Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στις εξετάσεις του Α.Σ.Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 56. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 40, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Λύση

Έστω ότι τα εξεταζόμενα μαθήματα ήταν n και οι βαθμοί του υποψηφίου ήταν οι $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ με τη διάταξη: $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 50n \qquad (1)$$

$$x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 56(n-1) \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = 40(n-1) \qquad (3)$$

$$x_2 + ... + x_{n-1} = 45(n-2) \qquad (4)$$

Με αφαίρεση των (2), (3) και (4) από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$x_1 = 56 - 6n, \qquad x_n = 10n + 40, \qquad x_1 + x_n = 5n + 90,$$

από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση:

$$x_1 + x_n = (56 - 6n) + \left(10n + 40\right) = 5n + 90 \Leftrightarrow n = 6,$$

οπότε θα είναι $x_1 = 20$ και $x_6 = 100$.

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{a}{b+a} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \frac{3}{2},$$

να αποδειχθεί ότι: $a = b$.

Λύση

Θέτουμε $\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = x$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $x = 1$. Η δοσμένη σχέση τότε γίνεται:

$$\frac{1}{1+x^3} + x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 + 2x(x^3+1) = 3(x^3+1) \Leftrightarrow 2x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^4 - x^3) - (x^3 \quad x) + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^3 - x^2 - x + 1) = 0$$

Όμως $2x^3 - x^2 - x + 1 = x^3 + (x^3 - x^2) - (x-1) = x^3 + (x-1)^2(x+1) > 0$. Επομένως πρέπει $x = 1$ και άρα $a = b$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθεί ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος k με την ακόλουθη ιδιότητα: Ο αριθμός 2018 γράφεται ως άθροισμα k τετραγώνων διαφορετικών ακεραίων.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι ο μεγαλύτερος τέτοιος k είναι ο n και $a_1, a_2, ..., a_n$ είναι διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους ακέραιοι ώστε $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 2018$. Τότε

$$a_1^2 + ... + a_n^2 \geq (-m)^2 + ... + 0^2 + 1^1 + ... + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{3},$$

οπότε

$$2018 \geq \frac{m(m+1)(2m+1)}{3}. \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι για $m = 14$ η τιμή της παράστασης στο δεξί μέλος ισούται με 2030 επομένως $n \leq 28$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι το 2018 γράφεται ως άθροισμα 28 τετραγώνων, διαφορετικών ανά δύο ακεραίων.

Έχουμε ότι $(-12)^2 + ... + 0^2 + ... + 12^2 = 1300$ και έχουμε χρησιμοποιήσει 25 τετράγωνα. Επομένως θέλουμε να γράψουμε τη διαφορά $2018 - 1300 = 718$, ως άθροισμα τριών τετραγώνων. Όμως $718 = 18^2 + 15^2 + 13^2$, οπότε

$$(-12)^2 + ... + 0^2 + ... + (12)^2 + 13^2 + 15^2 + 18^2 = 2018.$$

Μία διαφορετική προσέγγιση προκύπτει με τη θεώρηση του αθροίσματος

$$(-13)^2 + (-12)^2 + ... + 0^2 + ... + 12^2 + 13^2 = 1638,$$

οπότε έχουμε άθροισμα 27 όρων. Έτσι αναζητούμε τη δυνατότητα να προσθέσουμε ένα ακόμη τετράγωνο ίσο με $2018 - 1638 = 380$, (αδύνατο) ή να προσθέσουμε δύο τετράγωνα ακεραίων μεγαλύτερων του 13 αφαιρώντας ταυτόχρονα ένα από τα τετράγωνα που έχουμε ήδη θεωρήσει.. Αυτό μπορεί να γίνει, αφού

$$(15^2 + 18^2) - 13^2 = (225 + 324) - 169 = 549 - 169 = 380.$$

Άρα ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος k με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι ο 28.

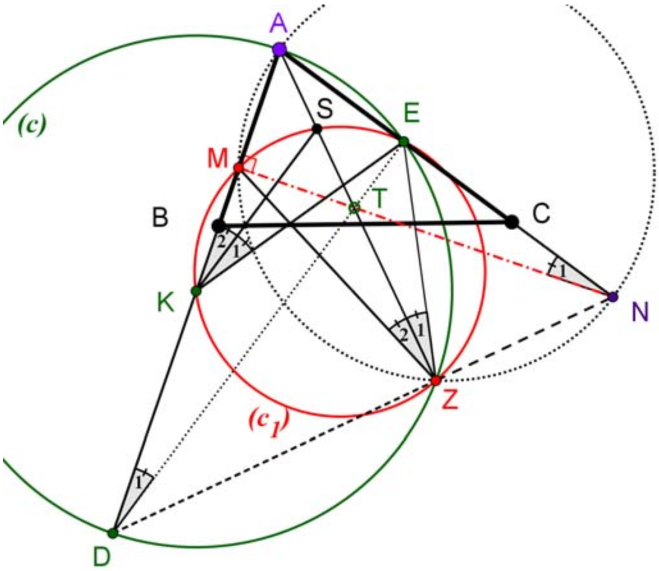
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < \mathrm{A}C < BC$. Στη προέκταση της AB (προς το μέρος του B) , θεωρούμε σημείο K και στη συνέχεια θεωρούμε τον κύκλο $c(K, KA)$ (με κέντρο το K και ακτίνα KA). Ο κύκλος (c) τέμνει την ευθεία AB στο σημείο D και την ευθεία AC στο σημείο E. Σε τυχόν σημείο M εσωτερικό της πλευράς AB θεωρούμε κάθετη προς την ευθεία AB η οποία τέμνει την ευθεία AC στο σημείο N. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KME (έστω (c_1)) τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι οι ευθείες MN, DE, AZ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Λύση

Έστω ότι η AZ, τέμνει τον κύκλο (c_1) στο σημείο S. Από τα ορθογώνια τρίγωνα AED και AMN έχουμε:

$$A\hat{D}E = \hat{D}_1 = \hat{N}_1 = 90^o - \hat{A}. \qquad (1)$$



Σχήμα 5

Οι γωνίες $\hat{D}_1$ και $\hat{Z}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο AE, άρα:
$$\hat{D}_1 = \hat{Z}_1 \qquad (2)$$

Οι γωνίες $\hat{K}_1$ και $\hat{Z}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο SE, άρα:
$$\hat{K}_1 = \hat{Z}_1 \qquad (3)$$

Από τις ισότητες $(1),(2),(3)$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{K}_1 = 90^o - \hat{A}$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο KAE ($KA = KE$ ως ακτίνες του κύκλου (c)) έχουμε:
$$A\hat{K}E = \hat{K}_1 + \hat{K}_2 = 180 - 2\hat{A}.$$

Επειδή όμως $\hat{K}_1 = 90^\circ - A$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{K}_2 = 90^\circ - A$.

