Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=x^3+ax^2+bx+c$, όπου a,b,c πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x)=\mathrm{P}(2x)-19\mathrm{P}(-x)$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x)=3x(3x+2)^2$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$Q(x)=\mathrm{P}(2x)-19\mathrm{P}(-x)=(2x)^3+a(2x)^2+b\cdot 2x+c-19\left((-x)^3+a(-x)^2+b(-x)+c\right)$$

$$=8x^3+4ax^2+2bx+c+19x^3-19ax^2+19bx-19c=27x^3-15ax^2+21bx-18c.$$

(β) Από την ισότητα $Q(x)=3x(3x+2)^2$ έχουμε:

$$27x^3-15ax^2+21bx-18c=3x(3x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 27x^3-15ax^2+21bx-18c=3x\left(9x^2+12x+4\right)$$

$$\Leftrightarrow 27x^3-15ax^2+21bx-18c=27x^3+36x^2+12x$$

$$\Leftrightarrow \{-15a=36,\ 21b=12,\ -18c=0\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{a=-\frac{12}{5},\ b=\frac{4}{7}, c=0\right\}.$$

Άρα είναι: $\mathrm{P}(x)=x^3-\frac{12}{5}x^2+\frac{4}{7}x.$

Πρόβλημα 2. Οι πραγματικοί αριθμοί a,b είναι τέτοιοι ώστε $ab(a+b)(a-b)\neq 0$ και

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)}+\frac{b(a+b)}{a(a-b)}=\frac{3ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $a^2=b(a+2b)$

(β) Να βρείτε την τιμή του λόγου $\frac{a}{b}$.

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)}+\frac{b(a+b)}{a(a-b)}=\frac{3ab-b^2}{a^2-b^2}\Leftrightarrow b(a-b)^2+b(a+b)^2=a\left(3ab-b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow b\left[(a-b)^2+(a+b)^2\right]-ab(3a-b)=0\Leftrightarrow b\left(2a^2+2b^2\right)-ab(3a-b)=0$$

$$\Leftrightarrow b\left(2a^2+2b^2-3a^2+ab\right)=0\overset{b\neq 0}{\Leftrightarrow}2b^2-a^2+ab=0\Leftrightarrow a^2=b(a+2b).$$

(β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$a^2-ab-2b^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}-2=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0,\ x=\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow x^2-1-x-1=0,\ \ x=\frac{a}{b}\Leftrightarrow(x-1)(x+1)-(x+1)=0,\ x=\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0,\ \ x=\frac{a}{b} \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=2,\ x=\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}=-1 \text{ (απορρίπτεται, γιατί } a\neq -b\text{) ή } \frac{a}{b}=2 \Leftrightarrow \frac{a}{b}=2.$$

Πρόβλημα 3.

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyz}=100x+10y+z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $\overline{zyx}=100z+10y+x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyz}$.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\overline{xyz}=100x+10y+z=43(x+y+z)+9 \qquad (1)$$

$$\overline{zyx}=100z+10y+x=30(x+y+z)+6, \qquad (2)$$

από τις οποίες για τη διαφορά των δύο αριθμών προκύπτει ότι:

$$\overline{xyz}-\overline{zyx}=99(x-z)=13(x+y+z)+3. \qquad (3)$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι $10\le x+y+z\le 23$, γιατί, αν ήταν $x+y+z\ge 24$, τότε θα είχαμε $\overline{xyz}>43\cdot 24+9=1041$, άτοπο. Επομένως για το δεύτερο μέλος της σχέσης (3) έχουμε:

$$10\cdot 13+3\le 13(x+y+z)+3\le 23\cdot 13+3$$

$$\Rightarrow 133\le 13(x+y+z)+3\le 302$$

$$\Rightarrow 133\le 99(x-z)\le 302,$$

οπότε οι δυνατές τιμές για τη διαφορά των δύο ακραίων ψηφίων είναι 2 ή 3.

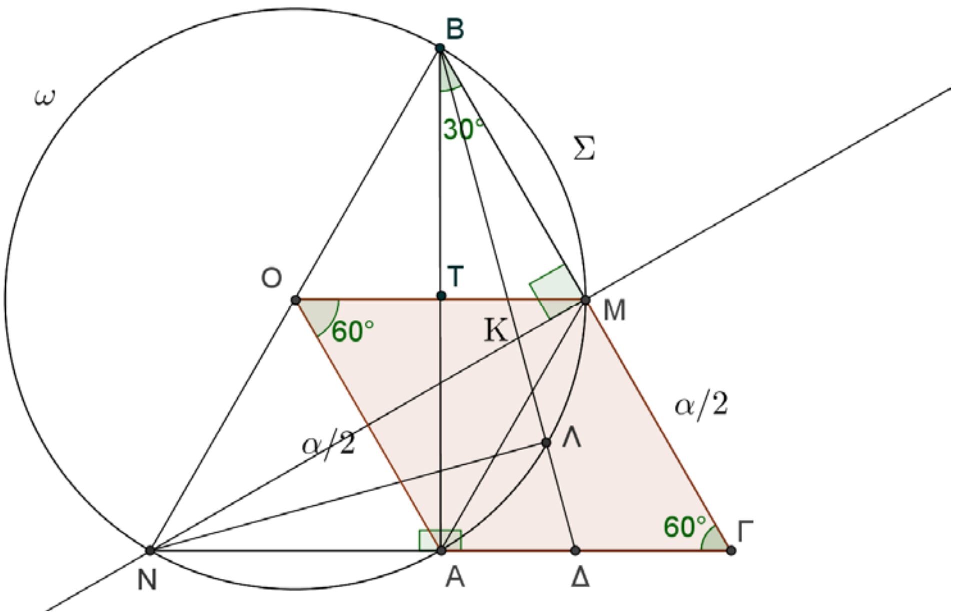
- Για $x-z=2$, από την (3) προκύπτει: $x+y+z=15$ οπότε από τις (1) και (2) λαμβάνουμε $\overline{xyz}=654$ και $\overline{zyx}=456$.
- Για $x-z=3$, από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα των ψηφίων $x+y+z$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ, \hat{\Gamma}=60^\circ$ και υποτείνουσα $B\Gamma=\alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον Μ της ΒΓ τέμνει τη διχοτόμο ΒΔ (το Δ είναι σημείο της ΑΓ) στο σημείο Κ και την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν. Έστω Λ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΔ.

