Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3+2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}.$$

Λύση

Επειδή οι εμφανιζόμενες πράξεις είναι πολλές και χρονοβόρες, προσπαθούμε με κατάλληλη αντικατάσταση, να μετασχηματίσουμε την αριθμητική παράσταση σε αλγεβρική. Η παράσταση που προκύπτει μετά την απλοποίησή της οδηγεί τελικά σε απλό υπολογισμό της δεδομένης αριθμητικής παράστασης. Έτσι, αν θέσουμε $x=2014,$ η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^2+(2x+1)^2}+\frac{(x+2)^3+(x-2)^3-18x}{x^2+(2x-1)^2}-\frac{4x\left(x^2+3\right)\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+1\right)^2-(4x)^2}\\
&=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{5x^2+4x+1}+\frac{2x\left(x^2+3\right)}{5x^2-4x+1}-\frac{4x\left(x^2+3\right)\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\\
&=2x\left(x^2+3\right)\left[\frac{1}{5x^2+4x+1}+\frac{1}{5x^2-4x+1}-\frac{2\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\right]\\
&=2x\left(x^2+3\right)\left(\frac{5x^2-4x+1+5x^2+4x+1-10x^2-2}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\right)=2x\left(x^2+3\right)\cdot 0=0.\end{aligned}$$

Άρα είναι

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3-2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}=0$$

Πρόβλημα 2

Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους A και B. 100 αντίτυπα του τόμου A και 120 αντίτυπα του τόμου B κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου A με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου B με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

Λύση

Έστω ότι η τιμή πώλησης του τόμου A είναι x ευρώ και τόμου B είναι y ευρώ. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$100x+120y=4000\Leftrightarrow 5x+6y=200 \qquad (1)$$

$$50\cdot\frac{90x}{100}+60\cdot\frac{80y}{100}=1680\Leftrightarrow 45x+48y=1680 \qquad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c} 5x+6y=200 \\ 45x+48y=1680 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 45x+54y=1800 \\ 45x+48y=1680 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 6y=120 \\ 45x+48y=1680 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=20 \\ x=\dfrac{1680-48y}{45} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=20 \\ x=16 \end{array}\right\}.$$

Άρα η τιμή πώλησης του τόμου Α ήταν 16 ευρώ και του τόμου Β ήταν 20 ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(x^2+y^2+xy\right)^2 \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right],$$

όπου x, y είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών x, y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{\mathrm{B}}$ είναι ρητός για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x, y.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{A}&=\left(x^2+y^2+xy\right)^2=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right) \\ &=x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2x^3y+2xy^3 \\ &=x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4. \end{aligned}$$

Διαφορετικά μπορούμε να έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}&=\left(x^2+y^2+xy\right)^2=\left(x^2+y^2\right)^2+(xy)^2+2\left(x^2+y^2\right)xy \\ &=x^4+y^4+2x^2y^2+x^2y^2+2x^3y+2xy^3 \\ &=x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, ότι:

$$\left(x^2+y^2+2xy\right)^2=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{B}&=2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right]=2\left[x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4+x^4+y^4\right] \\ &=2\left[2x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+2y^4\right]=4\left(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4\right) \\ &=4\left(x^2+y^2+xy\right)^2, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α)

Άρα έχουμε

$$\sqrt{\mathrm{B}}=\left|2\left(x^2+xy+y^2\right)\right|=2\left(x^2+xy+y^2\right)\in\mathbb{Q},$$

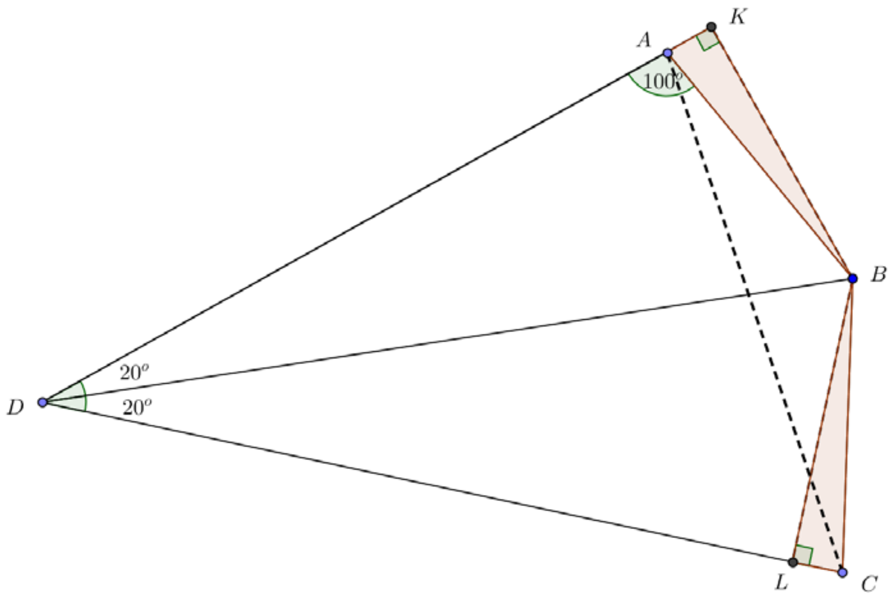
αφού οι αριθμοί x, y είναι ρητοί και $x^2+xy+y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}\geq 0.$

