Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\dfrac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\dfrac{6}{13}$, αν $x=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\frac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\frac{6}{13}=\frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\frac{6}{13}=\frac{x^2-1}{x^2-3}-\frac{6}{13},$$

οπότε για $x=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}=\left(-\dfrac{4}{3}\right)^{2}=\dfrac{16}{9}$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A}=\frac{x^2-1}{x^2-3}-\frac{6}{13}=\frac{\left(\frac{16}{9}\right)^2-1}{\left(\frac{16}{9}\right)^2-3}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{256}{81}-1}{\frac{256}{81}-3}-\frac{6}{13}=\frac{175}{13}-\frac{6}{13}=\frac{169}{13}=13.$$

2^{ος} τρόπος

Για όσους δεν γνωρίζουν την παραγοντοποίηση της διαφοράς δύο τετραγώνων, προτείνουμε την ακόλουθη λύση:

Έχουμε $x=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}=\left(-\dfrac{4}{3}\right)^{2}=\dfrac{16}{9}$, οπότε:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(\frac{16}{9}\right)^4-1}{\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2+1\right)\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2-3\right)}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{256\cdot 256-81\cdot 81}{81^2}}{\left(\frac{256+81}{81}\right)\left(\frac{256-243}{81}\right)}-\frac{6}{13}$$

$$=\frac{\frac{65536-6561}{81^2}}{\left(\frac{337}{81}\right)\left(\frac{13}{81}\right)}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{58975}{81^2}}{\frac{337\cdot 13}{81^2}}-\frac{6}{13}=\frac{58975}{337\cdot 13}-\frac{6}{13}=\frac{175}{13}-\frac{6}{13}=\frac{169}{13}=13.$$

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\frac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Λύση

Έστω n το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου. Τότε το πλήθος των μαθητών που παίζει βιολί είναι $\frac{4n}{100}$. Το πλήθος των μαθητών που παίζει και βιολί και πιάνο είναι

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4n}{100}=\frac{4n}{300}=\frac{n}{75}.$$

Επειδή ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο αριθμητής n να είναι πολλαπλάσιο του παρανομαστή, δηλαδή πρέπει $n=75k$, όπου k θετικός ακέραιος..

Έτσι, από την υπόθεση $170\le n\le 230$, έχουμε:

$$170\le n=75k\le 230 \Leftrightarrow \frac{170}{75}\le k\le\frac{230}{75}\Leftrightarrow 2+\frac{20}{75}\le k\le 3+\frac{5}{75}\Leftrightarrow k=3.$$

Επομένως έχουμε $n=75\cdot 3=225$ μαθητές.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ πλευρά α. Προεκτείνουμε την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=\frac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ κατά τμήμα $\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{A}\Delta$. Αν $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB}\Delta$ και του τετραπλεύρου $\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)}{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})}$.

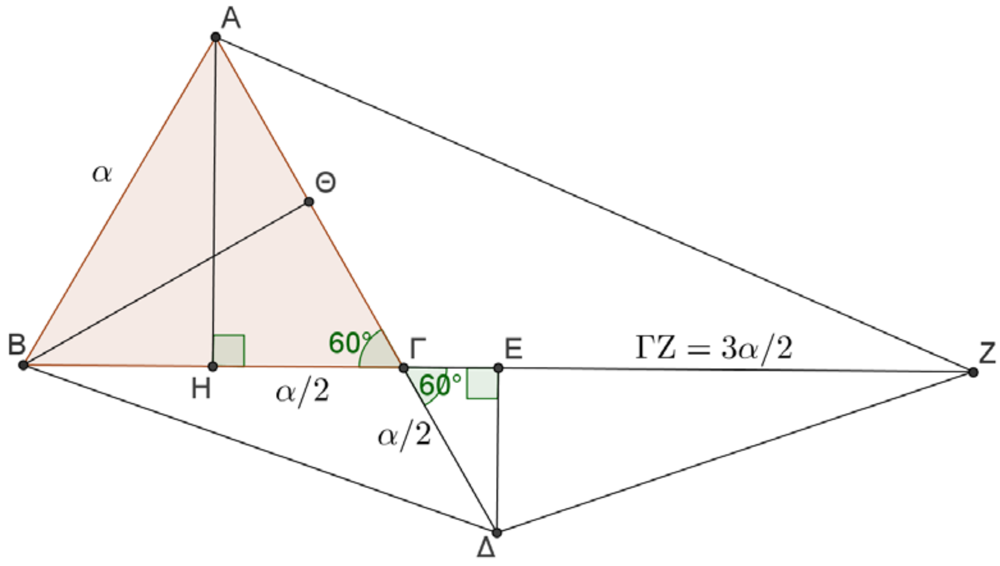
Λύση

Το τρίγωνο $\mathrm{AB}\Delta$ έχει βάση $\mathrm{A}\Delta=\frac{3\alpha}{2}$ και ύψος

$$\mathrm{B}\Theta=\mathrm{AH}=\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\mathrm{B}\Theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$



Σχήμα 3

Για το τετράπλευρο ΑΒΔΖ έχουμε: $\text{E}(\text{AB}\Delta\text{Z}) = \text{E}(\text{ABZ}) + \text{E}(\text{B}\Delta\text{Z})$.

