ$ και ακτίνα $ΓΑ$) τέμνει την προέκταση της $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΓΔ$ (έστω C_2) τέμνει τον C_1 στο σημείο $Ε$. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και ότι η $ΔΓ$ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Λύση

Το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ισοσκελές, διότι $ΓΑ$ και $ΓΔ$ είναι ακτίνες του κύκλου C_1. Άρα:

$$\hat{A} = \hat{Δ}_1 \quad (1).$$

Το τρίγωνο $ΓΔΕ$ είναι ισοσκελές, διότι $ΓΕ$ και $ΓΔ$ είναι ακτίνες του κύκλου C_1. Άρα:

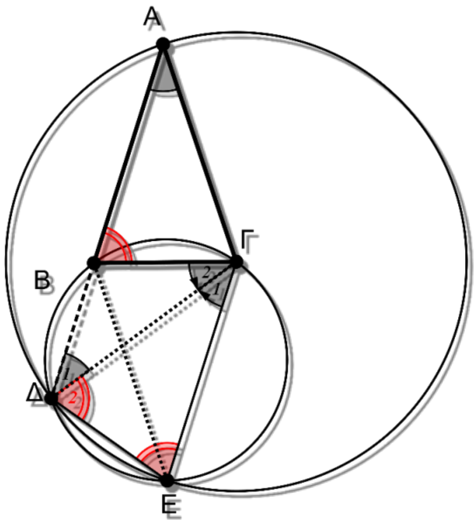
$$\hat{E} = \hat{Δ}_2 \quad (2).$$

Το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο C_2. Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{B}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{E}$. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{B} \quad (3).$$

Από τις σχέσεις $(1), (2), (3)$ έχουμε: $\hat{A} = \hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_1 = 36°$.

Άρα $ΒΔ \parallel ΓΕ$, οπότε το τετράπλευρο $ΒΔΕΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια οι διαγώνιές του ($ΒΕ$ και $ΓΔ$) θα είναι ίσες. Άρα το τρίγωνο $ΕΒΓ$ είναι ισοσκελές. Δηλαδή τα σημεία $Ε$ και $Α$ ανήκουν στη μεσοκάθετη της βάσης $ΒΓ$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ οπότε η $ΑΕ$ θα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.



Σχήμα 5

Από την παραλληλία $ΒΔ \parallel ΓΕ$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{B} = Β\hat{Γ}Ε = 72°$, οπότε τα ισοσκελή τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΒΓ$ είναι ίσα.

Επειδή όμως $\hat{A} = \hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_2 = \hat{Γ}_1 = 36°$ και η $\hat{Γ}_2$ σχηματίζεται από τη $ΒΓ, ΔΓ$ (χορδή και εφαπτομένη) συμπεραίνουμε ότι η $ΔΓ$ θα είναι εφαπτομένη.

Πρόβλημα 4

Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $9^{8^{8^9}}$, $8^{9^{9^8}}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Αφού $9>8$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$8^{8^9} > 9^{9^8} \Leftrightarrow \left(8^{8^9}\right)^{\frac{1}{9^8}} > \left(9^{9^8}\right)^{\frac{1}{9^8}} \Leftrightarrow 8^{\frac{8^9}{9^8}} > 9 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{8^{\frac{8^9}{9^8}}} > 3 \Leftrightarrow 8^{4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3 \Leftrightarrow 4^{6\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3$$

Τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $6\cdot\left(\dfrac{8}{9}\right)^8 > 1 \Leftrightarrow 2\cdot 3\cdot 2^{24} > 3^{16} \Leftrightarrow 2^{25} > 3^{15} \Leftrightarrow 2^5 > 3^3$,

που ισχύει, οπότε ισχύει και η αρχική.

2ος τρόπος. Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Λόγω της μονοτονίας του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι $8^{8^9}\ln 9 > 9^{9^8}\ln 8$. Χρησιμοποιώντας δεύτερη φορά τη μονοτονία του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(8^{8^9}\ln 9\right) > \ln\left(9^{9^8}\ln 8\right) \Leftrightarrow 8^9\ln 8 + \ln(\ln 9) > 9^8\ln 9 + \ln(\ln 8).$$

Αφού $\ln(\ln 9) > \ln(\ln 8)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$8^9\ln 8 > 9^8\ln 9 \Leftrightarrow \frac{8^9}{9^8} > \frac{\ln 9}{\ln 8} \Leftrightarrow \frac{2^{27}}{3^{16}} > \frac{2\ln 3}{3\ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^{26}}{3^{15}} > \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\dfrac{2^{26}}{3^{15}} > 2 > \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$, η οποία θα δώσει το ζητούμενο. Πράγματι, η δεξιά ανισότητα προκύπτει άμεσα αφού $2\ln 2 = \ln 4 > \ln 3$.