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο $ABCD$ με τη γωνία $\hat{A} = 100^\circ$ και $\hat{D} = 40^\circ$. Αν DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$ και $DB = DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $C\hat{A}B$.

Λύση

Εφόσον η DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$, θα έχουμε ότι $C\hat{D}B = B\hat{D}A = 20^\circ$ και από το ισοσκελές τρίγωνο DBC θα έχουμε ότι $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 80^\circ$ και επιπλέον έχουμε ότι $D\hat{B}A = 180^\circ - (100^\circ + 20^\circ) = 60^\circ$. Αν τώρα φέρουμε τις προβολές BK και BL, αφού το B είναι σημείο της διχοτόμου, θα έχουμε ότι $BK = BL$ και $B\hat{A}K = 80^\circ$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα BAK και BLC είναι ίσα, που σημαίνει ότι $BA = BC$. Επομένως, από το ισοσκελές τρίγωνο BAC παίρνουμε ότι: $C\hat{A}B = 20^\circ$.



Σχήμα 4

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την ανίσωση: $2x+(x+1)(x-1)<x^2+x-2+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{2x-1}{4}-\frac{3}{8}>\frac{x-1}{4}$$

και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.

Λύση. Έχουμε:

$$2x+(x+1)(x-1)<x^2+x-2+\lambda$$

$$\Leftrightarrow 2x+x^2-1<x^2+x-2+\lambda \Leftrightarrow x<\lambda-1,$$

Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε

$$\frac{2x-1}{4}-\frac{3}{8}>\frac{x-1}{4}\Leftrightarrow 4x-2-3>2x-2\Leftrightarrow 2x>3\Leftrightarrow x>\frac{3}{2}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{3}{2}<x<\lambda-1,$, εφόσον ισχύει:

$$\lambda-1>\frac{3}{2}\Leftrightarrow \lambda>\frac{5}{2}.$$

Πρόβλημα 2

Να λυθεί το σύστημα $\left\{\begin{matrix} x+y-1=6(x-3)(y+2) \\ \dfrac{3}{x-3}-\dfrac{4}{y+2}=11 \end{matrix}\right\}$

Λύση

Οι περιορισμοί είναι $x\neq 3, y\neq -2$. Θέτουμε $\frac{1}{x-3}=a$ και $\frac{1}{y+2}=b$, οπότε

$$x+y-1=(x-3)+(y+2)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}..$$

Επομένως, με περιορισμό $a,b\neq 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{6}{ab} \\ 3a-4b=11 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ 3a-4b=11 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=6-b \\ 3(6-b)-4b=11 \end{cases}\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a=6-b \\ 7b=7 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a=5 \\ b=1 \end{matrix}\right\},$$

οπότε $x=\frac{16}{5}$, $y=-1$, που πληρούν τους περιορισμούς.

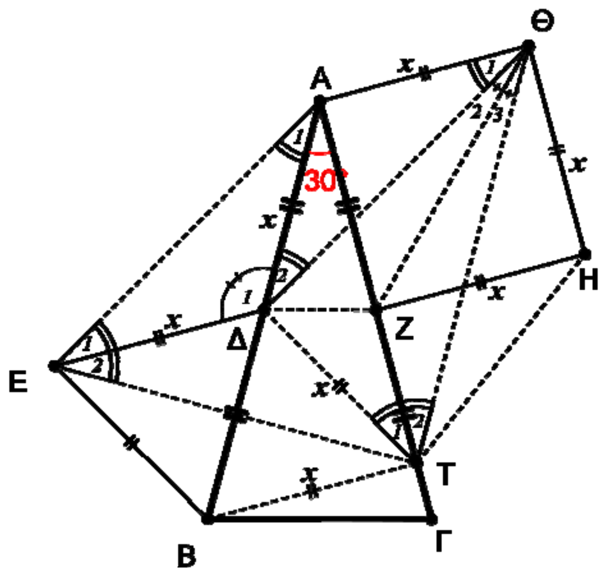
Πρόβλημα 3
Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y που είναι λύσεις της εξίσωσης
$$x+y+x^2+y^2=p,$$
όπου p πρώτος θετικός ακέραιος.

