Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-1}=3.$$

Λύση ($1^{ος}$ τρόπος)
Για $x\in\mathbb{R}-\{1,2,3\}$ έχουμε:

$$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-1}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3}-1+\frac{2}{x-2}-1+\frac{3}{x-1}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-x}{x-3}+\frac{4-x}{x-2}+\frac{x}{x-1}=0 \Leftrightarrow (4-x)\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4-x=0 \text{ ή } \frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } 3x^2-12x+11=0$$

$$\Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{12\pm\sqrt{12}}{6} \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{6\pm\sqrt{3}}{3}.$$

$2^{ος}$ τρόπος
Για $x\in\mathbb{R}-\{1,2,3\}$ με απαλοιφή παρανομαστών έχουμε:

$$3(x-1)(x-2)(x-3)=(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-3)+3(x-2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^3-6x^2+11x-6\right)=x^2-3x+2+2\left(x^2-4x+3\right)+3\left(x^2-5x+6\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-18x^2+33x-18=6x^2-26x+26 \Leftrightarrow 3x^3-24x^2+59x-44=0$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της τελευταίας εξίσωσης είναι: $\pm1,\pm2,\pm4,\pm11,\pm22,\pm44$, από τις οποίες μόνο το 4 ικανοποιεί την εξίσωση. Έτσι με το σχήμα Horner έχουμε

$$3x^3-24x^2+59x-44=(x-4)\left(3x^2-12x+11\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-4=0 \text{ ή } 3x^2-12x+11=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{6\pm\sqrt{3}}{3}.$$

Πρόβλημα 2
Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha\ ,\alpha\ ,\alpha_6,\alpha_7$ θετικοί ακέραιοι που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Δίνεται επίσης ότι το άθροισμά τους είναι τέλειος κύβος και το άθροισμα των 5 μεσαίων όρων $\alpha_2,\alpha_3,\alpha\ ,\alpha_5,\alpha_6$, είναι τέλειο τετράγωνο. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του όρου α_4.

Λύση

Έστω x ο τέταρτος στη σειρά αριθμός. Τότε οι δεδομένοι αριθμοί θα έχουν τη μορφή:

$$\alpha_1 = x-3d, \alpha_2 = x-2d, \alpha_3 = x-d, \alpha_4 = x, \alpha_5 = x+d, \alpha_6 = x+2d, \alpha_7 = x+3d .$$

Επομένως το άθροισμά τους ισούται με $7x$ και το άθροισμα των 5 μεσαίων ισούται με $5x$. Επομένως, θα πρέπει να βρούμε το ελάχιστο φυσικό αριθμό x που είναι τέτοιος, ώστε ο $7x$ ναι είναι τέλειος κύβος και ο $5x$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

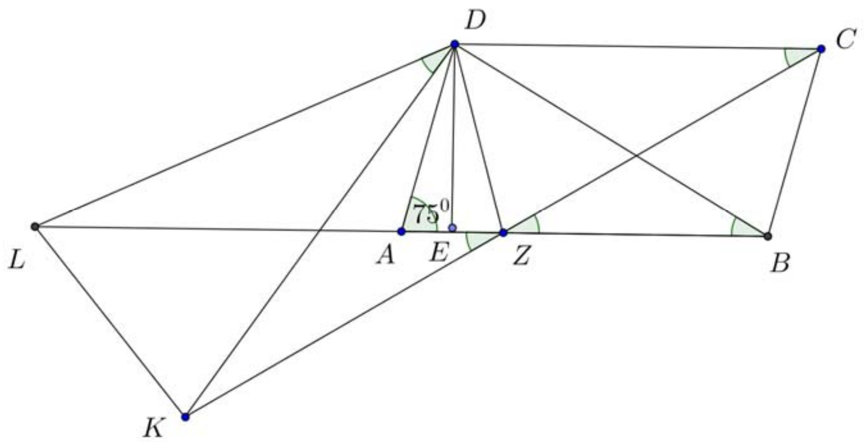
Για να είναι ο $7x$ τέλειος κύβος, θα πρέπει ο x να είναι πολλαπλάσιο του 7^2, ενώ για να είναι και ο $5x$ να είναι τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει ο x να είναι πολλαπλάσιο του 5. Για να παραμείνει όμως το $7x$ τέλειος κύβος, θα πρέπει το x να είναι πολλαπλάσιο του 5^3. Τελικά, το x πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $5^3 \cdot 7^2$, οπότε η ελάχιστη τιμή του όρου α_4 είναι $5^3 \cdot 7^2$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $ABCD$ τέτοιο ώστε $AB = BD = CD$ και με τη γωνία $\hat{A} = 75^\circ$. Φέρουμε το ύψος του DE, όπου E σημείο της πλευράς AB. Έστω Z το συμμετρικό της κορυφής A ως προς κέντρο το σημείο E. Έστω επίσης K το

συμμετρικό της κορυφής C ως προς κέντρο το σημείο Z και L το συμμετρικό της κορυφής B ως προς κέντρο το σημείο A. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $K\hat{D}L$.

Λύση



Σχήμα 4

Έχουμε $DZ = DA$, λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία του ύψους DE. Επίσης είναι $DA = BC$, από το παραλληλόγραμμο $ABCD$. Επομένως θα είναι $DZ = BC$. Επιπλέον

$$D\hat{Z}B = 180^\circ - D\hat{Z}A = 180^\circ - D\hat{A}B = A\hat{B}C .$$

Επομένως τα τρίγωνα DZB και BC έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($DZ = BC$ και τη B κοινή) και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες. Άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

- $DB = ZC \Rightarrow AB = ZC \Rightarrow 2 \cdot AB = 2 \cdot ZC \Rightarrow BL = CK$
- $Z\hat{B}D = CZB \Rightarrow Z\hat{B}D = D\hat{C}Z$, αφού από $DC \parallel ZB$ ισχύει ότι: $C\hat{Z}B = D\hat{C}Z$.

