Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8$

Λύση

$$\mathrm{A}=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8=\frac{13}{9}-\frac{74\cdot 3}{9\cdot 37}+\left(\frac{4}{3}\right)^{2}:8$$
$$=\frac{13}{9}-\frac{2}{3}+\frac{16}{9}:8=\frac{13}{9}-\frac{2}{3}+\frac{16:8}{9}=\frac{13}{9}-\frac{6}{9}+\frac{2}{9}=\frac{9}{9}=1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α κα Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Λύση

Έστω ότι ο έμπορος αγόρασε x ευρώ το ραδιόφωνο Α. Τότε η τιμή αγοράς του ραδιοφώνου Β ήταν $200-x$ ευρώ. Τότε το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε $x+\frac{25x}{100}=\frac{125x}{100}$ ευρώ, ενώ το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε $(200-x)\cdot\frac{150}{100}$ ευρώ. Συνολικά τα δύο ραδιόφωνα πουλήθηκαν $200\cdot\frac{140}{100}$ ευρώ, δηλαδή 280 ευρώ.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{125x}{100}+(200-x)\cdot\frac{150}{100}=200\cdot\frac{140}{100}\Leftrightarrow 12,5x-15x+3000=2800$$
$$\Leftrightarrow 2,5x=200\Leftrightarrow x=80.$$

Άρα ο έμπορος αγόρασε 80 ευρώ το ραδιόφωνο Α και $200-80=120$ ευρώ το ραδιόφωνο Β.

Πρόβλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα δεδομένα κλάσματα την ίδια διαφορά:

(Παρανομαστής) - (Αριθμητής) = 1012.

Έτσι γράφουμε:

$$\frac{1003}{2015}=1-\frac{1012}{2015}, \frac{1007}{2019}=1-\frac{1012}{2019}, \frac{1009}{2021}=1-\frac{1012}{2021}, \frac{997}{2009}=1-\frac{1012}{2009}$$

$$\frac{1011}{2023}=1-\frac{1012}{2023}, \frac{999}{2011}=1-\frac{1012}{2011}, \frac{1001}{2013}=1-\frac{1012}{2013}, \frac{1005}{2017}=1-\frac{1012}{2017}$$

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ ρητών αριθμών με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μικρότερο παρανομαστή, οπότε έχουμε:

$$\frac{1012}{2009}>\frac{1012}{2011}>\frac{1012}{2013}>\frac{1012}{2015}>\frac{1012}{2017}>\frac{1012}{2019}>\frac{1012}{2021}>\frac{1012}{2023}$$

Άρα έχουμε:

$$1-\frac{1012}{2009}<1-\frac{1012}{2011}<1-\frac{1012}{2013}<1-\frac{1012}{2015}<1-\frac{1012}{2017}<1-\frac{1012}{2019}<1-\frac{1012}{2021}<1-\frac{1012}{2023},$$

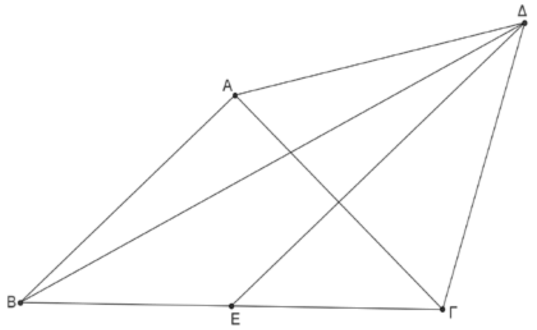
οπότε ο αριθμός $\frac{1011}{2023}$ είναι ο μεγαλύτερος από τους δεδομένους ρητούς αριθμούς, ενώ ο $\frac{997}{2009}$ είναι ο μικρότερος.