1. Να αποδείξετε ότι: $N\Lambda \perp B\Delta$.
2. Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΒΝ, ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Έστω E το χωρίο που έχει πλευρές τις ΜΓ, ΑΓ και το τόξο $\overset{\frown}{AM}$ του κύκλου ω. Να υπολογίσετε το εμβαδό χωρίου E συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma=\alpha$.

Σημείωση: *Το χωρίο E είναι στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου ω.*



Σχήμα 2

Λύση

1. Έστω ότι οι ευθείες $\mathrm{KM}, \mathrm{A\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο N. Τότε

$$\mathrm{N\hat{K}\Delta} = \mathrm{B\hat{K}M} = 90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = 75^\circ .$$

Επίσης η γωνία $\mathrm{N\hat{\Delta}K}$ ως εξωτερική του τριγώνου $\mathrm{\Delta\Gamma B}$ ισούται με

$$\mathrm{N\hat{\Delta}K} = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = 60^\circ + \frac{30^\circ}{2} = 75^\circ .$$

Συνεπώς το τρίγωνο $\mathrm{NK\Delta}$ είναι ισοσκελές με $\mathrm{NK} = \mathrm{N\Delta}$. Αφού το Λ είναι μέσον της βάσης $\mathrm{K\Delta}$ του ισοσκελούς τριγώνου $\mathrm{NK\Delta}$, έπεται ότι: $\mathrm{N\Lambda} \perp \mathrm{B\Delta}$.

2. Το τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma N}$ είναι ισοσκελές με $\mathrm{N\Gamma} = \mathrm{NB}$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επομένως, το τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma N}$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\mathrm{BN} = \alpha$. Οι ΒΑ και ΝΜ είναι ύψη και διάμεσοι αυτού, οπότε $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{M\Gamma} = \dfrac{\alpha}{2}$ Ο κύκλος διαμέτρου BN έχει κέντρο, έστω Ο και περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Το τρίγωνο ΟΑΜ είναι ισοσκελές και έχει

$$\mathrm{A\hat{O}M} = 2 \cdot \mathrm{A\hat{B}\Gamma} = 2 \cdot \left(90^\circ - 60^\circ\right) = 60^\circ .$$

Επίσης $\mathrm{A\hat{O}B} = 2 \cdot \mathrm{\Gamma\hat{N}B} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$, οπότε $\mathrm{M\hat{O}B} = 60^\circ$ και το τρίγωνο ΟΜΒ είναι ισόπλευρο πλευράς $\dfrac{\alpha}{2}$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΒΟ είναι ρόμβος που αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $\dfrac{\alpha}{2}$, οπότε το ύψος του ΑΤ ισούται με το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς $\dfrac{\alpha}{2}$, δηλαδή

$$\mathrm{AT} = \frac{\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4} .$$

Το εμβαδόν του χωρίου E δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{E}\left(\Gamma\overset{\frown}{\mathrm{AM}}\right) = \mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma BO}\right) - \mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{AM}}\right). \qquad (1)$$

Έχουμε

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma MO}\right)=\left(\beta \acute{\alpha}\sigma\eta\right)\cdot\left(\acute{\upsilon}\psi o\varsigma\right)=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} \qquad (2)$$

Επίσης

$$\mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\frac{60^\circ}{360^\circ}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\pi\alpha^2}{24} \qquad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$\mathrm{E}\left(\Gamma\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma BO}\right)-\mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi\alpha^2}{24}=\frac{\left(3\sqrt{3}-\pi\right)\alpha^2}{24}.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο: $P(x)=4(x+4)^2-28(x+4)+48$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=6\sqrt{P(-5)}-4\sqrt{P(4)}\ .$$

Λύση

(α) $P(x)=4(x+4)^2-28(x+4)+48=4\left[(x+4)^2-7(x+4)+12\right]$

$=4\left(x^2+8x+16-7x-28+12\right)=4\left(x^2+x\right)=4x(x+1).$

(β) $A=6\sqrt{P(-5)}-4\sqrt{P(4)}=6\sqrt{-20(-5+1)}-4\sqrt{16(4+1)}=6\sqrt{80}-4\sqrt{80}=2\sqrt{80}=8\sqrt{5}$

Πρόβλημα 2

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$x(2x-1)(2x+1)+x=4x^3$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{A}=4031\cdot 4033\cdot 32256+32256$ είναι κύβος ενός ακεραίου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση

(α) $x(2x-1)(2x+1)+x=x\left(4x^2-1\right)+x=4x^3-x+x=4x^3.$

(β) Επειδή οι ακέραιοι 4031 και 4033 διαφέρουν κατά δύο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $2x-1=4031,\ 2x+1=4033$, οπότε θα είναι $x=2016$. Για να αντιστοιχήσουμε τον αριθμό Α στην προηγούμενη ταυτότητα, πρέπει να την πολλαπλασιάσουμε με τον ακέραιο $\frac{32256}{2016}=16$. Τότε αυτή γίνεται: $16x(2x-1)(2x+1)+16x=64x^3$, οπότε θέτοντας $x=2016$, έχουμε:

$$\mathrm{A}=4031\cdot 4033\cdot 32256+32256=64\cdot 2016^3=4^3\cdot 2016^3=(4\cdot 2016)^3=8064^3.$$

Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 8064.