Λύση
Η δεδομένη εξίσωση γράφεται: $x+x^2+y+y^2=p \Leftrightarrow x(x+1)+y(y+1)=p \quad (1)$

Όμως οι αριθμοί $x(x+1)$, $y(y+1)$ ως γινόμενα διαδοχικών ακέραιων **είναι και οι δύο άρτιοι**, οπότε και το άθροισμα τους θα είναι άρτιος. Επομένως πρέπει $p=2$, αφού ο μοναδικός πρώτος που είναι άρτιος είναι το 2. Επειδή οι ακέραιοι $x(x+1)$, $y(y+1)$ **είναι άρτιοι μη αρνητικοί**, έχουμε:
$$x(x+1)+y(y+1)=2 \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x(x+1)=2 \\ y(y+1)=0 \end{cases}\right\}(\Sigma_1) \text{ ή } \left.\begin{cases} x(x+1)=0 \\ y(y+1)=2 \end{cases}\right\}(\Sigma_2)$$
Έχουμε
$$x(x+1)=2 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ και } y(y+1)=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ ή } y=-1.$$
Επομένως το σύστημα (Σ_1) έχει τις λύσεις:
$$(x,y)=(1,0) \text{ ή } (1,-1) \text{ ή } (-2,0) \text{ ή } (-2,-1)$$
Ομοίως, για το σύστημα (Σ_2) βρίσκουμε τις λύσεις:
$$(x,y)=(0,1) \text{ ή } (-1,1) \text{ ή } (0,-2) \text{ ή } (-1,-2).$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{Α} = 30^o$. Έστω $Δ, Ζ$ τα μέσα των $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε (εξωτερικά του τριγώνου) ισόπλευρο τρίγωνο $ΒΔΕ$ και τετράγωνο $ΑΖΗΘ$. Η μεσοκάθετη του $ΒΔ$, τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο $Τ$. Να αποδείξετε ότι:
(α) το τρίγωνο $ΑΕΤ$ είναι ισόπλευρο,
(β) τα τρίγωνα $ΑΤΒ$ και $ΔΘΤ$ είναι ίσα.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Το τρίγωνο $\Delta\mathrm{AE}$ είναι ισοσκελές ($\Delta\mathrm{A} = \Delta\mathrm{E} = x$) με $\hat{\Delta}_1 = 120^o$. Άρα

$$\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1 = 30^o.$$

Η ET είναι μεσοκάθετη της $\mathrm{B}\Delta$, άρα (από το ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{B}\Delta\mathrm{E}$) έχουμε:

$$\hat{\mathrm{E}}_2 = \frac{\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta}{2} = 30^o.$$

Στο τρίγωνο AET έχουμε, $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{T} = \hat{\mathrm{A}}_1 + \hat{\mathrm{A}} = 60^o$ και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{T} = \hat{\mathrm{E}}_1 + \hat{\mathrm{E}}_2 = 60^o$, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

(β) Στο ισόπλευρο τρίγωνο η AB είναι κάθετη (άρα και μεσοκάθετη) της ET. Άρα

$$\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{T} = \mathrm{BT} = x \qquad (1).$$

Τα ισοσκελή τρίγωνα $\mathrm{A}\Delta\Theta$ και $\mathrm{A}\Delta\mathrm{T}$ είναι ίσα μεταξύ τους διότι,

$$\mathrm{A}\Delta = \mathrm{A}\Theta = \Delta\mathrm{T} = x \text{ και } \Delta\hat{\mathrm{A}}\Theta = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{T} = 120^o.$$

Άρα έχουμε

$$\Delta\Theta = \mathrm{AT} \qquad (2).$$

Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\Theta\hat{\Delta}\mathrm{T} = 180^o - \hat{\Delta}_2 - \mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{T} = 180^o - 30^o - 60^o = 90^o.$$

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{T}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{T}}_1 + \mathrm{B}\hat{\mathrm{T}}\Delta = 30^o + 60^o = 90^o.$$

Έχουμε δηλαδή ότι τα τρίγωνα ATB και $\Delta\Theta\mathrm{T}$ είναι ορθογώνια με δύο κάθετες πλευρές ίσες (σχέσεις (1) και (2)).