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$ και $AB=A\Gamma$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

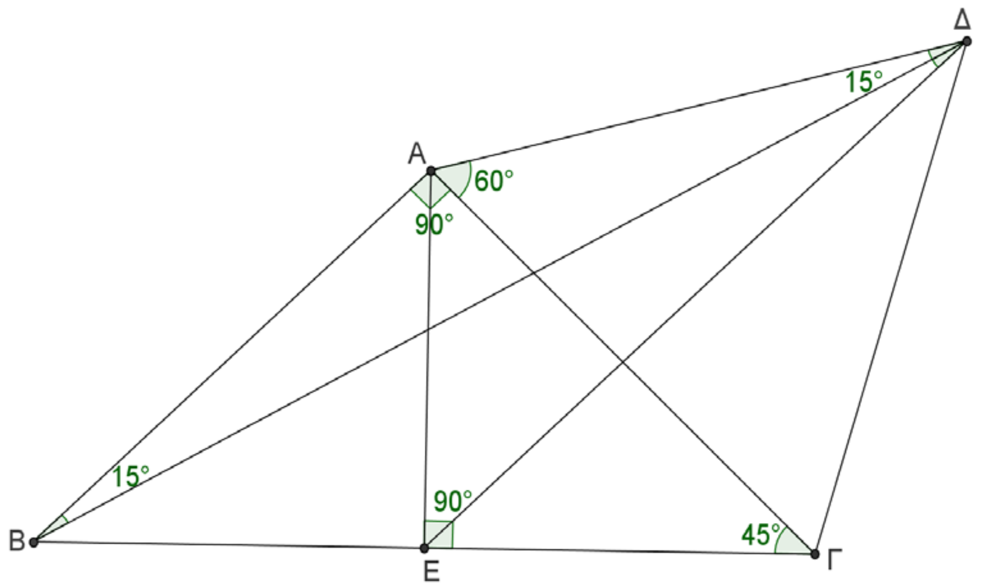
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $B\hat{\Delta}E$.



Σχήμα 1

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ και η διάμεσός του ΑΕ είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο στο Ε με μία γωνία του 45°. Επομένως θα έχει $E\hat{A}\Gamma = 180^\circ - \left(90^\circ + 45^\circ\right) = 45^\circ$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $EA = E\Gamma$.

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ότι: $\Delta A = \Delta\Gamma$. Επομένως τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τα άκρα Α και Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ, οπότε η ευθεία ΔΕ είναι η μεσοκάθετη του ΑΓ.

(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ λαμβάνουμε τις ισότητες $AB = A\Gamma = A\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^\circ$, οπότε $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}B = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$.

Επειδή ΑΒΔ ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Επειδή οι ευθείες ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία ΑΓ, που τις τέμνει η ευθεία ΒΔ, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε:

$$B\hat{\Delta}E = A\hat{B}\Delta = 15^\circ$$

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$\mathrm{A} = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11}, \quad \mathrm{B}=\left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}$$

και να τις συγκρίνετε.

Λύση

$$\mathrm{A} = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11} = 24:6+25-2\cdot 8+8:4+\frac{9}{11} = 4+25-16+2+\frac{9}{11}$$

$$=15+\frac{9}{11}=15\frac{9}{11}.$$

$$\mathrm{B}=\left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}=\left(32+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}=144:9-1+\frac{5}{7}=16-1+\frac{5}{7}$$

$$=15+\frac{5}{7}=15\frac{5}{7}.$$

Έχουμε: $\mathrm{A}-\mathrm{B}=15\frac{9}{11}-15\frac{5}{7}=15+\frac{9}{11}-15-\frac{5}{7}=\frac{9}{11}-\frac{5}{7}=\frac{63-55}{77}=\frac{8}{77}>0$,

οπότε θα είναι $\mathrm{A}>\mathrm{B}$.

Πρόβλημα 2

Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $\alpha = 6$ μέτρα και πλάτος $\beta = 4$ μέτρα Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:

(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, **(ii)** το εμβαδό του ορθογωνίου.