Οι γωνίες $\hat{K}_2$ και $\hat{Z}_2$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο SM, άρα:
$$\hat{K}_2 = \hat{Z}_2. \qquad (4)$$

Τελικά συμπεραίνουμε ότι $\hat{Z}_2 = \hat{N}_1$, οπότε το τετράπλευρο $AMZN$ είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια $A\hat{Z}N = A\hat{M}N = 90^\circ$.

Η τελευταία ισότητα ($A\hat{Z}N = 90^\circ$) σε συνδυασμό με την ισότητα $A\hat{Z}D = 90^o$ (η γωνία $A\hat{Z}D$ βαίνει στη διάμετρο AD του κύκλου (c)), αποδεικνύει ότι τα σημεία D, Z, N είναι συνευθειακά.

Οι ευθείες MN, DE, AZ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν), διότι είναι ύψη του τριγώνου ADN.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $b_1=(x-4)^2,\ b_2=x^2+16,\ldots$, όπου x πραγματικός αριθμός. Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του $n,(n>1)$, για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λύση

(α) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $\omega=x^2+16-(x-4)^2=8x.$

Επομένως το άθροισμα των n πρώτων όρων της θα είναι:

$$S_n=\frac{\left[2(x-4)^2+8(n-1)x\right]n}{2}=\left(x^2+4(n-3)x+16\right)n.$$

(β) Ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με

$$\frac{S_n}{n}=x^2+4(n-3)x+16$$

και μπορεί να θεωρηθεί ως τριώνυμο μεταβλητής x. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=16(n-3)^2-64=16\left(n^2-6n+5\right)$. Επομένως το τριώνυμο ισούται με τέλειο τετράγωνο μιας πολυωνυμικής παράστασης του x, αν και μόνον, αν $\Delta=0\Leftrightarrow n^2-6n+5=0\Leftrightarrow n=1$ ή $n=5.$

Η τιμή $n=1$ απορρίπτεται, γιατί $n>1$. Επομένως, μόνον για $n=5$ είναι

$$\frac{S_5}{5}=x^2+8x+16=(x+4)^2.$$

Αν ζητήσουμε οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση του x, τότε έχουμε $\frac{S_n}{n}=x^2+4(n-3)x+16\geq 0$, για $x\in\mathbb{R}$, εφόσον $\Delta\leq 0\Leftrightarrow 1\leq n\leq 5$. Τότε για $n\in\{2,3,4,5\}$ ισχύει: $\frac{S_n}{n}=\left(\sqrt{x^2+4(n-3)x+16}\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση:

$$10x^4-8x^3-24x^2-32x-16=0.$$

Λύση

Έχουμε

$$10x^4-8x^3-24x^2-32x-16=0\Leftrightarrow 10x^4-\left(8x^3+24x^2+32x+16\right)=0.$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση που είναι μέσα στην παρένθεση γράφεται:

$$8x^3+24x^2+32x+16=\left(x^4+8x^3+24x^2+32x+16\right)-x^4=(x+2)^4-x^4,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$10x^4-\left(8x^3+24x^2+32x+16\right)=0\Leftrightarrow 10x^4-(x+2)^4+x^4=0\Leftrightarrow 11x^4=(x+2)^4$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt[4]{11}=x+2 \text{ ή } x\sqrt[4]{11}=-x-2\Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt[4]{11}-1} \text{ ή } x=-\frac{2}{\sqrt[4]{11}+1}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathrm{A} \to R$, όπου $\mathrm{A} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$. Αν για κάθε $x, y \in \mathrm{A}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f\left(\frac{g(x)}{g(y)}\right) = \frac{f\left(g(x)\right)}{y} \quad (1), \qquad g\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = \frac{g\left(f(x)\right)}{y}, \quad (2)$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) Οι συναρτήσεις f, g είναι '1-1' (ένα προς ένα).

(β) $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$.

Λύση

(α) Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $g(x_1) = g(x_2)$. Θα αποδείξουμε ότι $x_1 = x_2$.

Θέτοντας στη σχέση (1), όπου x το x_1 και όπου y το x_2, έχουμε:

$$f\left(\frac{g(x_1)}{g(x_2)}\right) = \frac{f\left(g(x_1)\right)}{x_2} \Leftrightarrow f(1) = \frac{f\left(g(x_1)\right)}{x_2} \Leftrightarrow f\left(g(x_1)\right) = f(1) \cdot x_2 \quad (\mathrm{A}).$$

Θέτοντας στη σχέση (1), όπου x το x_2 και όπου y το x_1, έχουμε:

$$f\left(\frac{g(x_2)}{g(x_1)}\right) = \frac{f\left(g(x_2)\right)}{x_1} \Leftrightarrow f(1) = \frac{f\left(g(x_2)\right)}{x_1} \Leftrightarrow f\left(g(x_2)\right) = f(1) \cdot x_1 \quad (\mathrm{B})$$

Από την ισότητα $g(x_1) = g(x_2)$ έχουμε: $f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \quad (\Gamma)$.

Από τις σχέσεις $(\mathrm{A}), (\mathrm{B}), (\Gamma)$ συμπεραίνουμε ότι: $x_1 = x_2$.

Ομοίως, μέσω της σχέσης (2), αποδεικνύουμε ότι και η συνάρτηση f είναι '1-1'.