Στο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε βάση $\text{BZ} = \alpha + \frac{3\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος $\text{AH} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, οπότε έχει εμβαδό

$$\text{E}(\text{ABZ}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$

Στο τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε βάση $\text{BZ} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος ΔΕ το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΓ και ΓΕΔ ως εξής:

$$\frac{\text{E}\Delta}{\text{AH}} = \frac{\Gamma\Delta}{\text{A}\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\text{E}\Delta}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{E}\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Διαφορετικά, μπορούμε να έχουμε: $\text{E}\Delta = \Gamma\Delta\eta\mu 60^\circ = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$.

Άρα έχουμε:

$$\text{E}(\text{B}\Delta\text{Z}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}.$$

Επομένως έχουμε:

$$\text{E}(\text{AB}\Delta\text{Z}) = \text{E}(\text{ABZ}) + \text{E}(\text{B}\Delta\text{Z}) = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8} + \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16} = \frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{\text{E}(\text{AB}\Delta)}{\text{E}(\text{AB}\Delta\text{Z})} = \frac{\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}}{\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16}} = \frac{6\sqrt{3}\alpha^2}{15\sqrt{3}\alpha^2} = \frac{2}{5}.$$

$2^{ος}$ τρόπος

Έστω Ε(ΑΒΓ) = Ε. Τότε Ε(ΒΓΔ) = $\frac{Ε}{2}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος ΒΘ με το τρίγωνο ΑΒΓ και βάση ΓΔ = $\frac{\alpha}{2}$. Άρα είναι:

$$Ε(ΑΒΔ)=Ε(ΑΒΓ) + Ε(ΒΓΔ) = \frac{3Ε}{2}.$$

Ακόμα έχουμε: Ε(ΑΓΖ) = $\frac{3Ε}{2}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος ΑΗ με το τρίγωνο ΑΒΓ και βάση ΓΖ = $\frac{3\alpha}{2}$. Τέλος έχουμε Ε(ΓΔΖ) = $\frac{3Ε}{4}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος ΔΕ με το τρίγωνο ΒΓΔ και βάση ΓΖ = $\frac{3\alpha}{2}$. Έτσι έχουμε:

$$Ε(ΑΒΔΖ) = Ε + \frac{Ε}{2} + \frac{3Ε}{2} + \frac{3Ε}{4} = \frac{15Ε}{4}$$

και επομένως

$$\frac{Ε(ΑΒΔ)}{Ε(ΑΒΔΖ)} = \frac{3Ε/2}{15Ε/4} = \frac{2}{5}.$$

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια $Δ_1$ και $Δ_2$ με βάρη $\beta(Δ_1)$ και $\beta(Δ_2)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\frac{\beta(Δ_1)}{\beta(Δ_2)} = \frac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2.

Λύση

Έστω $\alpha(\Delta)$, $\alpha(\Delta_1)$ και $\alpha(\Delta_2)$ η αξία των διαμαντιών Δ, Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta)}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\alpha(\Delta_1)}{\beta(\Delta_1)^2} = \frac{\alpha(\Delta_2)}{\beta(\Delta_2)^2} = \lambda$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta) = \lambda\beta(\Delta)^2, \alpha(\Delta_1) = \lambda\beta(\Delta_1)^2, \alpha(\Delta_2) = \lambda\beta(\Delta_2)^2$$

Άρα έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\lambda\beta(\Delta_1)^2 + \lambda\beta(\Delta_2)^2}{\lambda\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2 + \beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} \quad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{3} = \frac{\beta(\Delta_2)}{7} = \frac{\beta(\Delta_1)+\beta(\Delta_2)}{3+7} = \frac{\beta(\Delta)}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)} = \frac{3}{10}, \frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)} = \frac{7}{10} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \left(\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}\right)^2 + \left(\frac{\beta(\Delta)}{\beta(\Delta)}\right)^2 = \frac{9}{100} + \frac{49}{100} = \frac{58}{100}.$$

Επομένως η αξία των δύο κομματιών του διαμαντιού ισούται με το 58% της αρχικής αξίας του, δηλαδή η αξία του μειώθηκε κατά 100-58 = 42%.