Παρατήρηση. Επιπλέον, στο σημείο Z τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου $\Delta\Theta\mathrm{T}$, δηλαδή το σημείο Z είναι έκκεντρο του τριγώνου $\Delta\Theta\mathrm{T}$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε όλες τι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x \le x^3+x+19 . \qquad (1)$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9} \qquad (2)$$

Λύση.
Έχουμε:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x \le x^3+x+19 \Leftrightarrow x^3-x^2+x^2-x+x-1+5x \le x^3+x+19$$

$$\Leftrightarrow x^3-1+5x \le x^3+x+19 \Leftrightarrow 4x \le 20 \Leftrightarrow x \le 5.$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9} \Leftrightarrow 6x-3-23>4x-21 \Leftrightarrow 2x>5 \Leftrightarrow x>\frac{5}{2}.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{5}{2}<x\le 5$, οπότε οι ακέραιες τιμές του x που τις συναληθεύουν είναι οι τιμές 3 , 4 και 5.

Πρόβλημα 2
Να βρεθεί θετικός ακέραιος $\mathrm{A}=\overline{\alpha_\nu \alpha_{\nu-1}\cdots\alpha_1\alpha_0}=\alpha_\nu\cdot 10^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot 10^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\cdot 10+\alpha_0$, $\nu\ge 2,$ ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8.

Λύση
Επειδή τα ψηφία του αριθμού έχουν γινόμενο 8 και άθροισμα 8, αυτά πρέπει να είναι διαιρέτες του 8 που έχουν άθροισμα 8. Οι διαιρέτες του 8 είναι οι θετικοί ακέραιοι 1,2, 4 και 8. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα πολλαπλάσια του 8 είναι άρτιοι ακέραιοι, οι δυνατές επιλογές ψηφίων είναι:

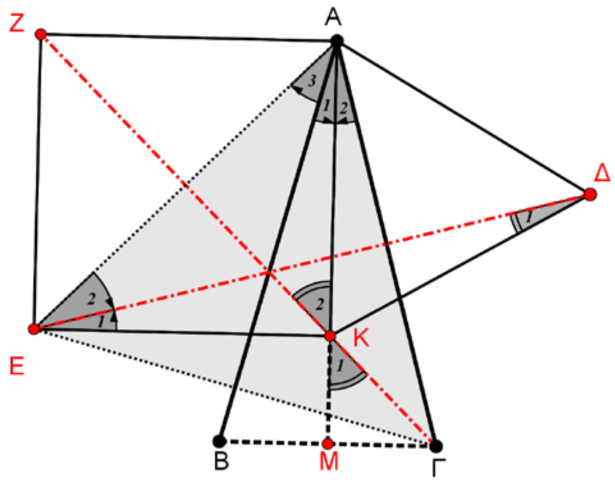
- 1,1,2 και 4, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 1124, 1142, 1214, 1412, 2114, 4112.Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός Α = 4112 διαιρείται με το 8.
- 1,1,2,2,2, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 11222, 12122, 12212, 21122, 21212 και 22112 Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός Α = 22112 διαιρείται με το 8.

Άρα υπάρχουν δύο δυνατές τιμές του Α που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος. Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος 4112 και ο πενταψήφιος 22112.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{A} = 30^\circ$. Στο ύψος ΑΜ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΜΒ=ΜΓ=ΜΚ. Με βάση την ΑΚ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΚΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Β) και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΚΔ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΓΖ, τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Λύση



Σχήμα 3

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Γ,Κ,Ζ είναι συνευθειακά.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΜΓΚ, έχουμε: $\widehat{K}_1 = 45^\circ$.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΚΖ, έχουμε: $\widehat{K}_2 = 45^\circ$.

Άρα τα σημεία Γ,Κ,Ζ είναι συνευθειακά, οπότε η ΓΖ είναι μεσοκάθετος της ΑΕ **(*)** και κατά συνέπεια το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές (ΓΑ=ΓΕ).

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 15^\circ$ (διότι $\widehat{A} = 30^\circ$) και $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 = 45^\circ$ (διότι $E\widehat{A}K = 45^\circ$).

Άρα $E\widehat{A}\Gamma = 60^\circ$ και κατά συνέπεια το ισοσκελές τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισόπλευρο.

Επιπλέον $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 30^\circ = \widehat{A}_3$.

Άρα η ΑΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{E\widehat{A}\Gamma}$ **(**)**.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΕ ισχύει $\Delta\widehat{K}E = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

Άρα $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{E}_1$ =15°. Επειδή όμως $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 45^\circ$, καταλήγουμε $\widehat{E}_2 = 30^\circ$, δηλαδή η ΕΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{A\widehat{E}\Gamma}$ **(***)**.