Από την άλλη αρκεί $\dfrac{2^{26}}{3^{15}} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{2^{25}}{3^{15}} > 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2^5}{3^3}\right)^5 > 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{32}{27}\right)^5 > 1$, που ισχύει.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^4 - x^3 - 18x^2 + 3x + 9 = 0 .$$

Λύση.
Μία πρώτη παρατήρηση είναι ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ που είναι διαιρέτες του σταθερού όρου δεν ικανοποιούν την εξίσωση. Επομένως πρέπει να εργαστούμε με κατάλληλο μετασχηματισμό και παραγοντοποίηση. Παρατηρούμε ότι το $x = 0$ δεν είναι λύση της εξίσωσης. Για $x \neq 0$ μπορούμε να διαιρέσουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με το x^2**,** οπότε προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση:

$$x^2 - x - 18 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - \left(x - \frac{3}{x}\right) - 18 = 0 \qquad (1)$$

Θέτουμε $x - \frac{3}{x} = \omega,$ οπότε $x^2 + \frac{9}{x^2} - 6 = \omega^2 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} = \omega^2 + 6$. Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε την εξίσωση

$$\omega^2 + 6 - \omega - 18 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - \omega - 12 = 0 \Leftrightarrow \omega = 4 \text{ ή } \omega = -3.$$

Άρα έχουμε;

$$x - \frac{3}{x} = 4 \text{ ή } x - \frac{3}{x} = -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \text{ ή } x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} \text{ ή } x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{7} \text{ ή } x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Πρόβλημα 2
Αν ο πενταψήφιος ακέραιος $\mathrm{A} = \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0} = \alpha_4 \cdot 10^4 + \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0.$ να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9 \cdot \mathrm{A}$.

Λύση
Χρησιμοποιώντας τη διαφορά $9 \cdot \mathrm{A} = 10 \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A}$ έχουμε ότι

$$9 \cdot \mathrm{A} = 10 \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A} = \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0 0} - \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0}$$

$$= \left(\alpha_4 \cdot 10^5 + \alpha_3 \cdot 10^4 + \alpha_2 \cdot 10^3 + \alpha_1 \cdot 10^2 + \alpha_0 \cdot 10\right) - \left(\alpha_4 \cdot 10^4 + \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0\right)$$

$$= \alpha_4 \cdot 10^5 + \left(\alpha_3 - \alpha_4\right) \cdot 10^4 + \left(\alpha_2 - \alpha_3\right) \cdot 10^3 + \left(\alpha_1 - \alpha_2\right) \cdot 10^2 + \left(\alpha_0 - \alpha_1\right) \cdot 10 - \alpha_0$$

$$= \alpha_4 \cdot 10^5 + \left(\alpha_3 - \alpha_4\right) \cdot 10^4 + \left(\alpha_2 - \alpha_3\right) \cdot 10^3 + \left(\alpha_1 - \alpha_2\right) \cdot 10^2 + \left(\alpha_0 - \alpha_1 - 1\right) \cdot 10 + (10 - \alpha_0)$$

οπότε, λόγω των υποθέσεων $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0,$ ο αριθμός $9 \cdot \mathrm{A}$ έχει τα ψηφία $\alpha_4,\ \alpha_3 - \alpha_4,\ \alpha_2 - \alpha_3,\ \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_0 - \alpha_1 - 1,\ 10 - \alpha_0$, τα οποία έχουν άθροισμα ίσο με 9.

Σημείωση: Η αφαίρεση $10 \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A}$ μπορεί να γίνει και κατακόρυφα με το συνήθη τρόπο, αφού λάβουμε υπόψη ότι $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0,$ ως εξής:

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & & & & & 1 & \\
 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 \\
- & & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\
\hline
 & \alpha_4 & \alpha_3-\alpha_4 & \alpha_2-\alpha_3 & \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_0-\alpha_1-1 & 10-\alpha_0,
\end{array}
$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Πρόβλημα 3

Αν οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι, να λύσετε το σύστημα:

$$x+2y^2=3z^3$$
$$y+2z^2=3x^3$$
$$z+2x^2=3y^3$$

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι ο z είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τους άλλους δύο αγνώστους, δηλαδή $z \geq \max\{x, y\}$. (Οι άλλες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται ομοίως).