Λύση

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2(\alpha+\beta)=2(6+4)=20$ μέτρα και το εμβαδό του είναι $\mathrm{E}=\alpha\beta=6\cdot 4=24$ τετραγωνικά μέτρα.

Μετά την αύξηση το μήκος του ορθογωνίου θα γίνει $6+6\cdot\frac{20}{100}=6+1,2=7,2$ μέτρα,

ενώ το πλάτος του μετά τη μείωση θα γίνει $4-4\cdot\frac{5}{100}=4-0,2=3,8$ μέτρα.

Έτσι έχουμε:

(i) Η περίμετρος του ορθογωνίου μετά την μεταβολή των διαστάσεων του θα γίνει

$\Pi' = 2(7,2+3,8)=2\cdot 11=22$ μέτρα, οπότε η αύξησή της είναι

$\Pi'-\Pi=22-20=2$ μέτρα και η επί τοις εκατό αύξησή της είναι

$$\frac{\Pi'-\Pi}{\Pi}=\frac{2}{20}=\frac{10}{100}, \text{ δηλαδή } 10\%.$$

(ii) Το εμβαδό του ορθογωνίου μετά την αύξηση των διαστάσεων θα γίνει θα γίνει

$\mathrm{E}'=7,2\cdot 3,8=27,36$ τετρ.μέτρα, οπότε η μεταβολή (αύξηση) του είναι

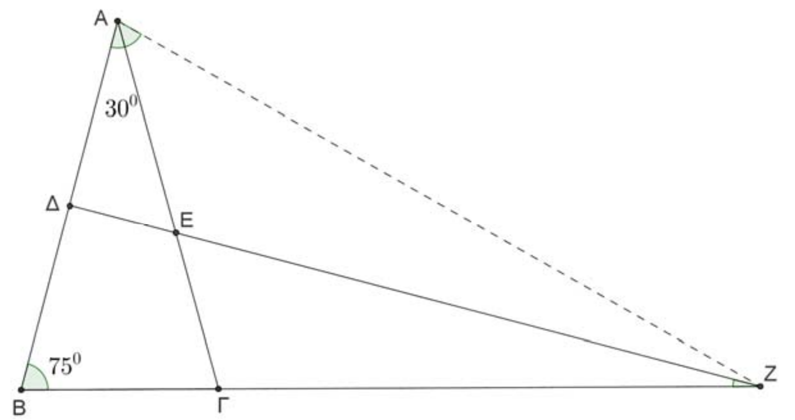
$\mathrm{E}'-\mathrm{E}=27,36-24=3,36$ τετρ. μέτρα και η επί τοις εκατό αύξηση του είναι

$$\frac{\mathrm{E}'-\mathrm{E}}{\mathrm{E}}=\frac{3,36}{24}=0,14=\frac{14}{100}, \text{ δηλαδή } 14\%.$$

Πρόβλημα 3.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\mathrm{B\hat{Z}\Delta}$ και $\mathrm{\Gamma\hat{A}Z}$.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΑΒ = ΑΓ θα έχει τις απέναντι γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\mathrm{A\hat{B}\Gamma} = \mathrm{\Gamma\hat{B}A} = \dfrac{180^\circ - \mathrm{B\hat{A}\Gamma}}{2} = \dfrac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Επειδή το Ζ είναι σημείο της μεσοκάθετης της πλευράς ΑΒ θα απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Β, δηλαδή είναι ΖΑ = ΖΒ. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές και θα έχει τις γωνίες απέναντι των ίσων πλευρών του ίσες, δηλαδή $\mathrm{B\hat{A}Z} = \mathrm{A\hat{B}Z} = \mathrm{A\hat{B}\Gamma} = 75^\circ$. Τότε θα είναι $\mathrm{A\hat{Z}B} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$.