Από τα συμπεράσματα (*),(**) και (***) καταλήγουμε ότι οι ΔΕ, ΓΖ και ΑΒ συντρέχουν, δηλαδή οι ΔΕ και ΓΖ τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο k, ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο

$$\mathrm{A} = 2017 \cdot 2016 \cdot 2015 \cdot 2013 \cdot 2012 \cdot 2011,$$

να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

Λύση

Θέτουμε $n = 2014$ και τότε έχουμε: $\mathrm{A} = (n+3)(n+2)(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)$ και θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τον αριθμό Α στη μορφή $\mathrm{A} = \varphi\left(n\right)^2 - k$, όπου $\varphi\left(n\right)$ πολυώνυμο μεταβλητής n με ακέραιους συντελεστές και k θετικός ακέραιος. Με εκτέλεση των πράξεων, έχουμε:

$$\mathrm{A} = (n^2-9)(n^2-4)(n^2-1) = n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36 =$$
$$= n^2(n^4 - 14n^2 + 49) - 36 = n^2(n^2-7)^2 - 36$$

Επομένως, αν στον αριθμό Α προσθέσουμε θετικό ακέραιο $k = 36$, παίρνουμε ότι $\mathrm{A} + 36 = n^2(n^2-7)^2 = (n^3 - 7n)^2$, που δίνει έναν θετικό ακέραιο υψωμένο στο τετράγωνο. Άρα μία τιμή για το k είναι η τιμή $k = 36$.

Σημείωση.

Μία σύντομη απάντηση μπορεί να δώσει κάποιος στο πρόβλημα, αν θεωρήσει τον αριθμό $k = \mathrm{B}^2 - \mathrm{A}$, με $\mathrm{B}^2 > \mathrm{A}$, όπου Β θετικός ακέραιος. Για παράδειγμα, ένας τέτοιος αριθμός είναι ο $k = \mathrm{A}^2 - \mathrm{A}$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών;

Λύση
Έστω ότι γίνεται. Ονομάζουμε x τον κοινό χρόνο που έπαιξε ο κάθε ποδοσφαιριστής, όπου x είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε ο συνολικός χρόνος που έπαιξαν όλοι οι ποδοσφαιριστές είναι $16x$. Όμως κάθε στιγμή υπάρχουν 11 ποδοσφαιριστές, άρα ο συνολικός χρόνος που παίζουν οι ποδοσφαιριστές σε έναν αγώνα είναι $90\cdot 11$. Συνεπώς πρέπει $16x = 90\cdot 11$, που δίνει $x = \frac{90\cdot 11}{16} = \frac{45\cdot 11}{8}$, που δεν είναι ακέραιος. Συνεπώς δεν είναι δυνατό όλοι οι παίκτες να παίξουν τον ίδιο ακέραιο αριθμό λεπτών.

Πρόβλημα 2
Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) ακεραίων αριθμών που είναι τέτοιες ώστε

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4x - 4y + 12z + 6 = 0$$

Λύση
Γράφουμε την δοθείσα στη μορφή

$$(x^2 - 4x + 4) + (4y^2 - 4y + 1) + (9z^2 + 12z + 4) = 3 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2 + (2y-1)^2 + (3z+2)^2 = 3$$

Επομένως έχουμε το άθροισμα τριών τετραγώνων ακεραίων να ισούται με τρία. Η μόνη περίπτωση να ισχύει αυτό είναι να έχουμε $(x-2)^2 = (2y-1)^2 = (3z+2)^2 = 1$.
Άρα έχουμε

$$\begin{cases} x-2=1 \text{ ή } x-2=-1 \\ 2y-1=1 \text{ ή } 2y-1=-1 \\ 3z+2=1 \text{ ή } 3z+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ή } x=1 \\ y=1 \text{ ή } y=0 \\ z=-1/3 \text{ (απορρίπτεται) ή } z=-1 \end{cases}$$

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες είναι οι $(3,1,-1),(1,1,-1),(3,0,-1),(1,0,-1)$.

Πρόβλημα 3
Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Λύση
Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό Α μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 9 όσες φορές θέλουμε, έστω $\kappa \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $\kappa = 0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 9 όπως απαιτεί η εκφώνηση.

Ο αριθμός που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής πολ.3+1, οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επίσης, για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4. Επειδή το 4 δεν διαιρεί ούτε το 49 ούτε το 94, ο αριθμός Α δεν μπορεί να διαιρείται με το 4. Επομένως ο Α δεν μπορεί να διαιρείται και με το 8, αφού τότε θα έπρεπε να διαιρείται και με το 4. Επομένως έξι από τους αριθμούς 2,3,…., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του Α.
Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό Α που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,7. Για να διαιρείται με το 2 πρέπει το τελευταίο ψηφίο του Α να είναι το 4. Επειδή ο 94 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον αριθμό 994 ο οποίος διαιρείται και με το 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος θετικός ακέραιος.