(β) Στις σχέσεις (1)**,**(2) θέτουμε όπου y το x και έχουμε τις σχέσεις:

$$f\left(\frac{g(x)}{g(x)}\right) = \frac{f\left(g(x)\right)}{x} \Leftrightarrow f(1) = \frac{f\left(g(x)\right)}{x} \Leftrightarrow f\left(g(x)\right) = f(1) \cdot x$$

$$g\left(\frac{f(x)}{f(x)}\right) = \frac{g\left(f(x)\right)}{x} \Leftrightarrow g(1) = \frac{g\left(f(x)\right)}{x} \Leftrightarrow g\left(f(x)\right) = g(1) \cdot x$$

που για $x = 1$, γίνονται: $f\left(g(1)\right) = f(1)$ και $g\left(f(1)\right) = g(1)$.

Επειδή όμως οι συναρτήσεις f, g είναι '1-1', θα ισχύει: $f(1) = g(1) = 1$ που σε συνδυασμό με τις προηγούμενες ισότητες έχουμε: $f\left(g(x)\right) = g\left(f(x)\right) = x$.

Άρα η ισότητα (1) γίνεται: $f\left(\frac{g(x)}{g(y)}\right) = \frac{x}{y}$.

Στην τελευταία ισότητα θέτουμε όπου x το $f(x)$ και όπου y το $f(y)$.

Άρα $f\left(\frac{g\left(f(x)\right)}{g\left(f(y)\right)}\right) = \frac{f(x)}{f(y)} \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$ και για $x = 1$, έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{f(1)}{f(y)} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{f(y)} \Leftrightarrow \quad (y) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = 1.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(O,R)$. Ο κύκλος $c_1(C,AB)$ (με κέντρο το σημείο C και ακτίνα AB) τέμνει τον κύκλο (c) στα σημεία D και E (το E ανήκει στο τόξο στο οποίο δεν ανήκει το σημείο A). Ο κύκλος $c_2(B,BD)$ (με κέντρο το σημείο B και ακτίνα BD) τέμνει τον κύκλο (c_1) στο σημείο F. Να αποδείξετε ότι η AF περνάει από το μέσο M της BC.

Λύση

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABCD$, ισχύει $AB = CD$ (διότι CD ακτίνα του κύκλου (c_1)).

Άρα το τετράπλευρο $ABCD$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB = CD$, $AD // BC$ **(*)**.

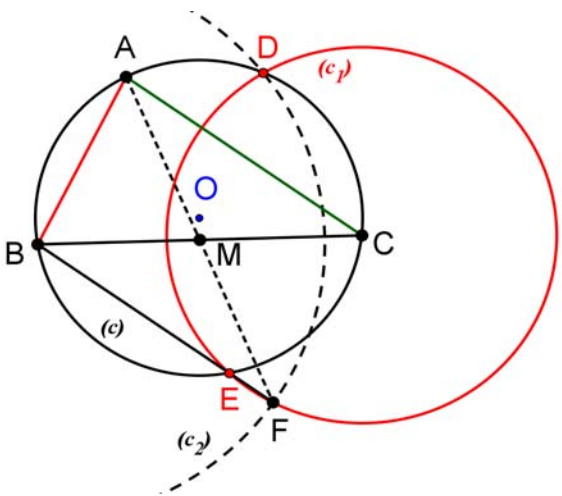
Από τις ίσες διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου $ABCD$ έχουμε:

$$AC = BD \qquad (1).$$

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABEC$, ισχύει $AB = CD = CE$ (διότι $CD = CE$ ακτίνες του κύκλου (c_1)).

Άρα το τετράπλευρο $ABEC$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB = CE$ και

$$AC // BE \qquad (2).$$



Σχήμα 5

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία B, E, F είναι συνευθειακά (θα αποδείξουμε ότι $E\hat{B}C = F\hat{B}C$).

Από το ισοσκελές τραπέζιο $ABEC$ έχουμε: $E\hat{B}C = A\hat{C}B = \hat{C}$ (3).

Η διάκεντρος BC των κύκλων (c_1) και (c_2) είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους DF.

Άρα, από το ισοσκελές τραπέζιο $ABCD$ έχουμε:

$$F\hat{B}C = C\hat{B}D = A\hat{C}B = \hat{C} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε: $E\hat{B}C = F\hat{B}C = \hat{C}$.

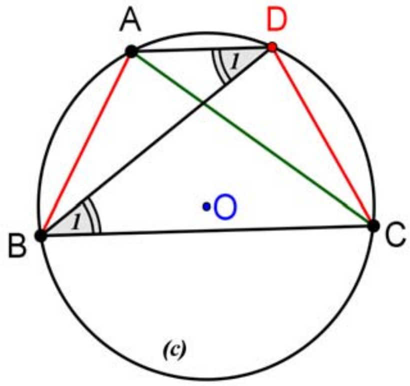
Από τη σχέση (2), έχουμε $AC \,//\, BE \,//\, BF$ και επειδή $AC = BF = BD$ (από τη σχέση (1)), καταλήγουμε ότι τα τμήματα AC, BF είναι ίσα και παράλληλα.

Δηλαδή το τετράπλευρο $ABFC$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται.

(*)

Ισχύει $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον ίδιο κύκλο και βαίνουν σε ίσα τόξα).

Οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ στις AD και BC με τέμνουσα την BD. Άρα $AD // BC$, δηλαδή το τετράπλευρο $ABCD$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Σχήμα 6

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$x^4-32x^2+257-\frac{4|x+2|}{x^2+4x+8}=0.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^4-32x^2+257=\frac{4|x+2|}{x^2+4x+8} \qquad (1)$$

Το πρώτο μέλος της (1) γράφεται:

$$x^4-32x^2+257=\left(x^2-16\right)^2+1\geq 1.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=-4$ ή $x=4$.