Πρόβλημα 3

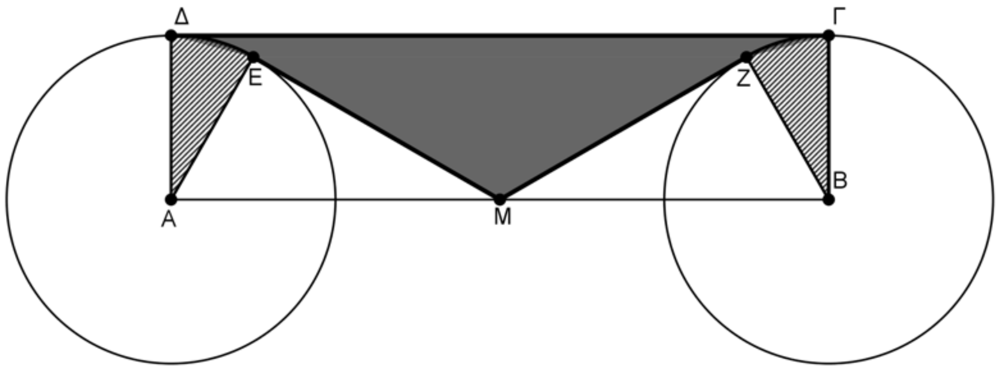
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=4\alpha$. Με κέντρα τα σημεία Α , Β και ακτίνα α γράφουμε κύκλους Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, η ΜΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Α και η ΜΖ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{\Delta\hat{A}E}$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου ΔΕΜΖΓ που περικλείεται από το τόξο ΔΕ , τα τμήματα ΕΜ, ΜΖ , το τόξο ΖΓ και το τμήμα ΓΔ .

Λύση

(α) Επειδή το Μ είναι το μέσον του ΑΒ θα έχουμε ότι $\text{ΜΑ} = 2\alpha$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΜ έχουμε $\eta\mu(\text{Ε}\hat{\text{Μ}}\text{Α}) = \dfrac{\text{ΕΑ}}{\text{ΑΜ}} = \dfrac{\alpha}{2\alpha} = \dfrac{1}{2}$, οπότε $\text{Ε}\hat{\text{Μ}}\text{Α} = 30°$, $\text{Ε}\hat{\text{Α}}\text{Μ} = 90° - 30° = 60°$ και συνεπώς $\text{Ε}\hat{\text{Α}}\Delta = 90° - 60° = 30°$.



Σχήμα 2

(β) Το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει, αν από το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδό των τριγώνων ΕΑΜ, ΜΖΒ και αφαιρέσουμε και τους κυκλικούς τομείς ΔΑΕ, ΖΒΓ. Προφανώς $(\text{ΑΒΓ}\Delta) = \alpha \cdot 4\alpha = 4\alpha^2$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $\text{ΕΜ}^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2 = 3\alpha^2 \Rightarrow \text{ΕΜ} = \alpha\sqrt{3}$, οπότε $(\text{ΕΑΜ}) = \dfrac{1}{2}\text{ΕΑ} \cdot \text{ΕΜ} = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$, και όμοια $(\text{ΒΖΜ}) = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$. Επιπλέον, ομοίως με το ερώτημα (α) υπολογίζουμε ότι $\text{Ζ}\hat{\text{Β}}\Gamma = 30^\circ$, οπότε έχουμε

$$\varepsilon\mu\beta\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha(\Delta\text{ΑΕ}) = \varepsilon\mu\beta\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha(\text{ΖΒ}\Gamma) = \frac{\pi\alpha^2}{12}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\varepsilon\mu\beta\gamma\rho\alpha\mu.\,\chi\omega\rho\acute{\iota}o\upsilon\left(\Delta\text{ΕΜΖ}\Gamma\right) = 4\alpha^2 - 2\cdot\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\pi\alpha^2}{12} = \alpha^2\left(4 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right).$$

Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\dfrac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις δίνει στο Βαγγέλη. Στη συνέχεια ο Βαγγέλης παίρνει τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\dfrac{1}{12}$ και δίνει στο Γιάννη τις υπόλοιπες. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι εξαπλάσιες από τις καραμέλες του Βαγγέλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Λύση.

Έστω α οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Γιάννης και β οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Βαγγέλης. Τότε ο Γιάννης κρατάει $\frac{3\alpha}{4}$ και δίνει στο Βαγγέλη $\frac{\alpha}{4}$. Και αφού σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες, πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 4. (1)

Αντίστοιχα, ο Βαγγέλης κρατάει $\frac{\beta}{12}$ και δίνει στο Γιάννη $\frac{11\beta}{12}$.