Η μεσοκάθετη ΖΔ της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΖΒ είναι και διχοτόμος της γωνίας του $\mathrm{A\hat{Z}B}$, οπότε θα είναι $\mathrm{B\hat{Z}\Delta} = \dfrac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

Διαφορετικά, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΔ με $\mathrm{B\hat{\Delta}Z} = 90^\circ$, έχουμε:

$$\mathrm{B\hat{Z}\Delta} = 90^\circ - \hat{\mathrm{B}} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ .$$

Για τη γωνία $\mathrm{\Gamma\hat{A}Z}$ έχουμε: $\mathrm{\Gamma\hat{A}Z} = \mathrm{B\hat{A}Z} - \mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x-1, x, x+1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x+1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x-1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι $x=10, x+1=11$ είναι πολλαπλάσια των 10 και 11, αντίστοιχα. Επιπλέον ο 9 είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε η τριάδα 9,10,11 είναι μία λύση του προβλήματος.

Στη συνέχεια παρατηρώ ότι $\text{ΕΚΠ}(10,11)=110$, οπότε για να βρω το επόμενο ζευγάρι θετικών ακέραιων που έχουν την ίδια ιδιότητα με τους 10 και 11 πρέπει να προσθέσω και στους δύο το 110 ή κάποιο πολλαπλάσιο του 110 μέχρι που να προκύψει ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1000. Έτσι έχουμε τα ζευγάρια:

120	230	340	450	560	670	780	890
121	231	341	451	561	671	781	891

Επομένως αρκεί να ελέγξουμε ποιοι από τους αριθμούς 119, 229, 339, 449, 559, 669, 779, και 889 είναι πολλαπλάσια του 3. Τέτοιοι είναι οι αριθμοί 339 και 669, οπότε λαμβάνουμε και τις λύσεις 339,340,341 και 669,670,671.

Παρατήρηση. Μετά την εύρεση της πρώτης λύση 9,10,11, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι για να προκύψει μία αντίστοιχη τριάδα θα πρέπει να προσθέσουμε και στους τρεις ακέραιους ένα πολλαπλάσιο του $\text{ΕΚΠ}(3,10,11)=330$.
Έτσι εύκολα προκύπτουν και οι άλλες δύο λύσεις του προβλήματος 339,340,341 και 669,670,671.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

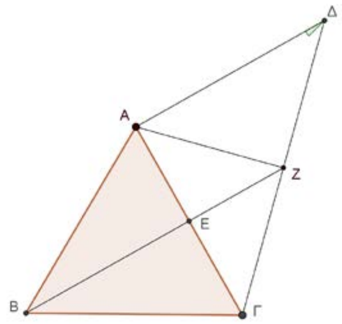
Λύση

$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}=\left(\frac{-20}{5}\right)^2+\left(\frac{15}{-5}\right)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^3-\left(\frac{9}{-3}\right)^3$$

$$=(-4)^2+(-3)^3+(-4)^3-(-3)^3=(-4)^2+(-4)^3=16-64=-48.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.

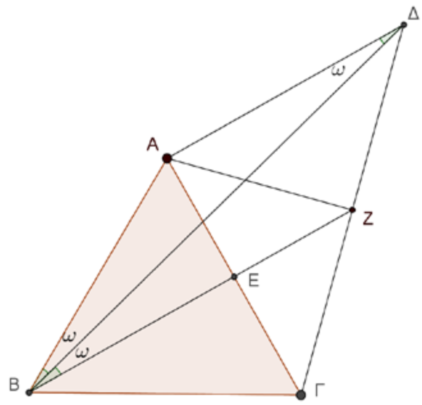


(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$.