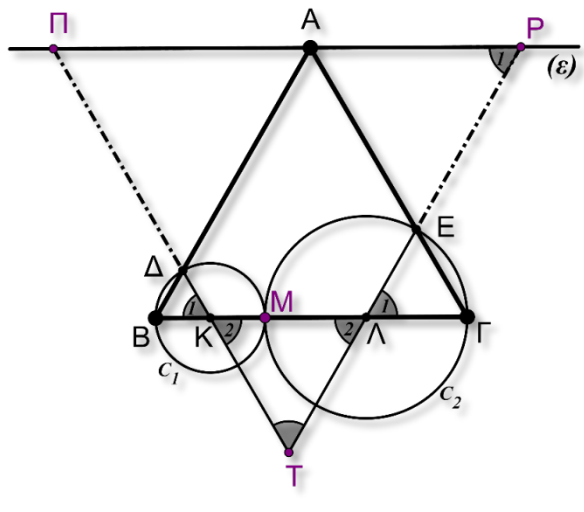
Πρόβλημα 4

Στη πλευρά $ΒΓ$ ισοπλεύρου τριγώνου $ΑΒΓ$, θεωρούμε σημείο $Μ$ (διαφορετικό από το μέσο της $ΒΓ$) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στη $ΒΓ$. Ο κύκλος C_1 (που έχει κέντρο το μέσο $Κ$ του $ΜΒ$ και ακτίνα $ΚΒ$) τέμνει την $ΑΒ$ στο $Δ$. Ο κύκλος C_2 (που έχει κέντρο το μέσο $Λ$ του $ΜΓ$ και ακτίνα $ΛΓ$) τέμνει την $ΑΓ$ στο $Ε$. Οι ευθείες $ΚΔ$ και $ΛΕ$ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία $Π$ και $Ρ$ αντίστοιχα. Αν τέλος οι ευθείες $ΚΔ$ και $ΛΕ$ τέμνονται στο σημείο $Τ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΠΡΤ$ είναι ισόπλευρο και να υπολογίσετε το εμβαδό του συναρτήσει του μήκους α της πλευράς $ΒΓ$.

Λύση

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $ΤΚΛ$ είναι ισόπλευρο. Το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισοσκελές (διότι $ΚΔ, ΚΒ$ ακτίνες του κύκλου C_1). Επειδή όμως $\hat{B} = 60°$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι (τελικά) ισόπλευρο.
Οπότε $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2 = 60°$.
Όμοια καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2 = 60°$. Άρα το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισόπλευρο και κάθε πλευρά έχει μήκος:

$$ΚΛ = ΜΚ + ΜΛ = \frac{ΜΒ}{2} + \frac{ΜΓ}{2} = \frac{ΜΒ + ΜΓ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$



Σχήμα 3

Εφόσον $ΑΡ \parallel ΒΓ$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{Λ}_1 = \hat{Ρ}_1 = 60°$. Άρα το τρίγωνο $ΤΡΠ$ είναι ισόπλευρο (διότι και $\hat{Τ} = 60°$).
Το τετράπλευρο $ΑΡΛΒ$ είναι παραλληλόγραμμο (διότι $\hat{Β} = \hat{Λ}_1 = \hat{Ρ}_1 = 60°$).
Άρα το τρίγωνο $ΤΡΠ$ είναι ισόπλευρο με μήκος πλευράς:

$$ΤΡ = ΤΛ + ΛΡ = ΤΛ + ΑΒ = \frac{α}{2} + α = \frac{3α}{2}.$$

Το εμβαδό του τριγώνου $ΤΡΠ$ είναι:

$$(ΤΡΠ) = \frac{\left(\frac{3α}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9α^2\sqrt{3}}{16}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x που ικανοποιούν συγχρόνως την εξίσωση $\left(x-1\right)\left(x^2-7x+10\right)=0$ και την ανίσωση $\frac{x\left(x-1\right)}{2}-2<\frac{x\left(x-5\right)}{2}+6$.

Λύση
Θα λύσουμε την εξίσωση και την ανίσωση και θα επιλέξουμε τους ακέραιους που ικανοποιούν και τις δύο. Για την εξίσωση έχουμε:

$$\left(x-1\right)\left(x^2-7x+10\right)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=5,$$

αφού η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι $\Delta=\left(-7\right)^2-4\cdot 1\cdot 10=9>0$.
Για την ανίσωση έχουμε

$$\frac{x\left(x-1\right)}{2}-2<\frac{x\left(x-5\right)}{2}+6 \Leftrightarrow x^2-x-4<x^2-5x+12.$$

$$\Leftrightarrow 5x-x<12+4 \Leftrightarrow 4x<16 \Leftrightarrow x<4.$$

Επομένως. η εξίσωση και η ανίσωση αληθεύουν συγχρόνως για $x=1$ ή $x=2$.