Επομένως, ο Γιάννης έχει συνολικά $\frac{3\alpha}{4}+\frac{11\beta}{12}$ καραμέλες, ενώ ο Βαγγέλης έχει $\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{12}$.

Επομένως πρέπει να ισχύει $6\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{12}\right)=\frac{3\alpha}{4}+\frac{11\beta}{12} \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{4}=\frac{5\beta}{12} \Leftrightarrow 9\alpha=5\beta$. (2)

Για να ισχύει η (2), πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 5. (3)

Από τις (1) και (3) συνάγουμε ότι το α πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $5\cdot 4=20$, οπότε η ελάχιστη τιμή του α είναι 20. Επομένως, από τη σχέση (2) παίρνουμε $\beta=36$.

Επομένως, ο ελάχιστος αριθμός από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $20+36=56$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}, \text{ αν δίνεται ότι } \alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4},\ \beta=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3},\ \gamma=-\frac{27}{16}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{4}=\frac{81}{16},\ \beta=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}=-\frac{27}{8},\ \gamma=-\frac{27}{16},$$

οπότε οι δύο όροι του Α γίνονται:

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3&=\left(\frac{81}{16}\right)^3+\left(-\frac{27}{8}\right)^3+\left(-\frac{27}{16}\right)^3=\left(\frac{3^4}{2^4}\right)^3+\left(-\frac{3^3}{2^3}\right)^3+\left(-\frac{3}{2}\right)^3\\&=\frac{3^{12}}{2^{12}}-\frac{3^9}{2^9}-\frac{3^9}{2^{12}}=\frac{3^{12}}{2^{12}}-\frac{2^3\cdot 3^9}{2^{12}}-\frac{3^9}{2^{12}}=\frac{3^{12}-2^3\cdot 3^9-3^9}{2^{12}}\\&=\frac{3^9\cdot\left(3^3-2^3-1\right)}{2^{12}}=\frac{3^9\cdot(27-8-1)}{2^{12}}=\frac{3^9\cdot 18}{2^{12}}=\frac{3^9\cdot 3^2\cdot 2}{2^{12}}=\frac{3^{11}}{2^{11}},\end{aligned}$$

$$\alpha\beta\gamma=\frac{81}{16}\cdot\left(-\frac{27}{8}\right)\cdot\left(-\frac{27}{16}\right)=\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{3^3}{2^3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3^{10}}{2^{11}}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\mathrm{A}=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\frac{3^{11}}{2^{11}}}{\frac{3^{10}}{2^{11}}}=\frac{3^{11}\cdot 2^{11}}{3^{10}\cdot 2^{11}}=3$$

Πρόβλημα 2

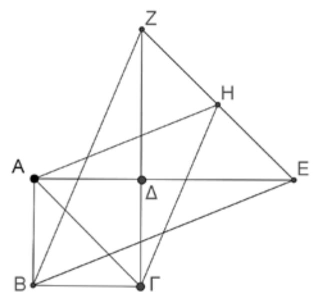
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{E}=\mathrm{B}\Delta$ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{Z}=\mathrm{B}\Delta$. Αν Η είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ, τότε:

(α) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΕ.

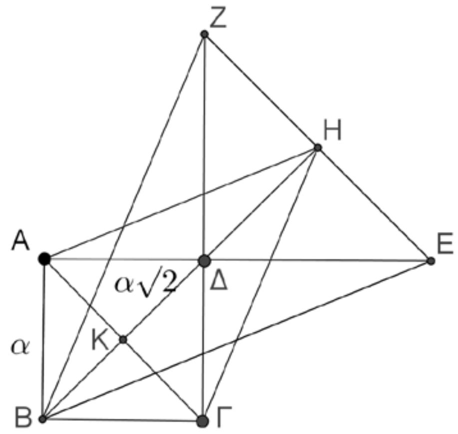
(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΓΗ

(γ) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΒΕΖ και ΑΓΗ.

Σημείωση: *Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.*



Λύση



Σχήμα 1

(α) Από την υπόθεση έχουμε: $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A = \alpha$ και $B\Delta = \Delta E = \Delta Z = \alpha\sqrt{2}$.
Τότε είναι $AE = \alpha + \alpha\sqrt{2}$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABE έχουμε:

$$BE = \sqrt{\left(\alpha + \alpha\sqrt{2}\right)^2 + \alpha^2} = \sqrt{\alpha^2\left(4 + 2\sqrt{2}\right)} = \alpha\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

(β) Επειδή H είναι το μέσο της βάσης EZ του τριγώνου ΔEZ η ευθεία ΔH θα είναι μεσοκάθετη της βάσης Το τρίγωνο ΔZE είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\Delta E = \Delta Z = \alpha\sqrt{2}$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε ότι:

$$EZ = \sqrt{E\Delta^2 + \Delta Z^2} = \sqrt{2\alpha^2 + 2\alpha^2} = 2\alpha .$$

Όμως και το τρίγωνο ΔHE είναι ορθογώνιο ισοσκελές, (ΔH κάθετη στη βάση EZ και $\Delta\hat{E}H = 45^\circ$), οπότε ότι: $\Delta H = HE = \frac{EZ}{2} = \alpha$. Έτσι έχουμε $\Delta H = \alpha = \Delta A = \Delta\Gamma$, οπότε το Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου AΓH.