Το δεύτερο μέλος της (1) γράφεται:

$$\frac{4|x+2|}{x^2+4x+8}=\frac{4|x+2|}{\left(x+2\right)^2+2^2}=\frac{4|x+2|}{|x+2|^2+2^2}\leq\frac{4|x+2|}{2\cdot|x+2|\cdot 2}=1.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $|x+2|=2 \Leftrightarrow x+2=\pm 2 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-4$.

Επομένως η εξίσωση (1) έχει λύση, αν και μόνον αν, και τα δύο μέλη της είναι ίσα με 1, δηλαδή αν και μόνον αν $x=-4$.

Πρόβλημα 2.

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A}=\sqrt{n\left(n+182\right)}$ είναι ρητός.

Λύση

Για να είναι ο αριθμός Α ρητός, πρέπει και αρκεί να υπάρχει $k\in\mathbb{Q}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\mathrm{A}=\sqrt{n\left(n+182\right)}=k \Leftrightarrow n\left(n+182\right)=k^2. \qquad (1)$$

Επειδή ο αριθμός $n\left(n+182\right)$ είναι θετικός ακέραιος, ο αριθμός k είναι ακέραιος.

Πράγματι, αν ήταν $k=\frac{\mu}{\nu}$, όπου $\mu,\nu\in\mathbb{N}^*$ με $\left(\mu,\nu\right)=1$, τότε θα είχαμε

$$\frac{\mu^2}{\nu^2}=n\left(n+182\right)\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \nu^2\,|\,\mu^2 \overset{(\mu,\nu)=1}{\Rightarrow} \nu\,|\,\mu \Rightarrow \nu=1.$$

Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$n\left(n+182\right)=k^2 \Leftrightarrow n^2+182n=k^2 \Leftrightarrow \left(n+91\right)^2-k^2=91^2$$

$$\Leftrightarrow \left(n+91-k\right)\left(n+91+k\right)=91^2=7^2\cdot 13^2.$$

Επειδή $n+91-k<n+91+k$, η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με τα συστήματα

$$\left\{\begin{matrix} n+91-k=7 \\ n+91+k=7\cdot 13^2 \end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} n+91-k=13 \\ n+91+k=7^2\cdot 13 \end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} n+91-k=7^2 \\ n+91+k=13^2 \end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} n+91-k=1 \\ n+91+k=7^2\cdot 13^2 \end{matrix}\right\}$$

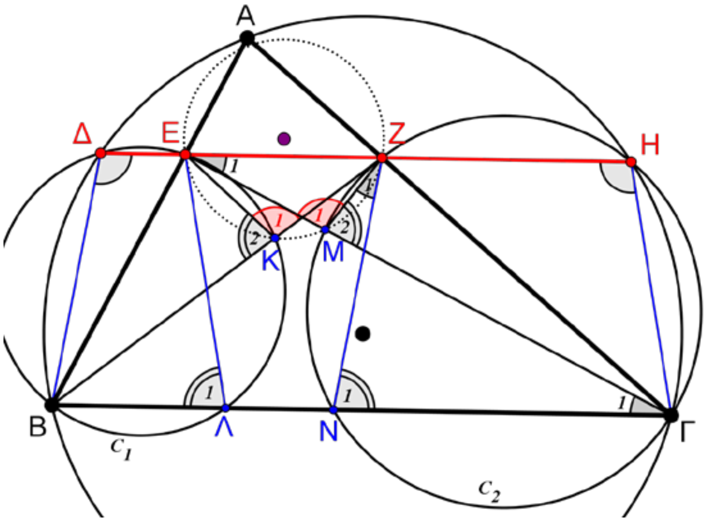
$\Leftrightarrow \left(n,k\right)=\left(504,588\right)$ ή $\left(n,k\right)=\left(234,312\right)$ ή $\left(n,k\right)=\left(18,60\right)$ ή $\left(n,k\right)=\left(4050,4140\right)$

Επομένως οι δυνατές τιμές του n είναι οι 18, 234, 504 και 4050.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R) (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) και τυχόν σημείο Δ του μικρού τόξου ΑΒ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, την ΑΓ στο Ζ και τον περιγεγραμμένο κύκλο c(O,R) (για δεύτερη φορά) στο Η. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_1 του τριγώνου ΒΔΕ τέμνει την ΒΖ στο Κ και την ΒΓ στο Λ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_2 του τριγώνου ΓΖΗ τέμνει την ΕΓ στο Μ και την ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Μ, Ζ, Ε βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο, στον οποίο εφάπτεται η ευθεία ΝΖ.

Λύση



Σχήμα 5

Το τραπέζιο ΒΓΗΔ είναι ισοσκελές (διότι είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ), οπότε ΔΒ=ΗΓ και $\widehat{\Delta} = \widehat{H}$.

Το τραπέζιο ΒΔΕΛ είναι ισοσκελές (διότι είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου C_1(ΒΔΕ), οπότε ΔΒ=ΕΛ και $\widehat{\Lambda}_1 = 180° - \widehat{\Delta}$.

Το τραπέζιο ΖΗΓΝ είναι ισοσκελές (διότι είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου C_2(ΖΗΓ), οπότε ΖΝ=ΗΓ και $\widehat{N}_1 = 180° - \widehat{H}$. Άρα είναι: $\widehat{\Lambda}_1 = \widehat{N}_1$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΒΕΚΛ, έχουμε: $\widehat{K}_2 = \widehat{\Lambda}_1$. Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΓΖΜΝ, έχουμε: $\widehat{M}_2 = \widehat{N}_1$. Από τις τρεις τελευταίες ισότητες γωνιών, συμπεραίνουμε ότι:

$$\widehat{K}_2 = \widehat{M}_2 \Leftrightarrow 180° - \widehat{K}_1 = 180° - \widehat{M}_1 \Leftrightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{M}_1.$$

Άρα τα σημεία Κ,Μ,Ε,Ζ βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΓΖΜΝ, έχουμε: $M\hat{Z}N = \hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}_1 = B\hat{\Gamma}E$. .