Πρόβλημα 2
Αν οι πραγματικοί αριθμοί α,β είναι τέτοιοι ώστε $\frac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1,$ να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.$$

Λύση
Από τη δεδομένη σχέση έχουμε ότι:

$$\alpha^4-36\beta^4=5\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=0. \qquad (1)$$

Για να προκύψει απλούστερη σχέση μεταξύ των α,β πρέπει να γίνει παραγοντοποίηση της παράστασης $\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4$. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο προσπαθούμε να χωρίσουμε την παράσταση σε ομάδες με κατάλληλη διάσπαση ενός όρου της σε δύο. Έτσι έχουμε

$$\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=\alpha^4-9\alpha^2\beta^2+4\alpha^2\beta^2-36\beta^4=\alpha^2\left(\alpha^2-9\beta^2\right)+4\beta^2\left(\alpha^2-9\beta^2\right)$$

$$=\left(\alpha^2-9\beta^2\right)\left(\alpha^2+4\beta^2\right)$$

Επομένως έχουμε

$$\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=0 \Leftrightarrow \left(\alpha^2-9\beta^2\right)\left(\alpha^2+4\beta^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2-9\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=3\beta \text{ ή } \alpha=-3\beta.$$

Αν $\alpha=3\beta,$ τότε $\mathrm{K}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{3\beta-\beta}{3\beta+\beta}=\frac{1}{2}$, ενώ

Αν $\alpha=-3\beta,$ τότε $\mathrm{K}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{-3\beta-\beta}{-3\beta+\beta}=\frac{-4}{-2}=2.$

Στο δεύτερο τρόπο διαιρούμε την παράσταση με β^4 (αν είναι $\beta=0$, τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται 0 = 1`, άτοπο), οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=0\Leftrightarrow \beta^4\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4-5\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-36\right)=0\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4-5\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-36=0$$

$$\overset{\frac{\alpha}{\beta}=\omega}{\Longleftrightarrow} \omega^4-5\omega^2-36=0\Leftrightarrow \left(\omega^2\right)^2-5\omega^2-36=0\Leftrightarrow \omega^2=\frac{5\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{5\pm 13}{2}$$

$$\Leftrightarrow \omega^2=9 \text{ ή } \omega^2=-4 \text{ (απορρίπτεται)} \Leftrightarrow \omega=3 \text{ ή } \omega=-3\Leftrightarrow \alpha=3\beta \text{ ή } \alpha=-3\beta.$$

Επομένως έχουμε, όπως και στον πρώτο τρόπο:

Αν $\alpha=3\beta$, τότε $\mathrm{K}=\dfrac{3\beta-\beta}{3\beta+\beta}=\dfrac{1}{2}$, ενώ, αν $\alpha=-3\beta$, τότε $\mathrm{K}=\dfrac{-3\beta-\beta}{-3\beta+\beta}=\dfrac{-4}{-2}=2$.

Πρόβλημα 3

Να συγκριθούν οι αριθμοί

$$\mathrm{A}=\frac{2}{3}+\frac{2}{6}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{2}{99}$$

και

$$\mathrm{B}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{95}+\frac{1}{97}+\frac{1}{98}+\frac{1}{100}$$

Λύση

Παρατηρώντας προσεκτικά τους αριθμούς Α και Β διαπιστώνουμε ότι:

οι προσθετέοι του Α είναι της μορφής $\dfrac{2}{3\kappa},\ \kappa=1,2,\dots,33$, δηλαδή ο Α έχει 33 όρους.

Επίσης διαπιστώνουμε ότι ο Β έχει προσθετέους της μορφής $\dfrac{1}{\nu}$, όπου το ν παίρνει όλες τις τιμές από το 2 μέχρι το 100, εκτός αυτών που είναι πολλαπλάσια του 3, δηλαδή ο Β έχει $99-33=66$ όρους, δηλαδή έχει διπλάσιους όρους από τον αριθμό Α. Επομένως πρέπει να βρούμε μία ανισωτική σχέση μεταξύ των όρων του Α και των όρων του Β η οποία σε κάθε όρο του Α θα αντιστοιχίζει δύο όρους του Β. Με απλή παρατήρηση βλέπουμε ότι πρέπει να βρούμε τη σχέση μεταξύ του όρου $\dfrac{2}{3\kappa}$ του Α και του αθροίσματος των όρων $\dfrac{1}{3\kappa-1}$ και $\dfrac{1}{3\kappa+1}$ του Β, για $\kappa=1,2,\dots,33$.