Λύση

(α) Η διάμεσος ΒΕ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ. Επομένως το σημείου Ζ απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Γ, δηλαδή $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή είναι $A\Delta = \alpha$, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta \qquad (1)$$

Όμως έχουμε

$$B\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \qquad (2)$$

Επομένως από το τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

Εναλλακτικά, μετά τη σχέση (1) θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής: Η διάμεσος ΒΕ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ είναι και ύψος, άρα κάθετη προς την πλευρά ΑΓ, όπως είναι κάθετη και η ΑΔ, από την υπόθεση. Επομένως είναι $BE \parallel A\Delta$, οπότε

$$A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}E \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}E. \qquad (4)$$

Άρα η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}E$, οπότε θα έχουμε

$$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}E = \frac{A\hat{B}E}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

αφού η ΒΕ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, δηλαδή $A\hat{B}E = \frac{A\hat{B}\Gamma}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Επομένως, λόγω της (1) έχουμε $A\hat{\Delta}B = 15^\circ$.

Πρόβλημα 3

Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $\alpha\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $\beta\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις . Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α .

Λύση

Η τιμή πώλησης της τηλεόρασης την περίοδο των εκπτώσεων είναι

$$540 - \frac{540\alpha}{100} \text{ ευρώ.}$$

Η τιμή της τηλεόρασης μετά την περίοδο των εκπτώσεων θα γίνει

$$540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100} \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα ισχύει:

$$540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100} = 540 \Leftrightarrow \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right)\beta = 540\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{540(100-\alpha)}{100}\cdot\beta = 540\alpha \Leftrightarrow \beta = \frac{540\alpha\cdot 100}{540(100-\alpha)} \Leftrightarrow \beta = \frac{100\alpha}{100-\alpha}.$$

Πρόβλημα 4

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του , αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

Λύση

Για να διαιρείται ένας αριθμός με 4, το τελευταίο διψήφιο τμήμα πρέπει να διαιρείται με το 4 (κριτήρια διαιρετότητας Α Γυμνασίου). Οι πιθανές περιπτώσεις για το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού είναι: $88, 89, 98, 99$. Από αυτούς μόνο ο 88 διαιρείται με το 4, οπότε ο A πρέπει να λήγει σε 88. Επίσης, ξέρουμε ότι ένας ακέραιος διαιρείται με το 3, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 3.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός Α είναι διψήφιος, τότε πρέπει $A = 88$, ο οποίος δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τριψήφιος, τότε θα είναι είτε ο 888 είτε ο 988. Όμως στον 888 δεν χρησιμοποιείται το ψηφίο 9, ενώ ο 988 έχει άθροισμα ψηφίων 25 και δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τετραψήφιος είναι ένας από τους παρακάτω:

$$8888, 8988, 9888, 9988.$$

Όμως οι αριθμοί $8888, 9988$ έχουν άθροισμα ψηφίων 32 και 34 αντίστοιχα, άρα δεν διαιρούνται με το 3.

Επομένως, οι μόνοι τετραψήφιοι που ικανοποιούν τις συνθήκες είναι οι $8988, 9888$, οπότε η ελάχιστη τιμή του Α είναι 8988.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}.$$

Λύση

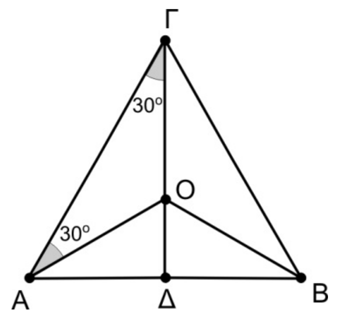
$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$$
$$=\left(\left(\frac{-10}{2}\right)^3+\left(\frac{-15}{-3}\right)^3\right)\cdot(-2)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^2-(-4)^2$$
$$=\left((-5)^3+(+5)^3\right)\cdot(-2)^3+(-4)^2-(-4)^2$$
$$=\left(-5^3+5^3\right)\cdot(-2)^3+16-16=0\cdot(-2)^3+0=0.$$

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΑΒ. Αν η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση ΑΒ στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι:

(α) Η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς τη ΑΒ και το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΒ.

(β) Αν $\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=30^0$, να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.