Από την παραλληλία ΕΒ και ΗΓ έχουμε: $\hat{E}_1 = M\hat{E}Z = B\hat{\Gamma}E = \hat{\Gamma}_1$. Επομένως έχουμε ότι: $M\hat{E}Z = M\hat{Z}N$, δηλαδή η εγγεγραμμένη γωνία $M\hat{E}Z$ στον κύκλο c_1 ισούται με τη γωνία ΜΖΝ που έχει πλευρές τη χορδή ΜΖ του κύκλου c_1 και την ευθεία ΝΖ και επιπλέον περιέχει το αντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{MZ}$. Άρα η ΖΝ εφάπτεται στον κύκλο που ανήκουν τα σημεία Κ, Μ, Ζ, Ε.

Πρόβλημα 4

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί την ισότητα

$$f\left(2xf\left(y\right)+y\right)+f\left(2x\left(y+1\right)\right)=f\left(2x+y\right)+4xy, \qquad (1)$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f\left(a\right)=1$.

(ii) Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

(i) Παρατηρούμε ότι υπάρχουν τιμές των x,y τέτοιες ώστε $2x\left(y+1\right)=2x+y$.

Πράγματι,

$$2x\left(y+1\right)=2x+y \Leftrightarrow 2xy+2x=2x+y \Leftrightarrow 2xy=y \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}, y\in\mathbb{R} \text{ ή } x\in\mathbb{R}, y=0.$$

Επειδή θέλουμε να βρούμε ζευγάρι $\left(x,y\right)$ τέτοιο ώστε $4xy=1$, παίρνουμε τις τιμές $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$. Με αυτές τις τιμές η σχέση (1) γίνεται:

$$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)+1 \Leftrightarrow f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)=1,$$

δηλαδή για το $a=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ ισχύει ότι: $f\left(a\right)=1$.

Διαφορετικά, αν θεωρήσουμε το ζευγάρι με $\left(\frac{1}{2},y\right), y\in\mathbb{R}$ στη σχέση (1), τότε λαμβάνουμε την σχέση

$$f\left(f\left(y\right)+y\right)=2y, \text{ για κάθε } y\in\mathbb{R},$$

από την οποία έπεται ότι η συνάρτηση είναι επί του $\mathbb{R}$. Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, οπότε παίρνει και την τιμή 1. Αυτό εύκολα προκύπτει από την παραπάνω σχέση για $y=\frac{1}{2}$.

(ii) Από τη σχέση (1) για $y=a$ και $x\in\mathbb{R}$, λαμβάνουμε:

$$f\left(2x+a\right)+f\left(2x\left(a+1\right)\right)=f\left(2x+a\right)+4xa \Leftrightarrow f\left(2x\left(a+1\right)\right)=4xa. \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι είναι $a\neq -1$, αφού αν ήταν $a=-1$, τότε $f\left(0\right)=-2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άτοπο. Επομένως μπορούμε να θέσουμε στη σχέση (2) $x=\frac{t}{2\left(a+1\right)}, t\in\mathbb{R}$, οπότε λαμβάνουμε:

$$f\left(t\right)=\left(\frac{2a}{a+1}\right)t=ct,\ t\in\mathbb{R},\ c=\frac{2a}{a+1}.$$

Επειδή η συνάρτηση f πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση (1), έχουμε:

$$c\left(2xcy+y\right)+2cxy+2cx=2cx+cy+4xy, \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(c^2+c-2\right)xy=0, \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \Leftrightarrow c=1 \text{ ή } c=-2.$$

Άρα οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι οι: $f\left(x\right)=x, x\in\mathbb{R}$ ή $f\left(x\right)=-2x, x\in\mathbb{R}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$(a-1)\left(x^2+2x+2\right)^2=(a+1)\left(x^4+4\right),$$

για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a.

Λύση

Επειδή $x^4+4=\left(x^2\right)^2+2^2+4x^2-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2=\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$ η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$(a-1)\left(x^2+2x+2\right)^2=(a+1)\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$$

$$\Leftrightarrow (a-1)\left(x^2+2x+2\right)=(a+1)\left(x^2-2x+2\right)$$

(αφού $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow (a-1)x^2+2(a-1)x+2(a-1)=(a+1)x^2-2(a+1)x+2(a+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4ax+4=0 \Leftrightarrow x^2-2ax+2=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4a^2-8=4\left(a^2-2\right)\geq 0 \Leftrightarrow |a|\geq\sqrt{2} \Leftrightarrow a\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right).$$

Επομένως, αν $a\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ η εξίσωση έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και συγκεκριμένα:

- Αν $a\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$, έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις $x=a\pm\sqrt{a^2-2}$.
- Αν $a=\pm\sqrt{2}$, τότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα στο $\mathbb{R}$, την $x=a=\pm\sqrt{2}$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\left(x\sqrt{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x\sqrt{3}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T>0$ τέτοιος ώστε

$$f(x+T)=f(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω υπάρχει πραγματικός αριθμός $T>0$ τέτοιος ώστε $f(x+T)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε για $x=0$ προκύπτει ότι

$$f(T)=f(0)\Rightarrow \sigma\upsilon\nu T+\sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{3}\right)=3 \qquad (1)$$

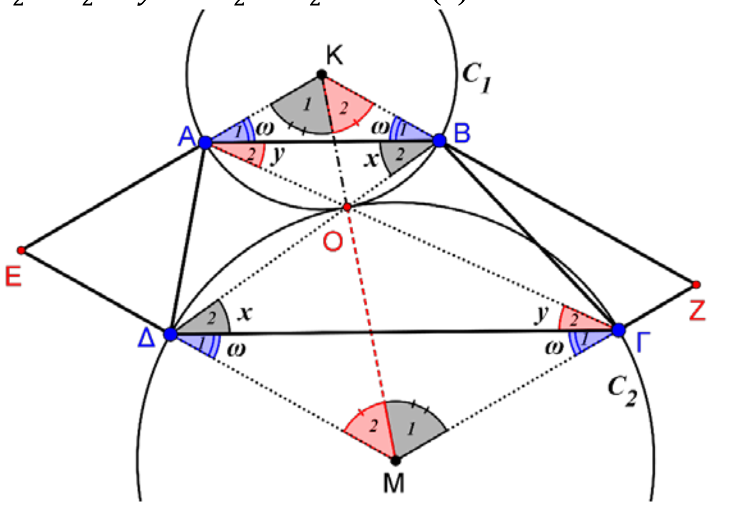
Η σχέση (1) μπορεί να αληθεύει μόνον όταν είναι:

$$\sigma\upsilon\nu T=1,\ \sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{2}\right)=1,\ \sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{3}\right)=1 \Leftrightarrow T=2\kappa\pi,\ T\sqrt{2}=2\lambda\pi,\ T\sqrt{3}=2\mu\pi,\ \kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{Z}.$$