Επειδή βλέπουμε ότι $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}>\dfrac{2}{3}$, θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$\frac{1}{3\kappa-1}+\frac{1}{3\kappa+1}>\frac{2}{3\kappa}\ ,$$

για κάθε $\kappa=1,2,\dots,33$. Πράγματι, κάνοντας την πρόσθεση στο πρώτο μέλος, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{6\kappa}{9\kappa^2-1}>\frac{2}{3\kappa}$$

ή ισοδύναμα $18k^2>18k^2-2$, που ισχύει για κάθε $\kappa=1,2,\dots,33$

Επομένως, έχουμε τις 33 ομόστροφες ανισότητες:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}>\frac{2}{3},\ \frac{1}{5}+\frac{1}{7}>\frac{2}{6},\ \dots,\frac{1}{98}+\frac{1}{100}>\frac{2}{99}\ ,$$

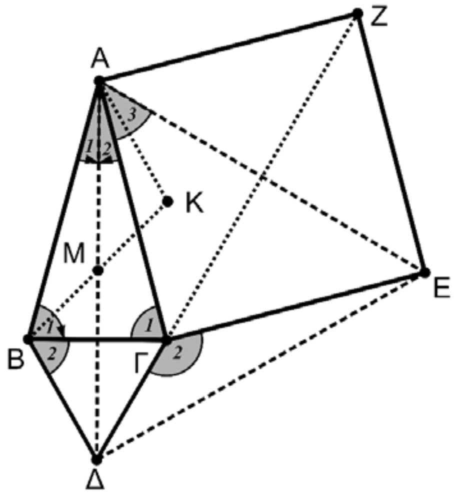
από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε ότι $\mathrm{B}>\mathrm{A}$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\widehat{A} = 30°$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ και τετράγωνο ΑΓΕΖ. Αν το σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΔ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς το σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

β) Οι ευθείες ΑΚ, ΕΜ και ΔΓ περνάνε από το ίδιο σημείο.



Σχήμα 3

Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $\widehat{A} = 30°$ θα ισχύει: $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = 75°$. Η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ, οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A} = 30°$, οπότε θα είναι: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 15°$.

Συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ. Αυτά έχουν από τις υποθέσεις:

(i) ΑΒ=ΑΓ=ΓΕ **(ii)** ΒΔ=ΓΔ και επιπλέον για τις περιεχόμενες γωνίες έχουμε:

$$A\widehat{B}\Delta = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 75° + 60° = 135° \text{ και}$$

$$\Delta\widehat{\Gamma}E = 360° - \widehat{\Gamma}_1 - 90° - 60° = 360° - 150° - 75° = 135°\ ,$$

δηλαδή ισχύει ότι: **(iii)** $A\widehat{B}\Delta = \Delta\widehat{\Gamma}E = 135°$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ είναι ίσα και κατά συνέπεια ΑΔ = ΔΕ, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. Για τη γωνία $\Delta\widehat{A}E$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:

$$\Delta\widehat{A}E = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = 15° + 45° = 60°,$$

αφού η γωνία $\widehat{A}_3$ είναι οξεία γωνία του ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΕ.

Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

(β) Για τη γωνία $\Delta\widehat{\Gamma}Z$ έχουμε: $\Delta\widehat{\Gamma}Z = \widehat{\Gamma}_2 + E\widehat{\Gamma}Z = 135° + 45° = 180°$. Άρα τα σημεία Δ, Γ, Ζ είναι συνευθειακά και επειδή η ΓΖ είναι μεσοκάθετη της ΑΕ, συμπεραίνουμε ότι **η ΔΖ είναι μεσοκάθετη της ΑΕ .**

Επειδή το Μ είναι μέσο της ΑΔ, και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο, **η ΕΜ θα είναι μεσοκάθετη της ΑΔ .**

Εφόσον το Κ είναι το συμμετρικό του Β ως προς το Μ, ΜΑ=ΜΒ και $B\widehat{M}\Delta = A\widehat{M}K$ τα τρίγωνα ΜΑΚ και ΜΔΒ είναι ίσα, οπότε $B\widehat{\Delta}M = M\widehat{A}K = 30°$. Από τις προηγούμενες ισότητες, συμπεραίνουμε ότι **η ΑΚ είναι διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη του τριγώνου ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΕ .**

Επομένως, οι ευθείες ΑΚ, ΕΜ και ΔΓ περνάνε από το σημείο τομής των μεσοκάθετων του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΔΕ.