Πρόβλημα 1

Έστω k ένας ακέραιος και x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$\mathrm{A}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1} \text{ και } \mathrm{B}=\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Θεωρούμε τη διαφορά των δύο αριθμών και έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1}-\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}=\frac{\left(x^k+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)-\left(x^{k+1}+1\right)^2}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}$$

$$=\frac{x^{k+2}+x^k+1-2x^{k+1}-1}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}=\frac{x^{k+2}+x^k-2x^{k+1}}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}=\frac{x^k\left(x-1\right)^2}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)},$$

οπότε, αφού $x>0$ και k ακέραιος, έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\left\{\begin{array}{l} 0, \quad \text{αν } x=1 \\ >0, \text{ αν } 0<x\neq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}=\mathrm{B}, \quad \text{αν } x=1 \\ \mathrm{A}>\mathrm{B}, \text{αν } 0<x\neq 1 \end{array}\right\}.$$

2ος τρόπος

Έχουμε ότι

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{(x^k+1)(x^{k+2}+1)}{(x^{k+1}+1)^2}=\frac{x^{2k+2}+x^k+x^{k+2}+1}{(x^{k+1}+1)^2}$$

$$=1+\frac{x^{k+2}+x^k-2x^{k+1}}{(x^{k+1}+1)^2}=1+\frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1}+1)^2}\geq 1.$$

Η ισότητα στην τελευταία ισχύει, αν, και μόνο αν, $x=1$.

Επομένως έχουμε ότι:

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}, \text{ αν } x=1 \text{ και } \mathrm{A}>\mathrm{B}, \text{ αν } 0<x\neq 1.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 + 2|x-y| = 5$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 = 5 - 2|x-y| \qquad (1)$$

Η παράσταση του πρώτου μέλους γράφεται:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 = 2\left(x^2 - 5xy + \frac{25y^2}{4}\right) + 13y^2 - \frac{25y^2}{2} = 2\left(x - \frac{5y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} \geq 0,$$

όπου η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν: $x - \frac{5y}{2} = y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Επομένως για το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1) πρέπει να ισχύει:

$$5 - 2|x-y| \geq 0 \Leftrightarrow |x-y| \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow |x-y| \in \{0,1,2\},$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

1. $|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$2x^2 - 10x^2 + 13x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1,$$

οπότε προκύπτουν οι λύσεις: $(x, y) = (-1, -1)$ ή $(x, y) = (1, 1)$.

2. $|x-y| = 1 \Leftrightarrow x - y = 1$ ή $x - y = -1 \Leftrightarrow x = y+1$ ή $x = y-1$.

Για $x = y \pm 1$ η εξίσωση γίνεται: $2(y \pm 1)^2 - 10(y \pm 1)y + 13y^2 = 3$

$\Leftrightarrow 5y^2 \mp 6y - 1 = 0$, η οποία δεν έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 56$

3. $|x-y| = 2 \Leftrightarrow x - y = 2$ ή $x - y = -2 \Leftrightarrow x = y+2$ ή $x = y-2$.

Για $x = y+2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y+2)^2 - 10(y+2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \frac{12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = \frac{7}{5}$.

Άρα προκύπτει η λύση $(x, y) = (3, 1)$

Για $x = y-2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y-2)^2 - 10(y-2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 + 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \frac{-12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = -1$ ή $y = -\frac{7}{5}$.

Άρα προκύπτει η λύση $(x, y) = (-3, -1)$.

Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις: $(-1,-1), (1,1), (3,1), (-3,-1)$.

Πρόβλημα 3

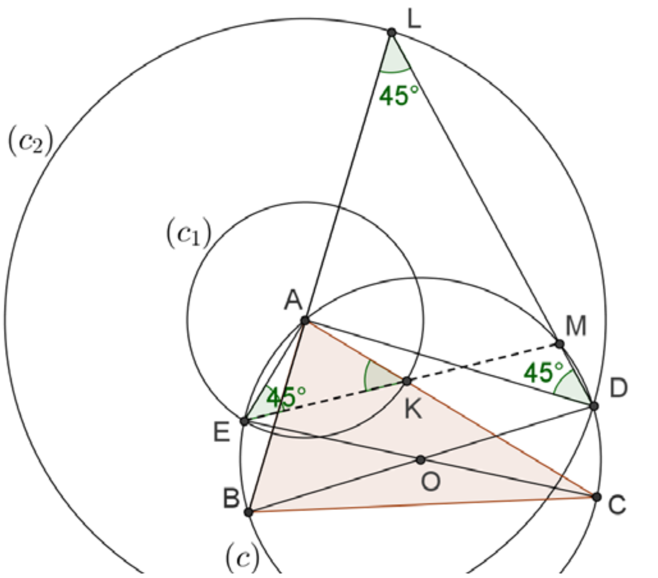
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) (με κέντρο O και ακτίνα R) και έστω D, E τα αντιδιαμετρικά σημεία των B, C, αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο (c)). Ο κύκλος (c_1) (με κέντρο A και ακτίνα AE), τέμνει την AC στο σημείο K. Ο κύκλος (c_2) (με κέντρο A και ακτίνα AD), τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του A) στο σημείο L. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες EK και DL τέμνονται πάνω στο κύκλο (c).