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $z>1$. Τότε , αφού $z \geq \max\{x, y\}$, θα είναι $x+2y^2<z+2z^2<3z^3$, άτοπο.
- $z=1$. Τότε $x+2y^2=3$ και αφού $1 \geq \max\{x, y\}$ έπεται ότι η τελευταία ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν $x=y=1$. Άρα έχουμε τη λύση: $(x, y, z)=(1,1,1)$.

Αυτή είναι η μοναδική λύση του συστήματος, αφού οι περιπτώσεις με $y \geq \max\{x, z\}$ ή $x \geq \max\{y, z\}$ οδηγούν στην ίδια λύση.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ (με $ΑΒ \parallel ΓΔ$ και $ΑΒ < ΓΔ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η εφαπτομένη στο $Β$ του κύκλου (c) τέμνει την ευθεία $ΔΓ$ στο σημείο $Ε$. Έστω Μ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$.

Να αποδείξετε ότι:

(α) Η ευθεία $ΑΔ$ είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου, έστω (c_1), του τριγώνου $ΔΒΕ$.

(β) Το σημείο Μ ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο, έστω (c_2), του τριγώνου $ΟΒΓ$.

(γ) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΔΒΕ$ και $ΟΒΓ$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $Β$.

Λύση

(α) Επειδή το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\hat{Γ}_1=\hat{Δ}_1, \hat{Γ}_2=\hat{Δ}_2.$$

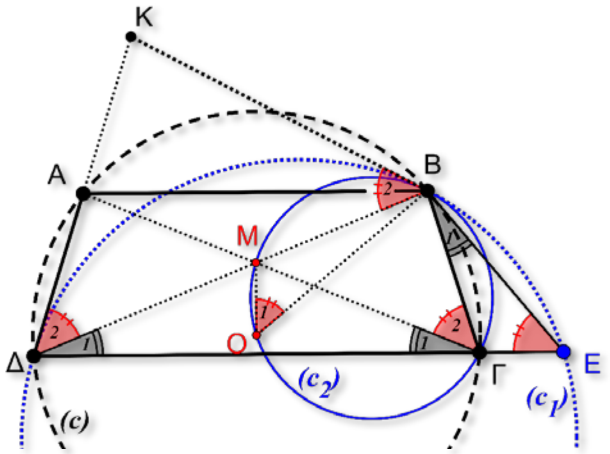
Επίσης, επειδή η $ΒΕ$ εφάπτεται στον κύκλο (c), θα ισχύει: $\hat{Β}_1=\hat{Δ}_1$ (γωνία από τη χορδή $ΒΓ$ και την εφαπτόμενη $ΒΕ$). Άρα έχουμε

$$\hat{Β}_1=\hat{Γ}_1=\hat{Δ}_1 \qquad (1).$$

Έστω (c_1) και (c_2) οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΔΒΕ$ και $ΟΒΓ$, αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{Δ}_2$ (που δημιουργείται από τη χορδή $B\Delta$ και την $A\Delta$) είναι ίση με την γωνία $\hat{E}$, οπότε η $A\Delta$ θα εφάπτεται στον κύκλο (c_1). Πράγματι, η γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B\Gamma E$, οπότε:

$$B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{B}_1 + \hat{E} \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_1 + \hat{E}$$

και επειδή $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$, καταλήγουμε στις ισότητες: $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Delta}_2 = \hat{E}$.



Σχήμα 5

(β) Θα αποδείξουμε ότι το σημείο τομής M των διαγωνίων του ισοσκελούς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ ανήκει στον κύκλο (c_2). Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma OM$ είναι εγγράψιμο.

Πράγματι, η OM είναι μεσοκάθετος της AB , οπότε:

$$M\hat{O}B = \hat{M}_1 = \frac{A\hat{O}B}{2} = A\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}_2.$$

Επομένως, το τετράπλευρο $B\Gamma OM$ είναι εγγράψιμο.

(γ) Θεωρούμε την εφαπτόμενη του κύκλου (c_1) στο σημείο B και έστω ότι τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο σημείο K. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία BK είναι εφαπτομένη και του κύκλου (c_2).

Πράγματι, έχουμε ότι

$$\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 \qquad (2)$$

γιατί η $K\Delta$ είναι εφαπτομένη του (c_1) (όπως αποδείξαμε στα ερώτημα (α))

Ισχύουν όμως οι ισότητες γωνιών: $K\hat{B}M = \hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_2 = B\hat{\Gamma}M$. Άρα η BK εφάπτεται και του κύκλου (c_2).