(γ) H ευθεία BH είναι μεσοκάθετη της διαγωνίου AΓ και έστω ότι την τέμνει στο σημείο K. Ομοίως όπως στο ερώτημα (α), μπορούμε να βρούμε ότι:

$$BZ = \alpha\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = BE .$$

Επομένως και το σημείο B ανήκει στη μεσοκάθετη του EZ, οπότε τα σημεία B, Δ και H είναι συνευθειακά. Τότε είναι

$$KH = K\Delta + \Delta H = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} + \alpha = \frac{\alpha\left(2 + \sqrt{2}\right)}{2}, BH = B\Delta + \Delta H = \alpha\sqrt{2} + \alpha ,\ A\Gamma = \alpha\sqrt{2},$$

Επομένως, έχουμε

$$E\left(A\Gamma H\right) = \frac{1}{2} \cdot \alpha\sqrt{2} \cdot \frac{\alpha\left(2 + \sqrt{2}\right)}{2} = \frac{\alpha^2\left(1 + \sqrt{2}\right)}{2},$$

$$E\left(BEZ\right) = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot \left(\alpha + \alpha\sqrt{2}\right) = \alpha^2\left(1 + \sqrt{2}\right),$$

οπότε ο ζητούμενος λόγος εμβαδών είναι: $\frac{E\left(BEZ\right)}{E\left(A\Gamma H\right)} = 2$.

Πρόβλημα 3

(α) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5.

(β) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 6 είτε του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5.

Λύση

(α) Τα πολλαπλάσια του 9 μεταξύ 1 και $10^5 = 100000$ είναι της μορφής $9x$, όπου x θετικός ακέραιος. Έχουμε

$$1 < 9x < 100000 \Leftrightarrow \frac{1}{9} < x < \frac{100000}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{9} < x < 11111 + \frac{1}{9} \Leftrightarrow x \in \{1, 2, ..., 11111\},$$

αφού ο x είναι θετικός ακέραιος. Επομένως, μεταξύ του 1 και του 100000 υπάρχουν 11111 πολλαπλάσια του 9.

(β) Βρήκαμε στο ερώτημα (α) ότι μεταξύ του 1 και του 100000 υπάρχουν 11111 πολλαπλάσια του 9. Ομοίως βρίσκουμε ότι μεταξύ 1 και 100000 υπάρχουν 16666 πολλαπλάσια του 6. Από τα παραπάνω πολλαπλάσια, μετριούνται δύο φορές αυτά που είναι κοινά πολλαπλάσια του 6 και του 9. Αυτά είναι τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ(6,9) = 18. Όπως στο ερώτημα (α), βρίσκουμε ότι μεταξύ 1 και 100000 υπάρχουν 5555 πολλαπλάσια του 18. Επομένως μεταξύ των αριθμών 1 και 100000 υπάρχουν

$$11111 + 16666 - 5555 = 27777 - 5555 = 22222$$

πολλαπλάσια του 6 είτε του 9.

Πρόβλημα 4

Μια μέρα ο Γιώργος καθώς πηγαίνει από το σπίτι στο σχολείο και έχει διανύσει το $\alpha\%$ της απόστασης, βλέπει ότι έχει αργήσει. Αποφασίζει να γυρίσει πίσω στο σπίτι, να πάρει το ποδήλατο και να πάει με αυτό στο σχολείο. Αν υποθέσουμε ότι ο Γιώργος περπατάει με 6 χιλιόμετρα την ώρα, ενώ με το ποδήλατο πηγαίνει με 15 χιλιόμετρα την ώρα, για ποιες τιμές του α συμφέρει να γυρίσει πίσω για να χρησιμοποιήσει το ποδήλατο;

Λύση ($1^{ος}$ τρόπος)

Έστω x τα χιλιόμετρα είναι η απόσταση από το σπίτι στο σχολείο.

Με τα πόδια ο Γιώργος κάνει τη διαδρομή σε $\frac{x}{6}$ ώρες. Αν συνεχίσει την αρχική πορεία του, αφού έχει διανύσει τα $\frac{\alpha}{100}$ θα χρειαστεί ακόμη

$$\frac{x}{6} - \frac{\alpha}{100} \cdot \frac{x}{6} = \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \cdot \frac{x}{6} \text{ ώρες}$$

για να φθάσει στο σχολείο.

Αν επιστρέψει να πάρει το ποδήλατο, θα χρειαστεί $\frac{\alpha}{100} \cdot \frac{x}{6}$ ώρες να φθάσει στο σημείο που ξεκίνησε και στη συνέχεια θα χρειαστεί άλλες $\frac{x}{15}$ ώρες για να φθάσει στο σχολείο του. Άρα ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί θα είναι:

$$\frac{\alpha x}{600} + \frac{x}{15} = \left(\frac{\alpha}{600} + \frac{1}{15}\right) \cdot x \text{ ώρες.}$$

Για να τον συμφέρει η χρησιμοποίηση του ποδηλάτου πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha}{600} + \frac{1}{15}\right) \cdot x \le \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \cdot \frac{x}{6} \overset{x \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{\alpha}{600} + \frac{1}{15} \le \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \cdot \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{600} + \frac{1}{15} \le \frac{100 - \alpha}{600} \Leftrightarrow \alpha + 40 \le 100 - \alpha \Leftrightarrow 2\alpha \le 60 \Leftrightarrow \alpha \le 30.$$