Λύση

Έστω M το σημείο τομής της DL με τον κύκλο (c) θα αποδείξουμε ότι τα σημεία E, K, M βρίσκονται επάνω στον ίδια ευθεία.

Η γωνία $E\hat{A}C$ είναι ορθή, διότι βαίνει στη διάμετρο EC του κύκλου (c). Το τρίγωνο AEK είναι ισοσκελές (διότι AE, AK είναι ακτίνες του κύκλου (c_1)). Άρα:

$$A\hat{E}K = A\hat{K}E = 45^\circ. \qquad (1)$$



Σχήμα 5

Η γωνία $B\hat{A}D$ είναι ορθή, γιατί βαίνει στη διάμετρο BD του κύκλου (c), οπότε και η γωνία $D\hat{A}L$ είναι ορθή. Το τρίγωνο ADL είναι ισοσκελές (διότι AD, AL είναι ακτίνες του κύκλου (c_2)). Άρα έχουμε

$$A\hat{D}L = A\hat{L}D = 45^\circ. \qquad (2)$$

Οι γωνίες $A\hat{D}M = A\hat{D}L$ και $A\hat{E}M$ είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{AM}$, δηλαδή

$$A\hat{E}M = A\hat{D}L \qquad (3)$$

Άρα από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα $A\hat{E}K = A\hat{E}M = 45^\circ$, οπότε τα σημεία E, K, M είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 4

Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

Λύση

Για το άθροισμα των βαθμών όλων των μαθητών έχουμε τη σχέση

$$\Sigma_x \geq 8 \cdot 100 + (x-8) \cdot 70 \Leftrightarrow \Sigma_x \geq 70x + 240, \qquad (1)$$

οπότε για το μέσο όρο των βαθμών έχουμε:

$$\text{M.O.} = \frac{\Sigma_x}{x} \geq \frac{70x+240}{x} = 70 + \frac{240}{x}. \qquad (2)$$

Έχοντας υπόψη ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών είναι 78, αν υποθέσουμε ότι ισχύει $x < 30$, τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε:

$$\text{M.O.} = \frac{\Sigma_x}{x} \geq 70 + \frac{240}{x} > 70 + \frac{240}{30} = 78, \qquad (3)$$

που είναι αντίθετο προς την υπόθεση ότι ο μέσος όρος των βαθμών είναι 78.

Επομένως δεν είναι δυνατόν να ισχύει ότι $x < 30,$ οπότε πρέπει να είναι $x \geq 30$.

Παρατηρούμε ότι για $x = 30$, έχουμε την περίπτωση

$$\text{M.O.} = \frac{\Sigma_{30}}{30} = \frac{8 \cdot 100 + (30-8) \cdot 70}{30} = \frac{30 \cdot 70 + 8 \cdot 30}{30} = 70 + 8 = 78,$$

οπότε η **ελάχιστη δυνατή τιμή** του x είναι 30.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x^2+2y^2=4$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\sqrt{\mathrm{x}^2+5\mathrm{x}^2+2\mathrm{y}^2}+\sqrt{\mathrm{x}^4+32\mathrm{y}^2}$ είναι σταθερή, ανεξάρτητη των x, y.

Λύση

Έχουμε ότι $x^4+5x^2+2y^2=x^4+5x^2+4-x^2=x^4+4x^2+4=(x^2+2)^2$, οπότε

$$\sqrt{x^4+5x^2+2y^2}=x^2+2.$$

Επιπλέον $x^4+32y^2=\left(4-2y^2\right)^2+32y^2=16+16y^2+4y^4=4\left(y^2+2\right)^2$, οπότε