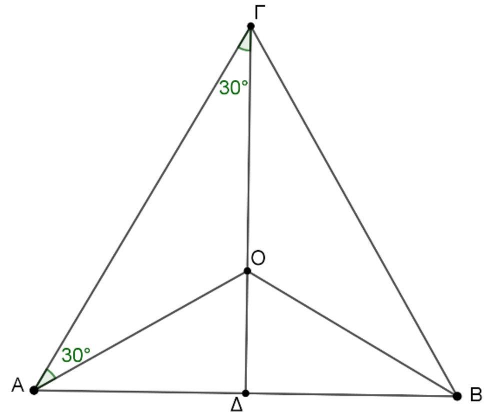
Λύση

(α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση τη ΑΒ, έχουμε ότι $\Gamma\mathrm{A}=\Gamma\mathrm{B}$ και $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$, δηλαδή τα σημεία Γ και Ο ανήκουν στη μεσοκάθετη του ΑΒ, οπότε η ευθεία ΓΟ είναι η μεσοκάθετη του ΑΒ. Επομένως τέμνει κάθετα την ΑΒ στο μέσο της, δηλαδή ΑΔ = ΔΒ.

(β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο στο Γ και έχει $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=30^\circ$, οπότε θα είναι $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=60^\circ$ Επομένως

$$\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O}=\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma-\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=60^\circ-30^\circ=30^\circ=\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma,$$

οπότε η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος αγόρασε ένα σαλόνι αξίας 1200 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή τη τιμή ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ). Μετά την πρόσθεση του ΦΠΑ που ήταν το 24% επί της αξίας των 1200 ευρώ, αποφάσισε να πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε πόσο ήταν το ποσόν κάθε μηνιαίας δόσης, αν η τελική τιμή πώλησης επιβαρύνθηκε λόγω των δόσεων κατά 5% με τόκους.

Λύση

Το ποσόν του ΦΠΑ είναι: $1200\cdot\frac{24}{100}=12\cdot 24=288$ ευρώ, οπότε η τιμή του σαλονιού μαζί με το ΦΠΑ είναι: $1200+288=1488$ ευρώ.

Οι τόκοι που πρέπει να πληρωθούν είναι: $1488\cdot\frac{5}{100}=\frac{7440}{100}=74,4$ ευρώ.

Η τελική τιμή που θα πληρώσει ο Γιώργος είναι:

$$1200+288+74,4=1562,4 \text{ ευρώ},$$

οπότε η κάθε μηνιαία δόση είναι: $1562,4:12=130,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος Α διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία πρώτα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς Α.

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 5 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $15+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 5553.
- Ο Α έχει δύο φορές ψηφίο το 5 μία φορά το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $18+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=0$ ή $x=9$. Άρα έχουμε τους αριθμούς :

  5580, 5589, 5850, 5859, 8550, 8559.
- Ο Α έχει μία φορά το ψηφίο 5 δύο φορές το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $21+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=6$. Άρα έχουμε τους αριθμούς: 5886, 8586, 8856.
- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $24+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 8883.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

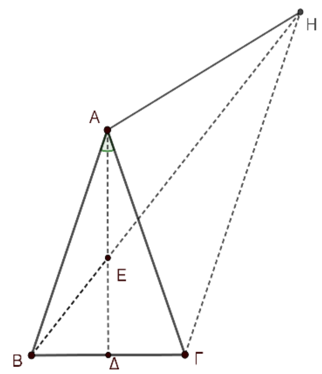
Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-8)^3}{2^3}+\frac{(-12)^3}{(-3)^3}+10\right)\cdot\left(\frac{(-8)^2}{2^2}+\frac{(-12)^2}{(-3)^2}-22\right).$$