$2^{ος}$ τρόπος

Ας υποθέσουμε ότι ο Γιώργος αποφάσισε να επιστρέψει σπίτι όταν είχε καλύψει x χιλιόμετρα και ότι από εκείνο το σημείο ως το σχολείο η απόσταση είναι y χιλιόμετρα. Επομένως, αν συνέχιζε το περπάτημα, για να φτάσει στο σχολείο ήθελε ακόμη χρόνο $\frac{y}{6}$ (απόσταση προς ταχύτητα). Ενώ τελικά έκανε χρόνο $\frac{x}{6}$ μέχρι να γυρίσει ξανά στο σπίτι και επιπλέον $\frac{x+y}{15}$ μέχρι να φτάσει από το σπίτι στο σχολείο με το ποδήλατο, δηλαδή ο χρόνος που έκανε συνολικά είναι

$\frac{x}{6}+\frac{x+y}{15}$. Για να τον συμφέρει αυτό, θα πρέπει αυτός ο χρόνος να είναι μικρότερος ή ίσος από τον χρόνο που χρειαζόταν αν συνέχιζε με τα πόδια, δηλαδή η επιλογή του ήταν καλή αν

$$\frac{x}{6}+\frac{x+y}{15}\le\frac{y}{6}\Leftrightarrow 5x+2(x+y)\le 5y\Leftrightarrow 7x\le 3y\Leftrightarrow 10x\le 3x+3y\Leftrightarrow\frac{x}{x+y}\le\frac{3}{10},$$

δηλαδή αν το ποσοστό είναι μικρότερο ή ίσο του 30%.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right)-\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2,$$

αν δίνεται ότι $\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\beta=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\gamma=-\frac{18}{2^3}$, $\delta=\frac{1}{2^3}$.

Λύση

Έχουμε ότι $\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$, $\beta=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$, $\gamma=-\frac{18}{8}=-\frac{9}{4}$, $\delta=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$,

οπότε θα είναι

$$\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{81}{16}+\frac{1}{64}=\frac{325}{64},\ \gamma^2+\delta^2=\left(-\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{81}{16}+\frac{1}{64}=\frac{325}{64},$$

$$\alpha\gamma+\beta\delta=\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{8}=-\frac{81}{16}-\frac{1}{64}=-\frac{325}{64}\Rightarrow\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2=\left(-\frac{325}{64}\right)^2.$$

Άρα έχουμε: $\mathrm{A}=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right)-\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2=\frac{325}{64}\cdot\frac{325}{64}-\left(-\frac{325}{64}\right)^2=0$.

2^{ος} Τρόπος

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)-(\alpha\gamma+\beta\delta)^2=\\&=\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\beta^2\delta^2-\alpha^2\gamma^2-2\alpha\beta\gamma\delta-\beta^2\delta^2=\\&=\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta\gamma\delta=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2.\end{aligned}$$

Άρα είναι:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{8}-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{8}\right)^2=0.$$

Πρόβλημα 2

Μία ομάδα α εργατών τελειώνει το $\frac{1}{4}$ ενός έργου στο $\frac{1}{3}$ μιας ημέρας. Πόσες τέτοιες ομάδες εργατών της ιδίας απόδοσης χρειάζονται για να τελειώσουν 15 ίδια έργα σε 5 ημέρες;

Λύση

Έχουμε τα ακόλουθα δεδομένα:

Η μία ομάδα = α εργάτες τελειώνει το $\frac{1}{4}$ ενός έργου στο $\frac{1}{3}$ μιας ημέρας

Πόσοι εργάτες (έστω x) τελειώνουν 15 έργα σε 5 ημέρες;

Επειδή τα ποσά**: εργάτες – έργο, είναι ανάλογα**, ενώ τα ποσά : **εργάτες – ημέρες , είναι αντιστρόφως ανάλογα**, έχουμε ότι:

$$x=\alpha\cdot\frac{15}{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{5}=\alpha\cdot 60\cdot\frac{1}{15}=4\alpha.$$

Επομένως θα χρειαστούν 4 τέτοιες ομάδες εργατών.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε πολυώνυμο $P(x)=a(x+2)^2+b(x+3)+c$ όπου οι αριθμοί a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $x>y$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{P(x)-P(y)}{x-y}$ είναι θετικός ακέραιος.

(β) Αν ο αριθμός $P(8)$ είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $P(2018)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

(α) Έχουμε ότι

$$P(x)=a(x+2)^2+b(x+3)+c=\alpha x^2+(b+4a)x+4a+3b+c$$

Επομένως

$$P(x)-P(y)=a(x^2-y^2)+(b+4a)(x-y)=(x-y)(a(x+y)+b+4a),$$

οπότε

$$\frac{P(x)-P(y)}{x-y}=\frac{(x-y)(a(x+y)+b+4a)}{x-y}=a(x+y)+b+4a$$

που είναι θετικός ακέραιος, αφού οι αριθμοί a,b,c,x,y είναι θετικοί ακέραιοι.

(β) Από το πρώτο ερώτημα, για $x=2018,\ y=8$ έχουμε ότι

$$\frac{P(2018)-P(8)}{2010}=\kappa \text{ ακέραιος},$$

δηλαδή

$$P(2018)-P(8)=2010\kappa, \text{όπου } \kappa \text{ ακέραιος} \Rightarrow P(2018)=P(8)+2010\kappa, \text{όπου } \kappa \text{ ακέραιος}$$

Όμως το $2010=3\cdot 670$ είναι πολλαπλάσιο του 3, όπως και το $P(8)$ από την υπόθεση, οπότε και το $P(2018)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και $\widehat{A} = 72°$. Ονομάζουμε Δ το ίχνος του ύψους από την κορυφή Γ και Ε το συμμετρικό του Α ως προς την ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ΓΕ περνά από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