2ος τρόπος

Επειδή στον πρώτο τρόπο διαπιστώνουμε στη σχέση (1) ότι ο λόγος $\dfrac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)}$ εξαρτάται από τους λόγους των βαρών $\dfrac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}$ και $\dfrac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}$, μπορούμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $\beta(\Delta_1) = 3$ και $\beta(\Delta_1) = 7$ με $\beta(\Delta) = 10$.
Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η αξία του τετραγώνου της μονάδας βάρους είναι 1, τότε έχουμε ότι $\alpha(\Delta_1) = 3^2 = 9$ και $\alpha(\Delta_2) = 7^2 = 49$ και $\alpha(\Delta) = 10^2 = 100$. Επομένως η μείωση της αξίας του διαμαντιού είναι $100-(9+49) = 42$, δηλαδή σε ποσοστό 42%.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης . $\mathrm{A}=\frac{a-1}{\alpha-3}+\frac{1}{33}+a^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}$, αν $a=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$.

Λύση

Έχουμε $a=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{4}=\frac{81}{16}$, οπότε θα είναι $a^{-1}=\frac{16}{81}$ και

$$\mathrm{A}=\frac{a-1}{a-3}+\frac{1}{33}+a^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}=\frac{\frac{81}{16}-1}{\frac{81}{16}-3}+\frac{1}{33}+\frac{16}{81}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}$$

$$=\frac{\frac{65}{16}}{\frac{33}{16}}+\frac{1}{33}+\frac{8}{27}+\frac{1}{27}=\frac{65}{33}+\frac{1}{33}+\frac{9}{27}=\frac{66}{33}+\frac{9}{27}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}.$$

Πρόβλημα 2°

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha=\frac{28}{\nu}$ και $\gamma=\frac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

Οι δυνατές τιμές του ψηφίου β των δεκάδων είναι: 0, 4, 8.

Ο ακέραιος ν πρέπει να είναι θετικός και κοινός διαιρέτης των 28 και 42, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι: 1, 2, 7, 14. Τότε οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο α είναι:

$$\alpha=4,\ \text{για}\ \nu=7,\ \alpha=2,\ \text{για}\ \nu=14.$$

Οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο γ είναι:

$$\gamma=6,\text{για}\ \nu=7,\ \gamma=3,\ \text{για}\ \nu=14.$$

Επομένως έχουμε: $\alpha=4,\ \gamma=6,$ για $\nu=7$ και $\alpha=2,\ \gamma=3,$ για $\nu=14.$

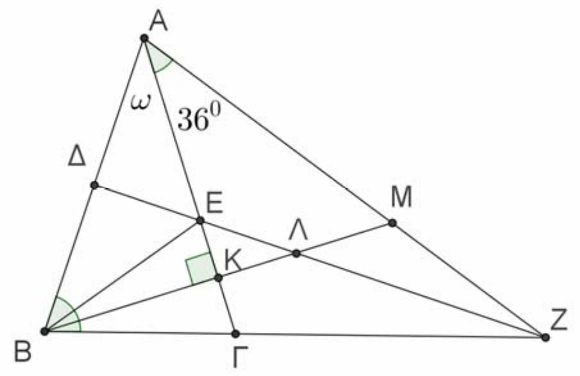
Άρα οι δυνατές τιμές του ακέραιου $\overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι: 406, 446, 486, 203, 243, 283.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\omega^{\circ}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Η κάθετη από το σημείο Β προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Κ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ στο σημείο Μ. Αν είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}=36^{\circ}$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\omega=36^{\circ}$, **(β)** ΑΜ = ΓΖ, **(γ)** ΒΛ = ΛΖ.

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ θα έχουμε:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \omega}{2}.$$

Επειδή η ΔΖ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ, το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΖΑ = ΖΒ, οπότε θα έχουμε:

$$Z\hat{A}B = Z\hat{B}A \Leftrightarrow \omega + 36^\circ = \hat{B} \Leftrightarrow \omega + 36^\circ = \frac{180^\circ - \omega}{2} \Leftrightarrow 3\omega = 108 \Leftrightarrow \omega = 36^\circ.$$

(β) Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΜ η ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος θα έχουμε

$$A\hat{B}K = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ = A\hat{M}K.$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΜ = ΑΒ. Από υπόθεση είναι ΑΒ = ΑΓ. Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο ΖΑΒ έχουμε

$$A\hat{Z}B = 180^\circ - 2\hat{B} = 180^\circ - 2\cdot 72^\circ = 36^\circ = \Gamma\hat{A}Z.$$

Επομένως και το τρίγωνο ΓΑΖ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΓΖ. Άρα έχουμε:

ΑΜ = ΑΒ = ΑΓ = ΓΖ.

(γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε: $\Lambda\hat{Z}B = \Delta\hat{Z}B = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$, ενώ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΚΒ έχουμε: $\Lambda BZ = K B\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

Άρα έχουμε: $\Lambda\hat{Z}B = \Lambda\hat{B}Z = 18^\circ \Rightarrow$ ΛΒΖ ισοσκελές τρίγωνο με ΒΛ = ΛΖ.

Πρόβλημα 4

Αν οι x, y, z, w, m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = (x+y)\cdot z^m - w$.

Λύση

Από τη συνθήκη, οι x, y, z, w, m είναι οι αριθμοί 1,2,3,4,5 με διαφορετική ίσως σειρά.

Για τη μέγιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο ελάχιστος, δηλαδή $w = 1$. Τους αριθμούς 4 και 5 πρέπει να τους χρησιμοποιήσουμε στη δύναμη z^m. Παρατηρούμε ότι $4^5 > 5^4$, οπότε για τη μέγιστη τιμή $z = 4, m = 5$. Οπότε απομένει να έχουμε $x + y = 2 + 3 = 5$. Συνεπώς η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $5\cdot 4^5 - 1 = 5\cdot 1024 - 1 = 5119$.

Για την ελάχιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο μέγιστος, δηλαδή $w = 5$ και η δύναμη z^m να είναι η ελάχιστη, οπότε $z = 1$. Η μικρότερη τιμή τώρα για το $x + y$ είναι $x + y = 2 + 3 = 5$ η ελάχιστη τιμή είναι $5\cdot 1^4 - 5 = 0$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = \dfrac{12^{\nu}}{3^{\nu}} : 2^{2\nu-1}$ και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^{\nu}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \frac{\left(\alpha^3 - \beta\right)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$$

.

Λύση

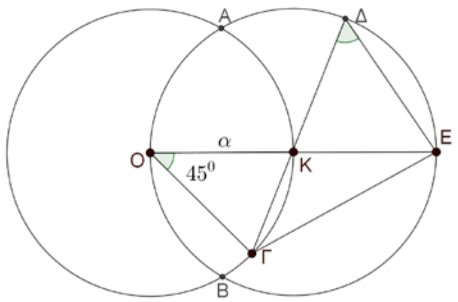
Έχουμε ότι $\alpha = \dfrac{12^{\nu}}{3^{\nu}} : 2^{2\nu-1} = \left(\dfrac{12}{3}\right)^{\nu} : 2^{2\nu-1} = 4^{\nu} : 2^{2\nu-1} = 2^{2\nu} : 2^{2\nu-1} = 2^{2\nu-(2\nu-1)} = 2.$

και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^{\nu} = 10^{2\nu+1} : 10^{2\nu} = 10$, οπότε είναι $\alpha^2 = 4,\ \alpha^3 = 8$ και

$$\mathrm{A} = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha} = \frac{(8-10)^3 + 40 - 20 + 8}{4 + 20 - 20} = \frac{-8 + 40 - 20 + 8}{4} = 5$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{OK} = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία Ο και Κ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο ΚΒ και η ευθεία ΓΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Δ. Η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Ε. Αν είναι $\mathrm{K\hat{O}\Gamma} = 45^{\circ}$, να βρείτε :

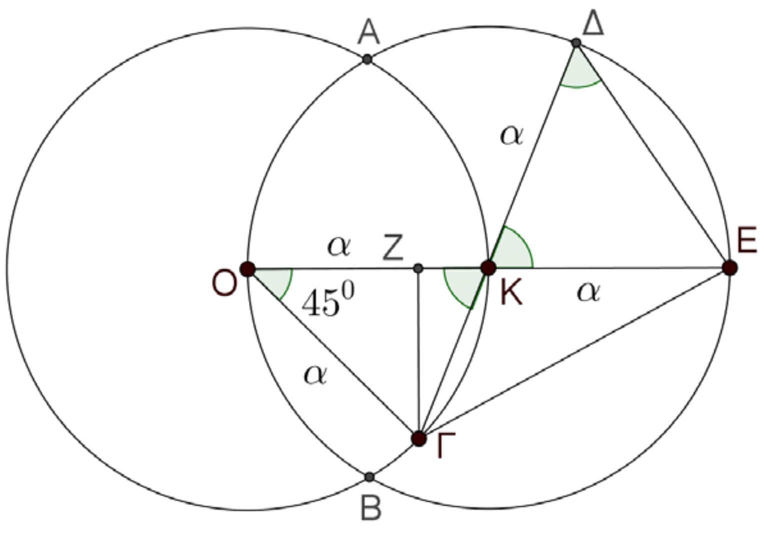


(α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{K\hat{\Delta}E}$,

(β) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ συναρτήσει του α .