Από τις ισότητες $T=2\kappa\pi$, $T\sqrt{2}=2\lambda\pi$ λαμβάνουμε με διαίρεση κατά μέλη ότι $\dfrac{\lambda}{\kappa}=\sqrt{2}$, που είναι άτοπο γιατί ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, ενώ ο αριθμός $\dfrac{\lambda}{\kappa}$ είναι ρητός.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ /\!/ ΓΔ \; και \; ΑΒ < ΓΔ)$ και έστω O το σημείο τομής των διαγώνιων του $ΑΓ$ και $ΒΔ$. Έστω ακόμη K το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_1 του τριγώνου OAB και M το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_2 του τριγώνου $OΔΓ$. Αν E είναι το σημείο τομής των ευθειών KA και $MΔ$ και Z είναι το σημείο τομής των KB και $MΓ$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, O, M καθώς και το μέσο της EZ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση
Από την παραλληλία των βάσεων του τραπεζίου, προκύπτουν (ως εντός εναλλάξ) οι ισότητες γωνιών: $\hat{A}_2 = \hat{Γ}_2 = \hat{y}$ και $\hat{B}_2 = \hat{Δ}_2 = \hat{x}$ (1).



Σχήμα 5

Η γωνία $\widehat{K}_1$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της $\hat{B}_2$ (στο κύκλο C_1) οπότε:
$$\widehat{K}_1 = 2\hat{B}_2 = 2\hat{x}.$$
Η γωνία $\widehat{M}_1$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της $\hat{Δ}_2$ (στο κύκλο C_2) οπότε:
$$\widehat{M}_1 = 2\hat{Δ}_2 = 2\hat{x}.$$
Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε: $\widehat{K}_1 = \widehat{M}_1 = 2\hat{x}$ (2).
Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι: $\widehat{K}_2 = \widehat{M}_2 = 2\hat{y}$ (3).
Από το ισοσκελές τρίγωνο KAB έχουμε:
$$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180° \Leftrightarrow 2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{\omega} + \hat{\omega} = 180°.$$
Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega} = 90° - \hat{x} - \hat{y}$.
Από το ισοσκελές τρίγωνο $MΓΔ$ έχουμε:
$$\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 + \hat{Γ}_1 + \hat{Δ}_1 = 180° \Leftrightarrow 2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{\omega} + \hat{\omega} = 180°.$$
Άρα $\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1 = \hat{\omega} = 90° - \hat{x} - \hat{y}$.
Από το τρίγωνο AOK έχουμε: $A\hat{O}K = 180° - \hat{\omega} - \hat{y} - 2\hat{x}$.
Από το τρίγωνο $ΓOM$ έχουμε: $Γ\hat{O}M = 180° - \hat{\omega} - \hat{y} - 2\hat{x}$.
Από τις τελευταίες ισότητες έχουμε: $A\hat{O}K = Γ\hat{O}M$. Άρα τα σημεία O, K, M είναι συνευθειακά.
Από τις ισότητες των γωνιών $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega} = \hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1$ και την παραλληλία $AB /\!/ ΓΔ$ συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $KEMZ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται.

Πρόβλημα 4

Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί p,q,r με $p>q>r$ είναι πρώτοι, να εξετάσετε, αν οι αριθμοί $\sqrt[3]{2018pq}, \sqrt[3]{2018qr}, \sqrt[3]{rp}$ μπορούν να ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι μπορούν να ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο. Τότε γράφουμε:

$$\sqrt[3]{rp}=a, \sqrt[3]{2018pq}=a+kd, \sqrt[3]{2018qr}=a+md\ ,\ m,k\in Z$$

Αντικαθιστώντας το a παίρνουμε τις σχέσεις

$$\sqrt[3]{2018pq}=\sqrt[3]{rp}+kd \text{ και } \sqrt[3]{2018qr}=\sqrt[3]{rp}+md\ ,$$

οπότε απαλείφοντας το d παίρνουμε:

$$m\sqrt[3]{2018pq}-k\sqrt[3]{2018qr}=(m-k)\sqrt[3]{rp}\ . \qquad (1)$$

Υψώνοντας στον κύβο την (1) παίρνουμε:

$$2018m^3pq-2018k^3qr+3mk\sqrt[3]{2018^2q^2pr}(m\sqrt[3]{2018pq}-k\sqrt[3]{2018qr})=(m-k)^3rp$$

Η τελευταία λόγω της (1) γράφεται:

$$2018m^3pq-2018k^3qr+3mk(m-k)\sqrt[3]{2018^2q^2p^2r^2}=(m-k)^3rp\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός $(2018pqr)^2$ πρέπει να είναι τέλειος κύβος. Όμως στο $2018pqr=2\cdot 1009\cdot pqr$ κάθε πρώτος μπορεί να εμφανιστεί σε δύναμη το πολύ 2, αφού $p>q>r$, άρα δεν είναι τέλειος κύβος.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε πόσοι θετικοί ακέραιοι της μορφής

$$A = \overline{xxxabc} = x\cdot 10^5 + x\cdot 10^4 + x\cdot 10^3 + a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c,$$

όπου x, a, b, c ψηφία με $x \neq 0$, διαιρούνται με το 37.