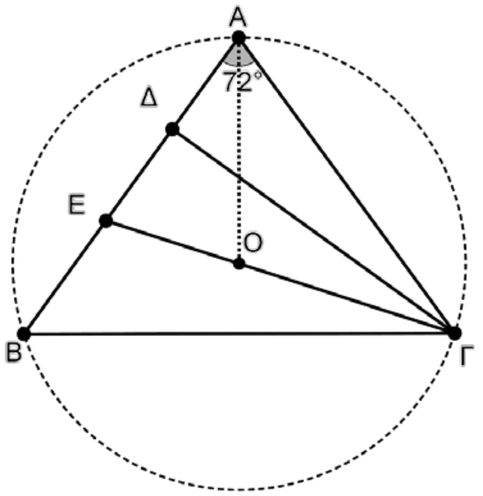
Σημείωση: *Ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου είναι ο κύκλος που περνάει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.*

Λύση

Θεωρούμε το ύψος από την κορυφή Α που τέμνει τη ΓΕ στο σημείο Ο. Θα αποδείξουμε ότι το Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή ότι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ.

Το ύψος από την κορυφή Α είναι και μεσοκάθετος της ΒΓ, άρα το Ο ως σημείο της θα ισαπέχει από τα Β,Γ, δηλαδή ΟΒ=ΟΓ.

Επιπλέον το Ε το συμμετρικό του Α ως προς την ΓΔ, το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές, επομένως $\widehat{\Gamma E A} = 72°$, οπότε $\widehat{E\Gamma A} = 36°$ (1). Επειδή όμως η ΑΟ είναι ύψος και διχοτόμος, θα ισχύει ότι $\widehat{OA\Gamma} = 36°$, οπότε λόγω της (1) θα ισχύει ΟΑ = ΟΓ.



Σχήμα 2

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma+\alpha+\beta-\gamma\,,$$

αν δίνεται ότι $\alpha=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\beta=\left(-2\right)^{-2}$, $\gamma=-\frac{1}{2^3}$.

Λύση

Έχουμε ότι: $\alpha=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8},\ \beta=\left(-2\right)^{-2}=\frac{1}{\left(-2\right)^2}=\frac{1}{4},\ \gamma=-\frac{1}{2^3}=-\frac{1}{8}$,

οπότε θα είναι

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}&=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma+\alpha+\beta-\gamma\\
&=\left(-\frac{1}{8}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(-\frac{1}{8}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{8}\right)\\
&=-\frac{1}{8^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{8^3}-\frac{3}{4\cdot 8^2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=-\frac{1}{\left(2^3\right)^3}+\frac{1}{\left(2^2\right)^3}-\frac{1}{\left(2^2\right)^3}-\frac{3}{2^2\cdot\left(2^3\right)^2}+\frac{1}{4}\\
&=-\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^9}-\frac{3}{2^2\cdot 2^6}+\frac{1}{4}=-\frac{2}{2^9}+\frac{1}{2^6}-\frac{3}{2^8}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^6}-\frac{3}{2^8}+\frac{1}{4}\\
&=\frac{-1+4-3}{2^8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.
(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό επταψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.
(γ) Μπορούμε να βρούμε το μεγαλύτερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000;

Λύση
(α) Για να διαπιστώσουμε ποια ψηφία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αναλύουμε τον ακέραιο 63000 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε: $63000=2^3\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7$, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα όλους τους ακέραιους: 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 7, χωρίς να αποκλείεται το ψηφίο 1, αφού δεν επηρεάζει το γινόμενο των ψηφίων.
Προφανώς ο ακέραιος 222335557 έχει γινόμενο ψηφίων 630000. Επειδή ζητάμε το μικρότερο δυνατό ακέραιο με την ιδιότητα αυτή, θα πρέπει να βρούμε τρόπους μείωσης του αριθμού των ψηφίων που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτό μπορεί να γίνει, αν χρησιμοποιήσουμε ψηφία που προέρχονται από γινόμενα των παραπάνω αριθμών και ειδικότερα από γινόμενα των πέντε πρώτων στη σειρά ακέραιων. Αυτά είναι το $8=2\cdot 2\cdot 2$ και το $9=3\cdot 3$ που είναι και ο ελάχιστος δυνατός αριθμός τέτοιων ψηφίων. Άλλη δυνατότητα είναι να πάρουμε τρία ψηφία $2,\ 4=2\cdot 2,\ 9=3\cdot 3$ ή $2,\ 6=2\cdot 3,\ 6=2\cdot 3$. Έτσι

λαμβάνουμε τον πενταψήφιο ακέραιο $\mathbf{A = 55}5\mathbf{789}$ ως τον μικρότερο δυνατό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο 63000.

(β) Σκεπτόμενοι ομοίως με το ερώτημα (α), για την εύρεση εξαψήφιου ακέραιου έχουμε τις δυνατότητες των ακέραιων 2455599 ή 2555669. Όμως υπάρχει και η δυνατότητα χρησιμοποίησης του ψηφίου 1 στην αρχή του ακέραιου 555789, οπότε προκύπτει ο ακέραιος $\mathbf{155}5\mathbf{789}$ που είναι μικρότερος από τους δύο προηγούμενους.

(γ) Αν υποθέσουμε ότι βρήκαμε το μεγαλύτερο δυνατό ακέραιο Α του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000, τότε διαπιστώνουμε ότι υπάρχει ακέραιος μεγαλύτερος από τον Α που ικανοποιεί την ίδια ιδιότητα. Αυτός προκύπτει από τον Α με τοποθέτηση στο τέλος του ενός επιπλέον ψηφίου ίσου με το 1. Αυτό είναι άτοπο, από την υπόθεση για τον ακέραιο Α.