Λύση
Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-8)^3}{2^3}+\frac{(-12)^3}{(-3)^3}+10\right)\cdot\left(\frac{(-8)^2}{2^2}+\frac{(-12)^2}{(-3)^2}-22\right)\\&=\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^3+\left(\frac{-12}{-3}\right)^3+10\right)\cdot\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^2+\left(\frac{-12}{-3}\right)^2-22\right)\\&=\left((-4)^3+(+4)^3+10\right)\cdot\left((-4)^2+(+4)^2-22\right)\\&=\left(-4^3+4^3+10\right)\cdot(16+16-22)=10\cdot10=100.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) με $\hat{\mathrm{A}}=40°$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$. Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΗ είναι ισοσκελή με ΕΑ = ΕΒ και ΑΒ = ΑΗ.
Να αποδείξετε ότι:
(α) $\mathrm{A}\hat{\mathrm{H}}\mathrm{B}=20°$,
(β) $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{H}=40°$,
(γ) η ΒΗ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{H}}\Gamma$.
Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*



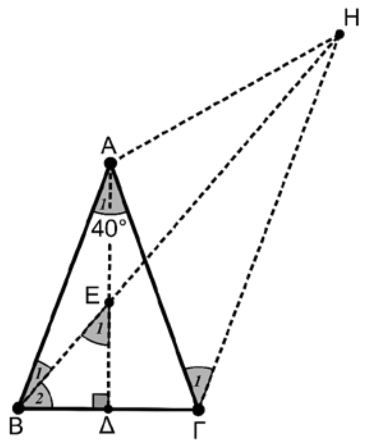
Λύση
(**α**) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\hat{\mathrm{A}}=40°$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$, θα είναι $\hat{\mathrm{A}}_1=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=20°$. Επειδή το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ισοσκελές, συμπεραίνουμε ότι $\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\mathrm{A}}_1=20°$. Επειδή τέλος το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB}=\mathrm{AH}$, θα ισχύει: $\mathrm{A}\hat{\mathrm{H}}\mathrm{B}=\hat{\mathrm{B}}_1=20°$.
(**β**) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές με $\mathrm{A}\hat{\mathrm{H}}\mathrm{B}=\hat{\mathrm{B}}_1=20°$ θα είναι

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{H}=180°-\left(20°+20°\right)=140°$$

Όμως έχουμε ότι:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{H}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma+\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{H}\Rightarrow140°=40°+\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{H}\Rightarrow\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{H}=100°.$$

Επειδή $\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{AB}=\mathrm{AH}$, το τρίγωνο ΓΑΗ είναι ισοσκελές, οπότε



Σχήμα 1

$$2\cdot A\hat{\Gamma}H = 180^\circ - \Gamma\hat{A}H \Rightarrow A\hat{\Gamma}H = \frac{180^\circ - \Gamma\hat{A}H}{2} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.$$

(γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε ότι $A\hat{H}\Gamma = A\hat{\Gamma}H = 40^\circ$, ενώ από το ερώτημα (γ) έχουμε ότι $A\hat{H}B = 20^\circ$, Επομένως θα έχουμε

$$B\hat{H}\Gamma = A\hat{H}\Gamma - A\hat{H}B = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ,$$

δηλαδή $B\hat{H}\Gamma = A\hat{H}B = 20^\circ$, οπότε η ΒΗ είναι η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{H}\Gamma$.

Πρόβλημα 3

Ο Νίκος επισκέφθηκε για ψώνια 3 καταστήματα στη σειρά. Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε 30 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που είχε μαζί του. Στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε 40 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το πρώτο κατάστημα. Στο τρίτο κατάστημα ξόδεψε 50 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το δεύτερο κατάστημα. Αν μετά την αγορά του στο τρίτο κατάστημα τελείωσαν τα χρήματα του, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του όταν ξεκίνησε τις αγορές του.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο τρίτο κατάστημα είχε x ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 50 ευρώ και δεν του έμειναν καθόλου χρήματα. Επομένως ξόδεψε όσα χρήματα του είχαν απομείνει και έχουμε την εξίσωση:

$$x = \frac{x}{2} + 50 \Leftrightarrow x - \frac{x}{2} = 50 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 50 \Leftrightarrow x = 100.$$

Επομένως, όταν έφυγε από το δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 100 ευρώ.