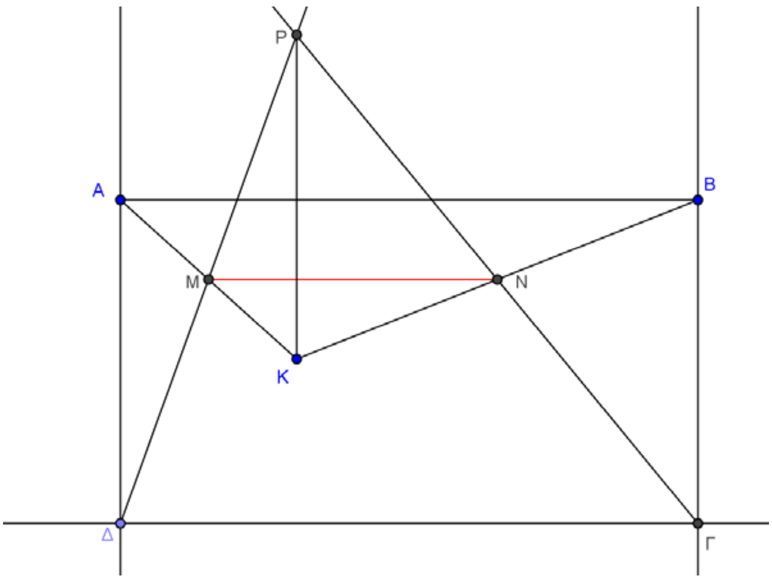
$$\sqrt{x^4+32y^2}=2(y^2+2).$$

Συνεπώς $\mathrm{A}=x^2+2+2(y^2+2)=x^2+2y^2+6=4+6=10$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ και σημείο K στο εσωτερικό του. Θεωρούμε τα μέσα $\mathrm{M,N}$ των $\mathrm{AK,BK}$ αντίστοιχα και έστω ότι οι ευθείες $\Gamma\mathrm{N},\Delta\mathrm{M}$ τέμνονται στο σημείο P. Να αποδείξετε ότι η ευθεία PK είναι κάθετη στην ευθεία $\Gamma\Delta$.

Λύση



Σχήμα 4

Στο τρίγωνο AKB το τμήμα MN συνδέει τα μέσα των πλευρών του, άρα $\mathrm{MN}//\mathrm{AB}$ και $\mathrm{MN}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}$. Όμως το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οπότε $\mathrm{AB}=\Gamma\Delta$, επομένως $\mathrm{MN}=\dfrac{\Gamma\Delta}{2}$ και επιπλέον $\mathrm{AB}//\Gamma\Delta$ οπότε και $\mathrm{MN}//\Gamma\Delta$. Από την τελευταία παραλληλία έπεται ότι τα τρίγωνα $\mathrm{PMN},\mathrm{P}\Delta\Gamma$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{\Gamma\Delta}{MN}=2$, οπότε θα είναι και $\frac{P\Delta}{PM}=2$ οπότε το M είναι το μέσον του $P\Delta$. Άρα στο τετράπλευρο $PA\Delta K$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως, $PK \,//\, A\Delta$, οπότε, αφού $A\Delta \perp \Gamma\Delta$, έπεται ότι η ευθεία PK είναι κάθετη στην ευθεία $\Gamma\Delta$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ότι ο αριθμός a είναι θετικός ακέραιος.

(α) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\frac{5a}{2}, \frac{a+2}{5}, a.$

(β) Να βρείτε το υποσύνολο Α των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις:

$$\frac{3x-a}{2}-\frac{x}{2}\leq\frac{2x+a}{3},\quad 2(3x-a)+x>2(x+1)-a,\quad a-x\leq 2(x-a)$$

καθώς και το πλήθος των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο Α.

Λύση

(α) Αφού $a>0$, έχουμε: $\frac{5a}{2}-a=\frac{3a}{2}>0 \Leftrightarrow \frac{5a}{2}>a.$ Επίσης, έχουμε

$a>\frac{a+2}{5}\Leftrightarrow 5a>a+2\Leftrightarrow 4a>2\Leftrightarrow a>\frac{1}{2},$ που ισχύει αφού ο a είναι θετικός ακέραιος Άρα $a>\frac{a+2}{5}$.

Επομένως έχουμε τη διάταξη: $\frac{a+2}{5}<a<\frac{5a}{2}$.

(β) Λύνουμε καθεμία από τις δεδομένες ανισώσεις. Έχουμε:

- $\frac{3x-a}{2}-\frac{x}{2}\leq\frac{2x+a}{3}\Leftrightarrow 9x-3a-3x\leq 4x+2a\Leftrightarrow 2x\leq 5a\Leftrightarrow x\leq\frac{5a}{2}$.
- $2(3x-a)+x>2(x+1)-a\Leftrightarrow 6x-2a+x>2x+2-a\Leftrightarrow 5x>a+2\Leftrightarrow x>\frac{a+2}{5}$.
- $a-x\leq 2(x-a)\Leftrightarrow a-x\leq 2x-2a\Leftrightarrow 3a\leq 3x\Leftrightarrow x\geq a$.

Επειδή ισχύει ότι $\frac{a+2}{5}<a<\frac{5a}{2}$, το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις είναι: $A=\left\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq\frac{5a}{2},\ a\in\mathbb{Z}_+^*\right\}=\left[a,\frac{5a}{2}\right],\ a\in\mathbb{Z}_+^*..$

Για την εύρεση των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο Α θα προσδιορίσουμε τον ελάχιστο και μέγιστο ακέραιο του συνόλου Α. Αν αυτοί είναι m και Μ, αντίστοιχα, τότε ο αριθμός των ακεραίων που περιέχονται στο σύνολο Α είναι: $(M-m)+1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $a=2k, k\in\mathbb{N}^*$. Τότε $A=[2k,5k]$, οπότε περιέχει $3k+1=\frac{3a}{2}+1$ ακέραιους.
- $a=2k+1, k\in\mathbb{N}$. Τότε $A=\left[2k+1,5k+\frac{5}{2}\right]=\left[2k+1,5k+2+\frac{1}{2}\right]$, οπότε περιέχει $3k+1+1=\frac{3(a-1)}{2}+2=\frac{3a}{2}+\frac{1}{2}$ ακέραιους.