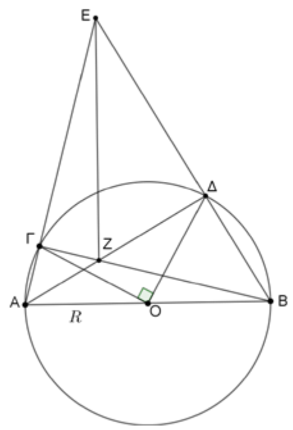
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος διαμέτρου $AB = 2R$ και η γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta = 90^\circ$. Οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ζ, ενώ οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ε.

(α) Βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{B}\Delta$.

(β) Να αποδείξετε ότι: $EZ = 2R$.

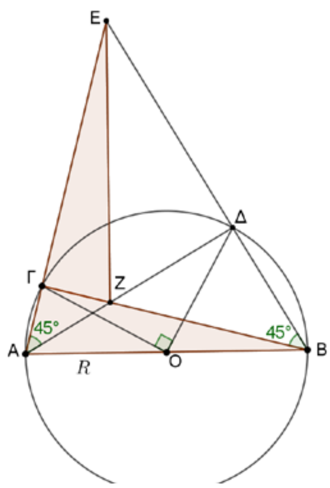
Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*



Λύση

(α) Οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{B}\Delta$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ στο οποίο βαίνει και η επίκεντρη γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta = 90^\circ$. Άρα είναι

$$\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}\Delta}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$



Σχήμα 2

(β) Επειδή $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 90^\circ$ και $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = 45^\circ$, το τρίγωνο $\mathrm{A\Gamma Z}$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma Z}$. Επειδή $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = 180^\circ - \mathrm{A\Gamma B} = 90^\circ$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta = 45^\circ$, το τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma E}$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{\Gamma E}$.
Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΕΖ έχουν τις δύο κάθετες πλευρές του ίσες μία προς μία, δηλαδή μία κάθετη πλευρά ίση $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma Z}$ και $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{\Gamma E}$. Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\mathrm{EZ} = \mathrm{AB} = 2R$.

Πρόβλημα 4
Έχουμε πέντε κάρτες Α, Β, Γ, Δ, Ε που πάνω σε καθεμία από αυτές είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος. Με αυτές τις κάρτες σχηματίζονται συνολικά δέκα διαφορετικές τριάδες. Για καθεμία από αυτές τις τριάδες, καταγράφουμε το άθροισμα των τριών καρτών. Διαπιστώνουμε ότι προκύπτουν δύο μόνο διαφορετικά αθροίσματα, το 15 και το 13. Να προσδιορίσετε τους δυνατούς αριθμούς των πέντε καρτών.

Λύση
Επειδή τα δυνατά αθροίσματα των τριάδων είναι μόνο δύο, το 15 και το 13 συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούν να υπάρχουν τρεις κάρτες με διαφορετικούς αριθμούς.
Πράγματι, αν υπήρχαν τρεις κάρτες με διαφορετικούς μεταξύ τους αριθμούς , έστω x, y, z και οι άλλες δύο κάρτες είχαν τους αριθμούς α και β, τότε θα είχαμε συνολικά τρία διαφορετικά αθροίσματα της μορφής $\alpha+\beta+x, \alpha+\beta+y, \alpha+\beta+z,$ το οποίο είναι αντίθετο στην υπόθεση.
Επίσης συμπεραίνουμε ότι δεν είναι δυνατόν όλες οι κάρτες να έχουν τον ίδιο αριθμό, γιατί τότε θα είχαμε ένα μόνο δυνατό άθροισμα τριάδων.
Επομένως πάνω στις κάρτες υπάρχουν δύο διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι, έστω x, y , με $x > y$. Τότε τα δυνατά αθροίσματα τριάδων, διατεταγμένα από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο, είναι:

$$x+x+x = 3x > x+x+y = 2x+y > x+y+y = x+2y > y+y+y = 3y.$$

Επειδή τα δυνατά αθροίσματα είναι μόνο δύο, παρατηρούμε ότι ο αριθμός y πρέπει να υπάρχει μία μόνο φορά, γιατί:

- Αν το y υπάρχει σε τέσσερις κάρτες, τότε το x θα υπάρχει μόνο σε μία κάρτα και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $x+2y=15,\ 3y=13$, που δεν δίνει ακέραιες τιμές για τα x, y.
- Αν το y υπάρχει σε τρεις κάρτες, τότε το x θα υπάρχει σε δύο κάρτες και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $2x+y > x+2y > 3y$, δηλαδή τρία διαφορετικά.
- Αν το y υπάρχει σε δύο κάρτες, τότε το x θα υπάρχει σε τρεις κάρτες και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $3x > 2x+y > x+2y$, δηλαδή τρία διαφορετικά.

Επομένως, τα δυνατά αθροίσματα είναι τα :

$$x+x+x = 3x,\ x+x+y = 2x+y, \quad \text{με} \quad 3x > x+2y,$$

οπότε έχουμε:

$$3x = 15,\ 2x+y = 13 \Leftrightarrow x = 5,\ y = 3.$$

Επομένως, μία κάρτα έχει τον αριθμό 3 και οι υπόλοιπες τέσσερις έχουν τον αριθμό 5.