Λύση

Ο ακέραιος A μπορεί να γραφεί ως:

$$A = \overline{xxxabc} = x\cdot 10^3 \cdot 111 + a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c = x\cdot 10^3 \cdot 3\cdot 37 + \overline{abc} = \pi o\lambda.37 + \overline{abc},$$

για κάθε $x \in \{1, 2, ..., 9\}$. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει η ισοδυναμία

$$37 \mid A \Leftrightarrow 37 \mid \overline{abc}.$$

Όμως όλοι οι το πολύ τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι που διαιρούνται με το 37 είναι της μορφής $37\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}$, που ικανοποιούν τη σχέσεις $0 \leq 37\kappa \leq 999$. Έχουμε

$$0 \leq 37\kappa \leq 999, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 0 \leq \kappa \leq 27, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως υπάρχουν 28 θετικοί ακέραιοι με τρία το πολύ ψηφία που διαιρούνται με το 37 και επειδή για το σχηματισμό των πρώτων τριών ψηφίων του A υπάρχουν 9 δυνατές περιπτώσεις, προκύπτει ότι συνολικά υπάρχουν $9\cdot 28 = 252$ θετικοί ακέραιοι της δεδομένης μορφής που διαιρούνται με το 37.

Πρόβλημα 2

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = |mx+4| + |mx-4|, m > 0$ και $y = 12$ ορίζουν κυρτό επίπεδο σχήμα του οποίου το εμβαδό ισούται με 20 τ. μ. Να προσδιορίσετε την τιμή της πραγματικής παραμέτρου $m > 0$.

Λύση

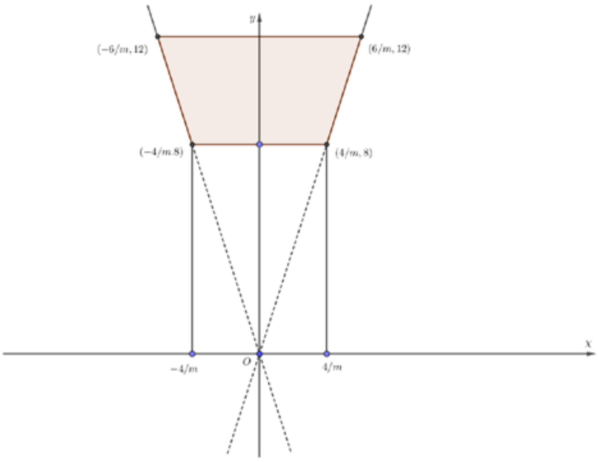
Η εξίσωση $y = |mx+4| + |mx-4|$, $m \in \mathbb{R}$, παίρνει τη μορφή

$$y = m\cdot\left|x+\frac{4}{m}\right| + m\cdot\left|x-\frac{4}{m}\right| = m\cdot\left(\left|x+\frac{4}{m}\right| + \left|x-\frac{4}{m}\right|\right), m > 0,$$

οπότε θεωρώντας την τιμή του x στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{4}{m}\right)$, $\left[-\frac{4}{m}, \frac{4}{m}\right]$ και $\left[\frac{4}{m}, +\infty\right)$ έχουμε:

$$y = |mx+4| + |mx-4| = \begin{cases} -2mx, & \alpha\nu \;\; x < -\dfrac{4}{m} \\ 8, \; \alpha\nu \;\; -\dfrac{4}{m} \le x \le \dfrac{4}{m} \;, & m > 0. \\ 2mx, & \alpha\nu \;\; x > \dfrac{4}{m} \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης είναι μία τεθλασμένη γραμμή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, με σημεία αλλαγής κατεύθυνσης τα $\mathrm{A}\left(-\dfrac{4}{m}, 8\right)$ και $\mathrm{B}\left(\dfrac{4}{a}, 8\right)$. Η εξίσωση $y = 12$ ορίζει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 12)$. Οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία $\Gamma\left(\dfrac{6}{m}, 12\right)$ και $\Delta\left(-\dfrac{6}{m}, 12\right)$, οπότε ορίζουν το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις μήκους $\dfrac{8}{m}$ και $\dfrac{12}{m}$, ενώ το ύψος τους έχει μήκος 4. Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) = \dfrac{40}{m}$. Από την εξίσωση $\dfrac{40}{m} = 20 \Leftrightarrow m = 2$.



Σχήμα 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση: $\mathrm{A} = \sqrt{3\left|4 - x^2\right|^2 - 2x^4 + 16x^2 - 32}$

Να απλοποιήσετε την παράσταση Α και να βρείτε το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $\mathrm{A} = \alpha x + 4$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\sqrt{3\left|4-x^2\right|^2-2x^4+16x^2-32}=\sqrt{3\left(4-x^2\right)^2-2\left(x^4+8x^2-16\right)}=$$
$$=\sqrt{3\left(4-x^2\right)^2-2\left(x^2-4\right)^2}=\sqrt{\left(x^2-4\right)^2}=\left|x^2-4\right|$$

Άρα είναι

$$\mathrm{A}=\left|x^2-4\right|=\begin{cases} x^2-4, & \text{αν } |x|\geq 2 \\ 4-x^2, & \text{αν } |x|<2 \end{cases}$$

Για την επίλυση της εξίσωσης $\mathrm{A}=\alpha x+4,\ \alpha\in\mathbb{R}$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. $x\leq -2$ ή $x\geq 2$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$\mathrm{A}=\alpha x+4\Leftrightarrow x^2-4=\alpha x+4\Leftrightarrow x^2-\alpha x-8=0$, η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=\alpha^2+32>0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις, $x_1=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+32}}{2},\ x_2=\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, για κάθε τιμή $\alpha\in\mathbb{R}$.