Πρόβλημα 4

Να λυθεί το σύστημα Σ στο σύνολο των μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών:

$$\Sigma : \begin{cases} \alpha\sqrt[3]{b} - c = \alpha \\ b\sqrt[3]{c} - \alpha = b \\ c\sqrt[3]{\alpha} - b = c \end{cases}$$

Λύση

Αν κάποιος από τους a, b, c είναι ίσος με 0, τότε από τις εξισώσεις βγαίνει ότι και οι άλλοι δύο πρέπει να είναι ίσοι με 0, οπότε $a = b = c = 0$ είναι μία λύση. Υποθέτουμε τώρα ότι $a, b, c > 0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο c είναι μεγαλύτερος ή ίσος των a, b. Τότε από την πρώτη σχέση έχουμε $\alpha\sqrt[3]{b} = \alpha + c \geq 2\alpha$, οπότε $\sqrt[3]{b} \geq 2$, δηλαδή $b \geq 8$ (1).

Οπότε θα είναι $c \geq 8$ (αφού είναι μεγαλύτερος ή ίσος του b). Οπότε από τη δεύτερη σχέση παίρνουμε $b = b\sqrt[3]{c} - a \geq 2b - a$, οπότε $a \geq b$ και από την (1) έχουμε $a \geq 8$. Η τελευταία τώρα δίνει $c = c\sqrt[3]{a} - b \geq 2c - b$, οπότε $b \geq c$.

Επομένως, τελικά έχουμε $b \geq c \geq a \geq b$, δηλαδή $a = b = c$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε $a\sqrt[3]{a} = 2a$ και αφού $a > 0$, έχουμε ότι $a = 8$, οπότε $a = b = c = 8$ είναι λύση.

Τελικά οι δύο λύσεις είναι $(a, b, c) \in \{(0,0,0), (8,8,8)\}$.

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού α για την οποία ο ακέραιος

$$A=\left(\alpha^2+18\right)^2-(8\alpha+1)^2$$

είναι πρώτος.

Λύση

Έχουμε

$$A=\left(\alpha^2+18\right)^2-(8\alpha+1)^2=\left(\alpha^2+18+8\alpha+1\right)\left(\alpha^2+18-8\alpha-1\right)$$

$$=\left(\alpha^2+8\alpha+19\right)\left(\alpha^2-8\alpha+17\right)=\left[(\alpha+4)^2+3\right]\left[(\alpha-4)^2+1\right].$$

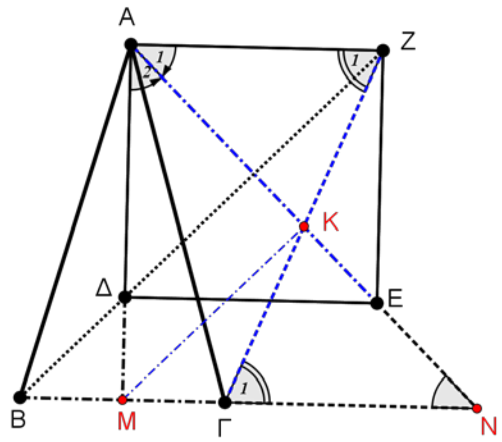
Επειδή $(\alpha+4)^2+3\geq 3$, ο ακέραιος A θα είναι πρώτος, μόνον όταν

$$(\alpha-4)^2+1=1\Leftrightarrow\alpha=4$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημείο Δ στη διάμεσό του ΑΜ τέτοιο, ώστε ΜΒ = ΜΓ = ΜΔ. Με βάση την ΑΔ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΔΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΖ, να αποδείξετε ότι η ΜΚ είναι παράλληλη στην ΔΖ.

Λύση



Σχήμα 3

Προεκτείνουμε τις ΑΕ , ΒΓ και έστω Ν το σημείο τομής τους.

Από την ισότητα των γωνιών $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{N} = 45^\circ$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές.

Επομένως MA=MN⇔MΔ+ΔA=MΓ+ΓN και με δεδομένη την ισότητα MΓ=MΔ, καταλήγουμε: AΔ=ΓN=AZ.

Θα συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα KAZ και KNΓ.

Ισχύουν οι ισότητες: α) ΓN=AZ β) $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{Z}_1$ και γ) $\widehat{A}_1 = \widehat{N}$.

Άρα τα τρίγωνα KAZ και KNΓ είναι ίσα, οπότε KZ=KΓ και KA=KN.

Επομένως, η MK είναι διάμεσος (άρα και ύψος) στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο AMN. Οπότε οι MK και ΔZ είναι παράλληλες (διότι είναι και οι δύο κάθετες στην διαγώνιο AE.

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

Λύση (1ος τρόπος)

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha} > 2\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}}. \qquad 1)$$

Πράγματι, η τελευταία είναι ισοδύναμη με

$$\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha}\right)^2 > \frac{4(\alpha+1)}{\alpha} \Leftrightarrow (2\alpha+1)^2 > 4\alpha(\alpha+1) \Leftrightarrow 4\alpha^2+4\alpha+1 > 4\alpha^2+4\alpha,$$

που ισχύει.

Αν βάλουμε τώρα στην (1) όπου α το $\alpha+1$, παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+3}{\alpha+1} > 2\sqrt{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} \qquad (2)$$

Και ομοίως παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+5}{\alpha+2} > 2\sqrt{\frac{\alpha+3}{\alpha+2}} \quad (3) \qquad \text{και} \qquad \frac{2\alpha+7}{\alpha+3} > 2\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha+3}} \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2), (3) και (4) κατά μέλη, έχουμε ότι:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\cdot\frac{\alpha+}{\alpha+3}} = 16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

που είναι το ζητούμενο.

Σημείωση.
Η ανισότητα (1) θα μπορούσε να προκύψει μέσω της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου, αφού ως εξής:

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha}=1+\frac{\alpha+1}{\alpha}>2\sqrt{1\cdot\frac{\alpha+1}{\alpha}}=2\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}},$$

αφού είναι $\frac{\alpha+1}{\alpha}\neq 1$. Ομοίως προκύπτουν και οι ανισότητες (2), (3) και (4), οπότε τελειώνουμε την άσκηση όπως παραπάνω.

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν οι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{x+\frac{1}{x}-w=2,\ \ y+\frac{1}{y}-w=2,\ \ z+\frac{1}{x}+w=2,\ \ y+\frac{1}{z}+w=2\right\}.$$

Λύση
Έστω

$$\textbf{(Σ)}\ \ \left\{x+\frac{1}{x}=w+2\ \ (1),\ y+\frac{1}{y}=w+2\ \ (2), z+\frac{1}{x}=2-w\ \ (3), y+\frac{1}{z}=2-w\ \ (4)\right\}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0\Leftrightarrow(x-y)\left(1-\frac{1}{xy}\right)=0\Leftrightarrow x=y\ \text{ ή }\ xy=1.$$

Περίπτωση 1: Έστω $x=y.$ Τότε από τις (3) και (4) έχουμε:

$$z+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{z}\Leftrightarrow(z-x)\left(1+\frac{1}{zx}\right)=0\Leftrightarrow x=z\ \text{ ή }\ xz=-1.$$

- Αν $x=z,$ τότε $x=y=z$ και από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

  $w=0$ και $x+\frac{1}{x}=2\Leftrightarrow w=0$ και $x=1$. Επομένως, σε αυτή την υποπερίπτωση έχουμε τη λύση $(x,y,z,w)=(1,1,1,0)$.
- Αν $xz=-1,$ τότε οι x, z θα είναι ετερόσημοι, οπότε ένας θα είναι αρνητικός.

Περίπτωση 2: Έστω $xy=1$. Τότε με αφαίρεση της (4) από την (3) λαμβάνουμε:

$$z-\frac{1}{z}=0\Leftrightarrow z^2-1=0\Leftrightarrow z=1,\ \text{αφού }\ z\geq 0.$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) λαμβάνουμε

$$x+\frac{2}{x}=3\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1\ \text{ ή }\ x=2.$$

- Για $x=1$, προκύπτει πάλι η λύση $(x,y,z,w)=(1,1,1,0)$.
- Για $x=2$, προκύπτει η λύση $(x,y,z,w)=\left(2,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι ρίζα και της εξίσωσης

$$x^{10} - 4x^2 - 5x - 3 = 0.$$

.

Λύση

Εφόσον ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, θα είναι $\rho \neq 0$ και ισχύει:

$$\rho^3 - \rho - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho^3 = \rho + 1 \quad (1).$$

Άρα $(\rho^3)^3 = (\rho+1)^3 \Leftrightarrow \rho^9 = \underbrace{\rho^3}_{\rho+1} + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \rho^9 = \rho + 1 + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \Leftrightarrow \rho^9 = 3\rho^2 + 4\rho + 2 \Leftrightarrow$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \rho^9 \cdot \rho = (3\rho^2 + 4\rho + 2) \cdot \rho \Leftrightarrow \rho^{10} = 3 \cdot \rho^3 + 4\rho^2 + 2\rho \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \rho^{10} = 4\rho^2 + 5\rho + 3.$