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΟΚΓ έχει $\mathrm{OK} = \mathrm{O\Gamma} = \alpha$, οπότε είναι ισοσκελές με βάση ΚΓ. Άρα έχει τις προσκείμενες στη βάση γωνίες του ίσες, οπότε θα είναι:



Σχήμα 2

$$\mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\frac{180^{\circ}-45^{\circ}}{2}=\frac{135^{\circ}}{2}=67,5^{\circ} \text{ μοίρες.}$$

Επίσης, επειδή οι γωνίες $\Delta\hat{\mathrm{K}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\Gamma$ είναι κατά κορυφή, έχουμε

$$\Delta\hat{\mathrm{K}}\mathrm{E}=\mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=67,5^{\circ} \text{ μοίρες.}$$

Η γωνία $\mathrm{K}\hat{\Delta}\mathrm{E}$ είναι μία από τις ίσες γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΔΚΕ (έχει $\mathrm{K}\Delta=\mathrm{KE}=\alpha$), οπότε

$$\mathrm{K}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\frac{180^{\circ}-67,5^{\circ}}{2}=\frac{112,5^{\circ}}{2}=56,25^{\circ} \text{ μοίρες}$$

(β) Έστω ΓΖ το ύψος του τριγώνου ΟΓΕ από την κορυφή Γ. Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΖ έχουμε

$$\Gamma\mathrm{Z}=\alpha\cdot\eta\mu 45^{\circ}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2},$$

οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ είναι

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{O}\Gamma\Delta\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\alpha\cdot\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=\frac{\alpha^{2}\sqrt{2}}{2}.$$

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος και οι φίλοι του ήταν συνολικά x, .όπου $x\geq 4$, από την υπόθεση. Τότε ο καθένας τους αρχικά πήρε $\frac{450}{x}$ καραμέλες. Ο τρεις φίλοι επέστρεψαν στο Γιώργο συνολικά

$$3\cdot\frac{20}{100}\cdot\frac{450}{x}=\frac{270}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Ο Γιώργος πήρε συνολικά

$$\frac{450}{x}+\frac{270}{x}=\frac{720}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος , πρέπει:

$$\frac{720}{x}>120\Leftrightarrow 120x<720\Leftrightarrow x<6.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές για το x είναι $x=4$ ή $x=5$. Όμως η τιμή $x=4$ απορρίπτεται, γιατί η διαίρεση $450:4$ δεν δίνει ακέραιο πηλίκο. Άρα είναι $x=5$ και ο Γιώργος πήρε συνολικά $\frac{720}{5}=144$ καραμέλες.

Πρόβλημα 4

Δίνονται οι αριθμοί

$$\mathrm{A} = \overline{3a5b} = 3\cdot 10^3 + a\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + b \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \overline{5c3d} = 5\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + d\,.$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d , ισχύει ότι: $\frac{\mathrm{A}}{36} < \frac{\mathrm{B}}{45}$

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{\mathrm{A}}{36}, \frac{\mathrm{B}}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να

βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a,b,c,d .

Λύση

(α) Ισχύει ότι $\frac{\mathrm{A}}{36} = \frac{\overline{3a5b}}{36} < \frac{3959}{36} < \frac{3960}{36} = 110$. Επίσης η μικρότερη τιμή του $\overline{5c3d}$ λαμβάνεται όταν $c = d = 0$, άρα

$$\frac{\mathrm{B}}{45} = \frac{\overline{5c3d}}{45} > \frac{5030}{45} > 111\,.$$

Επομένως, για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d ισχύει ότι:

$$\frac{\mathrm{A}}{36} = \frac{\overline{3a5b}}{36} < 110 < 111 < \frac{\overline{5c3d}}{45} = \frac{\mathrm{B}}{45}.$$

(β) Από το πρώτο ερώτημα ξέρουμε ότι πάντα υπάρχουν δύο ακέραιοι ανάμεσά τους, το 110 και το 111, αφού δείξαμε ότι $\frac{\mathrm{A}}{36} < 110 < 111 < \frac{\mathrm{B}}{45}$.

Για να είναι μόνο αυτοί οι ακέραιοι ανάμεσά τους, θα πρέπει

$$109 \le \frac{\overline{3a5b}}{36} < 110 < 111 < \frac{\overline{5c3d}}{45} \le 112\,.$$

Από την ανισότητα αριστερά παίρνουμε ότι $\overline{3a5b} > 109\cdot 36 \Leftrightarrow \overline{3a5b} > 3924$, οπότε πρέπει $a = 9$ και ο b μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το 0 μέχρι το 9.