Για τη λύση $x_1=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, ισχύει ότι:

$$x_1\geq 2\Leftrightarrow \alpha+\sqrt{\alpha^2+32}\geq 4\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+32}\geq 4-\alpha\Leftrightarrow \alpha\geq -2,$$

γιατί η ανίσωση αληθεύει για κάθε $\alpha\geq 4$, ενώ για $\alpha<4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2+32\geq\left(4-\alpha\right)^2\Leftrightarrow \alpha^2+32\geq\alpha^2-8\alpha+16\Leftrightarrow 8\alpha\geq -16\Leftrightarrow \alpha\geq -2.$$

Για τη λύση $x_1=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, ισχύει ότι:

$$x_1\leq -2\Leftrightarrow \alpha+\sqrt{\alpha^2+32}\leq -4\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+32}\leq -(4+\alpha)\ \text{(αδύνατη)},$$

αφού η ανίσωση είναι αδύνατη για κάθε $\alpha\geq -4$, ενώ για $\alpha<-4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2+32\leq\left(4+\alpha\right)^2\Leftrightarrow \alpha^2+32\leq\alpha^2+8\alpha+16\Leftrightarrow 8\alpha\geq 16\Leftrightarrow \alpha\geq 2,\ \text{άτοπο.}$$

Επομένως η λύση x_1 είναι δεκτή για $\alpha\geq -2$ και ανήκει στο διάστημα $\left[+2,+\infty\right)$.

Για τη λύση $x_2=\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, ισχύει ότι:

$$x_2\geq 2\Leftrightarrow \alpha-\sqrt{\alpha^2+32}\geq 4\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+32}\leq \alpha-4\ \text{(αδύνατη)},$$

αφού η ανίσωση είναι αδύνατη για κάθε $\alpha\leq 4$, ενώ για $\alpha>4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2+32\leq\left(\alpha-4\right)^2\Leftrightarrow \alpha^2+32\leq\alpha^2-8\alpha+16\Leftrightarrow 8\alpha\leq -16\Leftrightarrow \alpha\leq -2,\ \text{άτοπο.}$$

Για τη λύση $x_2=\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, ισχύει ότι:

$$x_2\leq -2\Leftrightarrow \alpha-\sqrt{\alpha^2+32}\leq -4\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+32}\geq \alpha+4,$$

η οποία αληθεύει για κάθε $\alpha\leq -4$, ενώ για $\alpha>-4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2+32\geq\left(\alpha+4\right)^2\Leftrightarrow \alpha^2+32\geq\alpha^2+8\alpha+16\Leftrightarrow 8\alpha\leq 16\Leftrightarrow \alpha\leq 2.$$

Επομένως η λύση x_2 είναι δεκτή για $\alpha\leq 2$ και ανήκει στο διάστημα $\left(-\infty,-2\right]$.

Άρα η εξίσωση $\mathrm{A}=\alpha x+4,\ \alpha\in\mathbb{R}$ έχει:

- δύο λύσεις στο σύνολο $\left(-\infty,2\right]\cup\left[2,+\infty\right)$, όταν $-2\leq\alpha\leq 2$

- μία λύση στο σύνολο $(-\infty, 2] \cup [2, +\infty)$, όταν $\alpha < -2$ ή $\alpha > 2$.

Περίπτωση 2. $-2 < x < 2$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$\mathrm{A} = \alpha x + 4 \Leftrightarrow 4 - x^2 = \alpha x + 4 \Leftrightarrow x^2 + \alpha x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (δεκτή) ή } x = -\alpha.$$

Η λύση $x = -\alpha$ είναι δεκτή, εφόσον $-2 < -\alpha < 2 \Leftrightarrow -2 < \alpha < 2$.

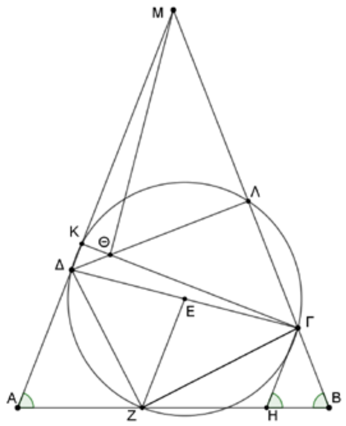
Επομένως η εξίσωση $\mathrm{A} = \alpha x + 4,\ \alpha \in \mathbb{R}$ έχει:

- τέσσερις πραγματικές λύσεις για $-2 < \alpha < 2,\ \alpha \neq 0$
- τρεις πραγματικές λύσεις για $\alpha \in \{-2, 0, +2\}$
- δύο πραγματικές λύσεις για $\alpha < -2$ ή $\alpha > 2$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} < 90^\circ$ και $\mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma} = \Delta\Gamma$. Η παράλληλη ευθεία προς την πλευρά ΑΔ από το μέσο Ε της πλευράς ΓΔ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΔΖ τέμνει τις ευθείες ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν οι ευθείες ΓΚ και ΔΛ τέμνονται στο σημείο Θ και οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΘ είναι κάθετη προς την ευθεία ΓΔ.

Λύση



Σχήμα 6

Φέρουμε τη ΓΗ παράλληλη προς τη ΑΔ που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Η. Τότε

$\Gamma\hat{\mathrm{H}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{A}}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά στις παράλληλες ΓΗ και ΑΔ)

$\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}}$ (από υπόθεση).

Επομένως είναι:

$$\Gamma\hat{\mathrm{H}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{B}} \Rightarrow \Gamma\mathrm{H} = \Gamma\mathrm{B}\ . \qquad (1)$$

Επειδή το Ε είναι μέσο της πλευράς ΔΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ και η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις, θα έχουμε

$$\mathrm{EZ} = \frac{\mathrm{A\Delta} + \Gamma\mathrm{H}}{2} \overset{(1)}{=} \frac{\mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma}}{2} \overset{υπόθεση}{=} \frac{\Gamma\Delta}{2}.$$

Επομένως στο τρίγωνο ΓΔΖ η διάμεσος ΖΕ ισούται με το μισό της πλευρά στην οποία αντιστοιχεί, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Ζ, δηλαδή $\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta = 90^\circ$.

Επιπλέον, η ΓΖ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΓΔΖ, οπότε

$$\Gamma\mathrm{K}\Delta = 90^\circ = \Delta\hat{\Lambda}\Gamma\,.$$

Επομένως οι ΓΚ και ΔΛ είναι ύψη στο τρίγωνο ΜΔΓ, οπότε το σημείο τομής τους Θ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΜΔΓ. Άρα θα είναι $\mathrm{M\Theta} \perp \Gamma\Delta$.