$(*)$ ισχύει $\rho \neq 0.$

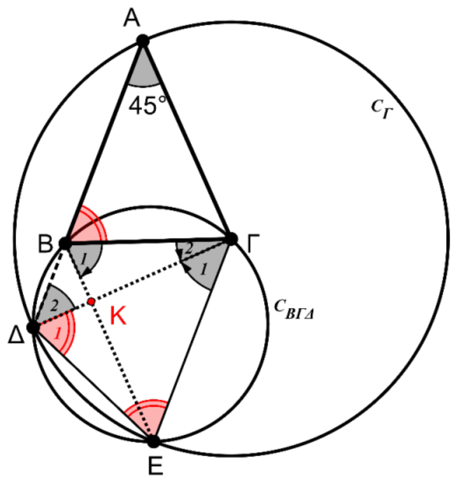
Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 45°$. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, \Gamma A)$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓA) τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ (έστω $C_{B\Gamma\Delta}$) τέμνει τον C_Γ στο σημείο E Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

Λύση

Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, διότι ΓA και $\Gamma\Delta$ είναι ακτίνες του κύκλου C_Γ. Άρα:

$$\hat{A} = \hat{\Delta}_2 = 45^\circ \qquad (1)$$



Σχήμα 4

Το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές, διότι ΓΕ και ΓΔ είναι ακτίνες του κύκλου C_Γ. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{\Delta}_1 \qquad (2)$$

Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο C_Γ. Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{B}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{E}$. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{B} = 67{,}5^\circ \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις $(1), (2), (3)$ έχουμε: $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$.
Άρα ΒΔ // ΓΕ, οπότε το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ορθογώνιο.
Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί ΒΕ=ΔΓ (διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου) και $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{E}$ (ακτίνες του C_Γ). Άρα τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα.
Άρα $\hat{\mathrm{B}}_1 = \Gamma_1 + \hat{\Gamma}_2 = 67{,}5^\circ$ και επειδή $\hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$, καταλήγουμε $\hat{\Gamma}_2 = 22{,}5^\circ$ και κατά συνέπεια $\hat{\mathrm{B}}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 67{,}5^\circ + 22{,}5^\circ = 90^\circ$.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\nu \geq 2$, ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \frac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1}$$

είναι σύνθετος.

Λύση
Ο αριθμητής του κλάσματος παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned}\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1 &= \nu^5\left(\nu^2+1\right) + \left(\left(\nu^2\right)^3 + 1\right) = \nu^5\left(\nu^2+1\right) + \left(\nu^2+1\right)\left(\nu^4 - \nu^2 + 1\right) \\ &= \left(\nu^2+1\right)\left(\nu^5 + \nu^4 - \nu^2 + 1\right) = \left(\nu^2+1\right)\left[\nu^4\left(\nu+1\right) - \left(\nu+1\right)\left(\nu-1\right)\right] \\ &= \left(\nu^2+1\right)\left(\nu+1\right)\left(\nu^4 - \nu + 1\right).\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{A} = \frac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1} = \left(\nu+1\right)\left(\nu^4 - \nu + 1\right).$$

Για $\nu \geq 2$ είναι $\nu + 1 \geq 3$ και $\nu^4 - \nu + 1 = \nu\left(\nu^3 - 1\right) + 1 \geq 2 \cdot 7 + 1 = 15$, οπότε ο ακέραιος Α είναι σύνθετος.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του μήκους της διαγωνίου του;

Λύση
Έστω x, y τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αφού η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του θα έχουμε ότι $xy = 2(x+y)$ (1). Το μήκος της διαγωνίου είναι $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Οπότε θέλουμε να βρούμε την ελάχιστη τιμή του d υπό τη συνθήκη (1).
Έχουμε ότι $d^2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \overset{(1)}{=} (x+y)^2 - 4(x+y)$.
Ισχύει ότι $(x+y)^2 \geq 4xy$ (αφού είναι ισοδύναμη με $(x-y)^2 \geq 0$) και λόγω της (1) έχουμε ότι $4xy = 8(x+y)$, άρα $(x+y)^2 \geq 8(x+y)$, οπότε $x + y \geq 8$. (2)
Θέτουμε $x + y = t$ και τότε $d^2 = t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4 \overset{(2)}{\geq} (8-2)^2 - 4 = 32$.
Επομένως η ελάχιστη τιμή του μήκους της διαγωνίου είναι $\sqrt{32}$, και επιτυγχάνεται στο τετράγωνο πλευράς 4.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α,β είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{26\alpha^3\beta^3}{\alpha^6-27\beta^6}=-1,$ να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση έχουμε ότι:

$$\alpha^6-27\beta^6=-26\alpha^3\beta^3 \Leftrightarrow \alpha^6+26\alpha^3\beta^3-27\beta^6=0. \qquad (1)$$

Για να προκύψει απλούστερη σχέση μεταξύ των α,β πρέπει να γίνει παραγοντοποίηση της παράστασης $\alpha^6+26\alpha^3\beta^3-27\beta^6$. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο προσπαθούμε να χωρίσουμε την παράσταση σε ομάδες με κατάλληλη διάσπαση ενός όρου της σε δύο. Έτσι έχουμε

$$\alpha^6+26\alpha^3\beta^3-27\beta^6=\alpha^6-\alpha^3\beta^3+27\alpha^3\beta^3-27\beta^6=\alpha^3\left(\alpha^3-\beta^3\right)+27\beta^3\left(\alpha^3-\beta^3\right)$$
$$=\left(\alpha^3+27\beta^3\right)\left(\alpha^3-\beta^3\right).$$