Από την ανισότητα δεξιά παίρνουμε

$$\frac{\overline{5c3d}}{45} \le 112 \Leftrightarrow \overline{5c3d} < 112\cdot 45 \Leftrightarrow \overline{5c3d} < 5040\,,$$

οπότε $c = 0$ και το d μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από 0 μέχρι 9.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018\\&=\left(\left(-\frac{10}{2}\right)^{2\nu+1}+\left(+\frac{15}{3}\right)^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+\left(-\frac{8}{2}\right)^{2\nu}-\left(-\frac{4}{1}\right)^{2\nu}+2018\\&=\left((-5)^{2\nu+1}+(+5)^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+(-4)^{2\nu}-(-4)^{2\nu}+2018\\&=\left(-5^{2\nu+1}+5^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+2018=-5^{2\nu-1}\left(5^2-1\right)2017^2+2018\\&=-24\cdot5^{2\nu-1}\cdot2017^2+2018=-24\cdot5^{2\nu-1}\cdot4068289+2018.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

Λύση

Ονομάζουμε A,B το εμβαδό μιας άσπρης πλάκας και μιας μαύρης πλάκας, αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι χρησιμοποιούμε x λευκές πλάκες. Τότε αφού οι μαύρες είναι τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού των πλακών, χρησιμοποιούμε $2x$ από τις μαύρες πλάκες.

Επιπλέον, αφού το εμβαδό των μαύρων πλακών είναι 80τ.μ, θα έχουμε ότι $(2x)\cdot\mathrm{B}=80$. Όμως, από τα δεδομένα έχουμε ότι $\mathrm{A}=9\mathrm{B}$. Επομένως το συνολικό εμβαδό που καλύπτουν οι άσπρες πλάκες είναι $x\mathrm{A}=x(9\mathrm{B})=9x\mathrm{B}=9\cdot40=360$. Επομένως το συνολικό εμβαδό της αυλής είναι $360+80=440$ τ.μ.

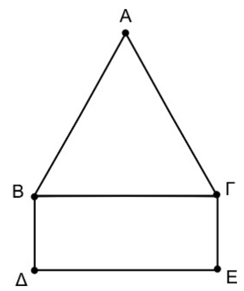
Πρόβλημα 3
Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος να διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Λύση
Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό Α μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 6 όσες φορές θέλουμε, έστω $\kappa \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $\kappa = 0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 6 όπως απαιτεί η εκφώνηση.
Ο θετικός ακέραιος που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής

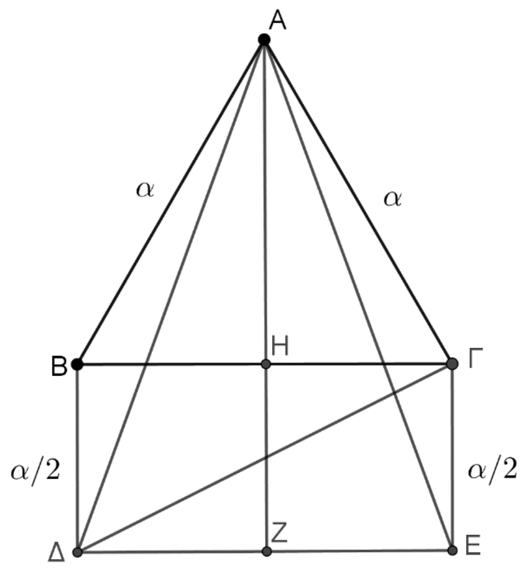
πολ.6+4 = πολ.3+3+1 =πολ.3+1,

οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επομένως τέσσερις από τους αριθμούς 2,3,…., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του Α.
Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό Α που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,4,7,8.
Για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4, οπότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού πρέπει να είναι 64. Ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 2 και το 8, αλλά δεν διαιρείται με το 7. Επειδή ο 664 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον τετραψήφιο αριθμό 6664 ο οποίος διαιρείται με τους 2, 4 , 8 και 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος αριθμός.

Πρόβλημα 4
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Το σχήμα ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρά $\text{Β}\Delta = \frac{\alpha}{2}$.
(α) Να αποδείξετε ότι $\text{Α}\Delta = \text{ΑΕ}$.
(β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ.