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο δεύτερο κατάστημα είχε y ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 40 ευρώ και του έμειναν 100 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$y = \frac{y}{2} + 40 + 100 \Leftrightarrow y - \frac{y}{2} = 100 + 40 \Leftrightarrow \frac{y}{2} = 140 \Leftrightarrow y = 280.$$

Επομένως όταν πήγε στο δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 280 ευρώ.
Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο πρώτο κατάστημα είχε z ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 30 ευρώ και του έμειναν 280 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$z = \frac{z}{2} + 30 + 280 \Leftrightarrow z - \frac{z}{2} = 280 + 30 \Leftrightarrow \frac{z}{2} = 310 \Leftrightarrow z = 620.$$

Επομένως όταν πήγε στο πρώτο κατάστημα είχε μαζί του 620 ευρώ.

Πρόβλημα 4
Τρεις θετικοί ακέραιοι α, β και γ, με $\alpha < \beta < \gamma$, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον ακέραιο 72 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τον ακέραιο 1008. Αν γνωρίζετε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β ισούται με το μέγιστο κοινό διαιρέτη των β, γ, να βρείτε τις δυνατές τιμές των α, β, γ.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση οι αριθμοί α, β και γ είναι διαφορετικά πολλαπλάσια του 72. Επομένως, θα είναι της μορφής
$\alpha = 72\kappa,\ \beta = 72\lambda,\ \gamma = 72\mu$ (όπου κ, λ, μ διαφορετικοί ανά δύο με $\kappa < \lambda < \mu$).
Επειδή πρέπει οι αριθμοί α, β και γ να είναι και διαιρέτες του $1008 = 14 \cdot 72$, πρέπει τα κλάσματα

$$\frac{1008}{72\kappa} = \frac{72 \cdot 14}{72\kappa} = \frac{14}{\kappa},\quad \frac{1008}{72\lambda} = \frac{72 \cdot 14}{72\lambda} = \frac{14}{\lambda},\quad \frac{1008}{72\mu} = \frac{72 \cdot 14}{72\mu} = \frac{14}{\mu},$$

να είναι ακέραιοι, δηλαδή πρέπει οι διαφορετικοί ανά δύο ακέραιοι κ, λ, μ να είναι διαιρέτες του 14. Επομένως οι δυνατές τιμές τους είναι 1, 2, 7 και 14.
Λόγω της προϋπόθεσης $\kappa < \lambda < \mu$ οι δυνατές τιμές για την τριάδα (κ, λ, μ) είναι:
$(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 7)$ ή $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 14)$ ή $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 7, 14)$ ή $(\kappa, \lambda, \mu) = (2, 7, 14)$.
Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 7)$, τότε $\alpha = 72, \beta = 144,\ \gamma = 504$, η οποία είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = \text{ΜΚΔ}(\beta, \gamma) = 72$.
- Αν είναι $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 14)$, τότε $\alpha = 72, \beta = 144,\ \gamma = 1008$, η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 72 \neq 144 = \text{ΜΚΔ}(\beta, \gamma)$.
- Αν είναι $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 7, 14)$, τότε $\alpha = 72, \beta = 504,\ \gamma = 1008$, η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 72 \neq 504 = \text{ΜΚΔ}(\beta, \gamma)$.
- Αν είναι $(\kappa, \lambda, \mu) = (2, 7, 14)$, τότε $\alpha = 144,\ \beta = 504,\ \gamma = 1008$ που δεν είναι δεκτή γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 72 \neq 504 = \text{ΜΚΔ}(\beta, \gamma)$.

Επομένως, οι δυνατές τιμές είναι $\alpha = 72, \beta = 144,\ \gamma = 504$.