Επομένως έχουμε

$$\alpha^6+26\alpha^3\beta^3-27\beta^6=0 \Leftrightarrow \left(\alpha^3+27\beta^3\right)\left(\alpha^3-\beta^3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\alpha+3\beta\right)\left(\alpha^2-3\alpha\beta+9\beta^2\right)\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha+3\beta=0 \text{ ή } \alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=-3\beta \text{ ή } \alpha=\beta,$$

αφού $\alpha^2-3\alpha\beta+9\beta^2=\left(\alpha-\dfrac{3\beta}{2}\right)^2+\dfrac{45\beta^2}{4}>0$, για $\alpha\beta\neq 0$ (ισχύει από την υπόθεση)

και $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)^2+\dfrac{3\beta^2}{4}>0,$ για $\alpha\beta\neq 0$.

Αν $\alpha=-3\beta,$ τότε $\mathrm{K}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{9\beta^2-\beta^2}{9\beta^2+\beta^2}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$, ενώ, αν $\alpha=\beta,$ τότε

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\beta^2-\beta^2}{\beta^2+\beta^2}=0.$$

Στο δεύτερο τρόπο διαιρούμε την παράσταση με β^6 (αν είναι $\beta=0$, τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται 0 = 1, άτοπο), οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha^6+26\alpha^3\beta^3-27\beta^6=0 \Leftrightarrow \beta^6\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6+26\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3-27\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6+26\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3-27=0 \overset{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3=\omega}{\Longleftrightarrow} \omega^2+26\omega^2-27=0 \Leftrightarrow \omega=\frac{-26\pm\sqrt{784}}{2}=\frac{-26\pm 28}{2}$$

$$\Leftrightarrow \omega=1 \text{ ή } \omega=-27 \Leftrightarrow \alpha^3=\beta^3 \text{ ή } \alpha^3=-27\beta^3 \Leftrightarrow \alpha=\beta \text{ ή } \alpha=-3\beta$$

Επομένως έχουμε, όπως και στον πρώτο τρόπο $\mathrm{K}=\dfrac{4}{5}$ ή $\mathrm{K}=0.$

Πρόβλημα 2
Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w είναι όλοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1 και μικρότεροι ή ίσοι του 5 και επιπλέον ισχύει ότι $x+y+z+w=8$, να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=x^2+y^2+z^2+w^2.$$

Λύση
Ξεκινώντας από την υπόθεση $1\le x\le 5$, θα έχουμε ότι:

$$1\le x\le 5 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)\le 0 \Leftrightarrow x^2-6x+5\le 0 \Leftrightarrow x^2\le 6x-5,$$

όπου η ισότητα ισχύει για $x=1$ ή $x=5$.
Ομοίως, λαμβάνουμε

$$y^2\le 6y-5,\ z^2\le 6z-5,\ w^2\le 6w-5,$$

όπου οι ισότητες ισχύουν μόνον όταν οι y, z, w παίρνουν τις τιμές 1 ή 5.
Προσθέτοντας τις παραπάνω τέσσερις ανισότητες κατά μέλη, έχουμε

$$\mathrm{A}=x^2+y^2+z^2+w^2\le 6(x+y+z+w)-20=6\cdot 8-20=28.$$

Έχουμε ισότητα όταν ένας από τους αριθμούς ισούται με 5 και οι άλλοι με 1, οπότε η μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης είναι 28.

Πρόβλημα 3
Αν ο τετραψήφιος ακέραιος $\mathrm{A}=\overline{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0}=\alpha_3\cdot 10^3+\alpha_2\cdot 10^2+\alpha_1\cdot 10\ +\alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>0.$ να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9\cdot\mathrm{A}$.

Λύση
Χρησιμοποιώντας τη διαφορά $9\cdot\mathrm{A}=10\cdot\mathrm{A}-\mathrm{A}$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}9\cdot\mathrm{A}&=10\cdot\mathrm{A}-\mathrm{A}=\overline{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0 0}-\overline{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0}\\&=\left(\alpha_3\cdot 10^4+\alpha_2\cdot 10^3+\alpha_1\cdot 10^2+\alpha_0\cdot 10\right)-\left(\alpha_3\cdot 10^3+\alpha_2\cdot 10^2+\alpha_1\cdot 10\ +\alpha_0\right)\\&=\alpha_3\cdot 10^4+\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\cdot 10^3+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\cdot 10^2+\left(\alpha_0-\alpha_1\right)\cdot 10-\alpha_0\\&=\alpha_3\cdot 10^4+\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\cdot 10^3+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\cdot 10^2+\left(\alpha_0-\alpha_1-1\right)\cdot 10+(10-\alpha_0)\end{aligned}$$