Λύση
(α) **(1ος τρόπος)** Έστω ότι η κάθετη από την κορυφή Α προς την πλευρά ΒΓ την τέμνει στο Η και έστω επίσης τέμνει την πλευρά ΔΕ του ορθογωνίου στο Ζ. Τότε η ΑΗ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ, οπότε ΒΗ = ΗΓ. Επειδή η ΑΖ είναι κάθετη προς την πλευρά ΒΓ θα είναι κάθετη και στην παράλληλή της ΔΕ. Επομένως και τα τετράπλευρα ΒΔΖΗ, ΗΖΕΓ είναι ορθογώνια, οπότε ΒΗ = ΔΖ και ΗΓ = ΖΕ. Επομένως θα είναι και ΔΖ = ΖΕ. Έτσι η ΑΖ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΔΕ, οπότε ΑΔ = ΑΕ.



Σχήμα 2

(2^{ος} τρόπος) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν ίσες πλευρές $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}=\alpha$ και $\mathrm{B\Delta}=\mathrm{\Gamma E}=\dfrac{\alpha}{2}$, ενώ οι περιεχόμενες γωνίες σε αυτές τις πλευρές είναι επίσης ίσες, αφού

$$\mathrm{A\hat{B}\Delta}=\mathrm{A\hat{B}\Gamma}+\mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta}=60^\circ+90^\circ=\mathrm{A\hat{\Gamma}B}+\mathrm{B\hat{\Gamma}E}=\mathrm{A\hat{\Gamma}E}.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$.

(β) Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$(\mathrm{AB\Delta})=(\mathrm{ABH})+(\mathrm{B\Delta ZH})-(\mathrm{A\Delta Z}),$$

όπου

$$(\mathrm{ABH})=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8},\ (\mathrm{B\Delta ZH})=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha^2}{4},$$

$$(\mathrm{A\Delta Z})=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha+\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha^2\left(\sqrt{3}+1\right)}{8}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}+\frac{\alpha^2}{8}.$$

Άρα είναι

$$(\mathrm{AB\Delta})=(\mathrm{ABH})+(\mathrm{B\Delta ZH})-(\mathrm{A\Delta Z})=\frac{\alpha^2}{8}.$$

Έχουμε επίσης $(\mathrm{A\Delta\Gamma})=(\mathrm{AB\Gamma})+(\mathrm{B\Delta\Gamma})-(\mathrm{AB\Delta})$. Όμως είναι

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4},(\mathrm{B\Delta\Gamma})=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha^2}{4},(\mathrm{AB\Delta})=\frac{\alpha^2}{8},$$

οπότε

$$(\mathrm{A\Delta\Gamma})=(\mathrm{AB\Gamma})+(\mathrm{B\Delta\Gamma})-(\mathrm{AB\Delta})=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}+\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\alpha^2}{8}=\frac{\alpha^2\left(2\sqrt{3}+1\right)}{8}.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^{2}+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^{2}+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200\\&=\left(\left(\frac{-20}{4}\right)^{11}+\left(\frac{-25}{-5}\right)^{11}\right)\cdot(-2018)^{2}+\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^{20}-\left(\frac{4}{1}\right)^{20}\right)+200\\&=\left((-5)^{11}+(+5)^{11}\right)\cdot(-2018)^{2}+\left((-4)^{20}-4^{20}\right)+200\\&=\left(-5^{11}+5^{11}\right)\cdot(-2018)^{2}+\left(4^{20}-4^{20}\right)+200=0\cdot(-2018)^{2}+0+200=200.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

Σημείωση: *Ο μέσος όρος ν αριθμών* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ *είναι ο αριθμός* $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}$.

Λύση

Ονομάζουμε Α το βάρος σε γραμμάρια του πρώτου μήλου, Β του δεύτερου, Γ του τρίτου και Δ του τέταρτου. Τότε είναι Α = 120 γραμμάρια και

$$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}=115\Leftrightarrow \mathrm{A}+\mathrm{B}=230\Leftrightarrow 120+\mathrm{B}=230\Leftrightarrow \mathrm{B}=230-120=110\,.$$

Άρα το δεύτερο μήλο ήταν 110 γραμμάρια.

Μετά τη ζύγιση του τρίτου μήλου είχαμε ότι:

$$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma}{3}=115-10\Leftrightarrow\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma}{3}=105\Leftrightarrow \mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=315\Leftrightarrow\Gamma=330-(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$
$$\Leftrightarrow\Gamma=315-(120+110)\Leftrightarrow\Gamma=315-230=85.$$

Άρα το τρίτο μήλο ήταν 85 γραμμάρια.

Μετά τη ζύγιση του τέταρτου μήλου είχαμε ότι:

$$\frac{A+B+\Gamma+\Delta}{4}=105-10 \Leftrightarrow \frac{A+B+\Gamma+\Delta}{4}=95 \Leftrightarrow A+B+\Gamma+\Delta=380$$

$$\Leftrightarrow \Delta=380-(A+B+\Gamma) \Leftrightarrow \Delta=380-(120+110+85) \Leftrightarrow \Delta=380-315=65.$$

Επομένως το τέταρτο μήλο ήταν 65 γραμμάρια.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου α, για τις οποίες η εξίσωση $\frac{x-1}{x-2}=\frac{x-\alpha}{x-6}$ έχει ακέραιες λύσεις.

Λύση

Πρέπει $x \neq 2$ *και* $x \neq 6$. Με απαλοιφή των παρονομαστών παίρνουμε ότι:

$$(x-1)(x-6)=(x-2)(x-\alpha) \Leftrightarrow x^2-7x+6=x^2-(2+\alpha)x+2\alpha \Leftrightarrow (\alpha-5)x=2\alpha-6$$

Επομένως για $\alpha \neq 5$ έχουμε

$$x=\frac{2\alpha-6}{\alpha-5}=\frac{2(\alpha-5)+4}{\alpha-5}=2+\frac{4}{\alpha-5}.$$

Για να είναι ακέραιος ο αριθμός αυτός, θα πρέπει ο παρονομαστής $(\alpha-5)$ να είναι διαιρέτης του 4, οπότε $\alpha-5 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Επομένως $\alpha \in \{1,3,4,6,7,9\}$.

Για τις παραπάνω τιμές προκύπτουν οι λύσεις $x=1,\ 0, -2,\ 6,\ 4,\ 3,$ από τις οποίες η $x=6$ πρέπει να εξαιρεθεί λόγω των περιορισμών. Επομένως οι ζητούμενες τιμές του α είναι: 1, 3, 4, 7, 9.

Πρόβλημα 4

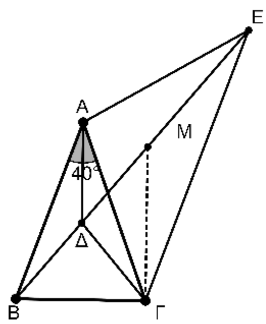
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) με $\widehat{A}=40°$ και για το σημείο Δ ισχύει ότι: ΔΑ = ΔΒ = ΔΓ.
Αν η ΓΜ είναι παράλληλη στην ΑΔ και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΕ), να αποδείξετε ότι:

(α) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.

(β) $\Gamma\widehat{A}E=100°$.

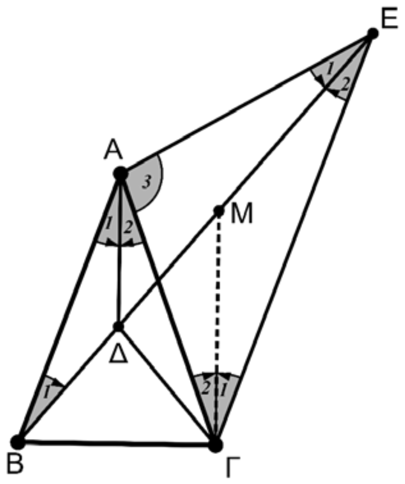
(γ) η ΑΜ είναι κάθετη στην ΓΕ.

Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*



Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές (ΔΒ=ΔΓ), το σημείο Δ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Η κορυφή Α ανήκει επίσης στη μεσοκάθετη της ΒΓ (διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές). Άρα η ΑΔ είναι η μεσοκάθετη της ΒΓ και κατά συνέπεια θα είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές (ΔΑ=ΔΒ) και $\widehat{A}_1 = 20°$, θα ισχύει $\widehat{B}_1 = 20°$. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 20°$ και από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{B}_1 + \widehat{E}_1 = 180° \Leftrightarrow 20° + 20° + \widehat{A}_3 + 20° + 20° = 180°.$$

Άρα είναι: $\widehat{A}_3 = 100°$.

(γ) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές (ΑΕ = ΑΓ) με $\Gamma\widehat{A}E = \widehat{A}_3 = 100°$, οπότε:

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2 = 40°.$$

Ισχύει όμως $\widehat{\Gamma}_2 + \widehat{A}_2 = 20°$ (διότι $\widehat{\Gamma}_2, \widehat{A}_2$ εντός εναλλάξ ΑΔ||ΓΜ και ΑΓ τέμνουσα). Στο ερώτημα **(β)** είδαμε ότι $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 20°$. Άρα $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{E}_2 = 20°$, οπότε το τρίγωνο ΓΜΕ είναι ισοσκελές με ΜΓ = ΜΕ. Επομένως, το Μ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης ΓΕ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΕ, όπως και το Α, οπότε θα είναι ΑΜ⊥ΓΕ.