οπότε, λόγω των υποθέσεων $\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>0,$ ο αριθμός $9\cdot\mathrm{A}$ έχει τα ψηφία $\alpha_3,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_2, \alpha_0-\alpha_1-1,\ 10-\alpha_0$, τα οποία έχουν άθροισμα ίσο με 9.
Σημείωση: Η αφαίρεση $10\mathrm{A}-\mathrm{A}$ μπορεί να γίνει και κατακόρυφα με το συνήθη τρόπο, αφού λάβουμε υπόψη ότι $\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>0,$ ως εξής:

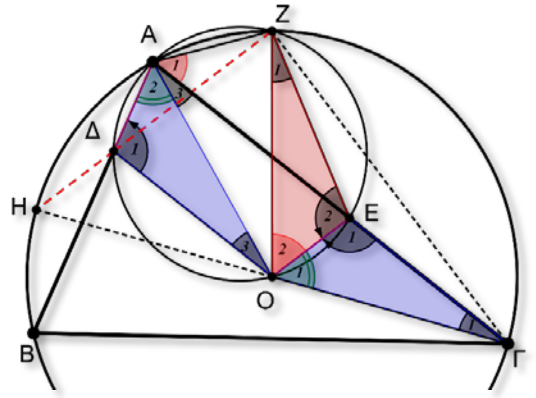
$$\begin{array}{rccccc} & & & & 1 & \\ & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0\\ - & & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0\\ \hline & \alpha_3 & \alpha_2-\alpha_3 & \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_0-\alpha_1-1 & 10-\alpha_0,\end{array}$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Πρόβλημα 4
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η παράλληλη από το Ο προς την ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος

κύκλος, έστω (c_1), του τριγώνου ΑΔΟ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε και το κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο Ζ. Έστω ότι η ΔΖ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο Η. Να αποδείξετε ότι:
(α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΓΕ είναι ίσα.
(β) Τα τρίγωνα ΟΖΕ και ΟΓΕ είναι ίσα.
(γ) Τα σημεία Γ, Ο, Η είναι συνευθειακά.

Λύση
(α) Επειδή $ΟΔ \parallel ΑΕ$ το τετράπλευρο ΑΔΟΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε ΑΔ = ΟΕ.
Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΓΕ έχουν:
(1) ΑΔ=ΟΕ (από το ισοσκελές τραπέζιο ΑΔΟΕ).
(2) ΟΑ=ΟΓ (ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ).
(3) Το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές (ΟΑ=ΟΓ) οπότε: $\hat{Γ}_1 = \hat{Α}_3$. Η γωνία $\hat{Ε}_1$ είναι εξωτερική στο τετράπλευρο ΑΔΟΕ, οπότε: $\hat{Ε}_1 = \hat{Δ}_1$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών, καταλήγουμε και στην ισότητα: $\hat{Ο}_1 = \hat{Α}_2$



Σχήμα 4

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα των τριγώνων ΟΑΔ και ΟΓΕ.

(β) Τα τρίγωνα ΟΓΕ και ΟΖΕ έχουν:

(i) ΟΖ = ΟΓ (ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ),
(ii) η ΟΕ είναι κοινή πλευρά.
(iii) Ισχύουν η ισότητα γωνιών:
$\hat{Α}_1 = \hat{Ο}_2$ (είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο ΖΕ).
$\hat{Α}_1 = \dfrac{Ζ\hat{Ο}Γ}{2} = \dfrac{\hat{Ο}_1 + \hat{Ο}_2}{2}$ (η γωνία $\hat{Α}_1$ είναι εγγεγραμμένη και στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ με αντίστοιχη επίκεντρη την $Γ\hat{Ο}Ζ$), οπότε

$$\hat{Α}_1 = \hat{Ο}_2 = \frac{\hat{Ο}_1 + \hat{Ο}_2}{2} \Rightarrow \hat{Ο}_1 + \hat{Ο}_2 = 2\hat{Ο}_2 \Rightarrow \hat{Ο}_1 = \hat{Ο}_2.$$

Από τις σχέσεις (i), (ii) και (iii) προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΟΓΕ και ΟΖΕ είναι ίσα.
(γ) Τελικά, από τις προηγούμενες ισότητες τριγώνων, έχουμε ότι και τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΖΕ είναι ίσα, οπότε ΟΔ = ΕΖ. Επομένως το τετράπλευρο ΟΔΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο και $ΔΖ \parallel ΟΕ$.

Από την ισότητα των τριγώνων ΟΓΕ και ΟΖΕ προκύπτουν οι δύο παρακάτω ισότητες τμημάτων ΟΖ = ΟΓ και ΕΖ = ΕΓ, από τις οποίες προκύπτει ότι η ΟΕ είναι μεσοκάθετη της ΓΖ. Άρα και η ΔΖ θα είναι κάθετη στην ΓΖ, δηλαδή το σημείο Η είναι το αντιδιαμετρικό του σημείου Γ, οπότε τα σημεία Γ, Ο, Η είναι συνευθειακά.