Έτσι τα τρίγωνα DBL και DCK έχουν: $DB = DC$, $BL = CK$ και $D\hat{C}K = D\hat{B}L$, οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους DL και DK ίσες και επιπλέον $D\hat{L}B = D\hat{K}C$, οπότε το τετράπλευρο $DLKZ$ είναι εγγράψιμο. Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} K\hat{D}L = K\hat{Z}L = B\hat{Z}C & \quad \text{(ως κατά κορυφή)} \\ = Z\hat{B}D & \quad \text{(από τα ίσα τρίγωνα } DZB \text{ και } ZBC\text{)} \\ = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ & \quad \text{(από το ισοσκελές τρίγωνο } ABD\text{).} \end{aligned}$$

Σημείωση. *Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι με το μετασχηματισμό στροφής με κέντρο το σημείο D κατά γωνία $B\hat{D}C = 30^\circ$, το τρίγωνο CDK θα συμπέσει με το τρίγωνο BDL, οπότε $K\hat{D}L = 30^\circ$.*

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 4x^2 + kx + m$ και υποθέτουμε ότι οι ρίζες του είναι διακεκριμένες και ανήκουν στο διάστημα $(0,1)$. Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον ένας από τους k, m δεν είναι ακέραιος.

Λύση

Έστω $0 < x_1 < x_2 < 1$ οι ρίζες του $f(x)$. Τότε:

$$f(x) = 4(x - x_1)(x - x_2) \qquad (1).$$

Υποθέτουμε ότι οι k, m είναι ακέραιοι. Τότε οι αριθμοί $f(0) = m$ και $f(1) = 4 + k + m$ είναι ακέραιοι . Αφού το πρόσημο του τριωνύμου είναι ομόσημο του 4 εκτός των ριζών και οι αριθμοί 0 και 1 είναι εκτός των ριζών, έπεται ότι $f(0) > 0$ και $f(1) > 0$, οπότε, αφού είναι ακέραιοι, θα είναι $f(0) \geq 1$ και $f(1) \geq 1$. Από την (1) για $x = 0$ και $x = 1$ παίρνουμε: $4x_1x_2 \geq 1$ και $4(1 - x_1)(1 - x_2) \geq 1$. Πολλαπλασιάζοντας τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$16x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \geq 1. \qquad (2)$$

Όμως ισχύουν:

$$4x_1(1 - x_1) \leq 1 \Leftrightarrow (2x_1 - 1)^2 \geq 0 \text{ και } 4x_2(1 - x_2) \leq 1 \Leftrightarrow (2x_2 - 1)^2 \geq 0 \quad (3)$$

οπότε με πολλαπλασιασμό των δύο τελευταίων κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$16x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \leq 1. \qquad (4)$$

Επομένως πρέπει να έχουμε ισότητα:

$$16x_1\left(1 - x_1\right)x_2\left(1 - x_2\right) = 1, \qquad (5)$$

η οποία, λόγω των (3), ισχύει μόνον όταν $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$. Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς υποθέσαμε ότι οι ρίζες είναι διακεκριμένες.

Επομένως, δεν είναι δυνατόν να είναι και δύο αριθμοί k και m ακέραιοι.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\alpha_1 = (2-x)^2$, $\alpha_2 = 2^2 + x^2, \ldots$, όπου x πραγματικός αριθμός. Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του $n, (n>1)$, για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λύση

(α) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $\omega = 2^2 + x^2 - (2-x)^2 = 4x$. Επομένως το άθροισμα των n πρώτων όρων της θα είναι:

$$S_n = \frac{\left[2(2-x)^2 + 4(n-1)x\right]n}{2} = \left(x^2 + 2(n-3)x + 4\right)n.$$

(β) Ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με

$$\frac{S_n}{n} = x^2 + 2(n-3)x + 4$$

και είναι τριώνυμο μεταβλητής x. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4(n-3)^2 - 16 = 4\left(n^2 - 6n + 5\right)$. Επομένως το τριώνυμο ισούται με τέλειο τετράγωνο μιας πολυωνυμικής παράστασης του x, αν και μόνον, αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow n^2 - 6n + 5 = 0 \Leftrightarrow n = 1$ ή $n = 5$.

Η τιμή $n = 1$ απορρίπτεται, γιατί $n > 1$. Επομένως, για $n = 5$ είναι

$$\frac{S_5}{5} = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2.$$

Αν ζητήσουμε οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση του x, τότε έχουμε $\frac{S_n}{n} = x^2 + 2(n-3)x + 4 \geq 0$, για $x \in \mathbb{R}$, εφόσον $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq n \leq 5$. Τότε, για $n \in \{2,3,4,5\}$ ισχύει: $\frac{S_n}{n} = \left(\sqrt{x^2 + 2(n-3)x + 4}\right)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση

$$10x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$10x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow 10x^3 - \left(6x^2 + 12x + 8\right) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση που είναι μέσα στην παρένθεση γράφεται:

$$6x^2 + 12x + 8 = \left(x^3 + 6x^2 + 12x + 8\right) - x^3 = (x+2)^3 - x^3,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται:

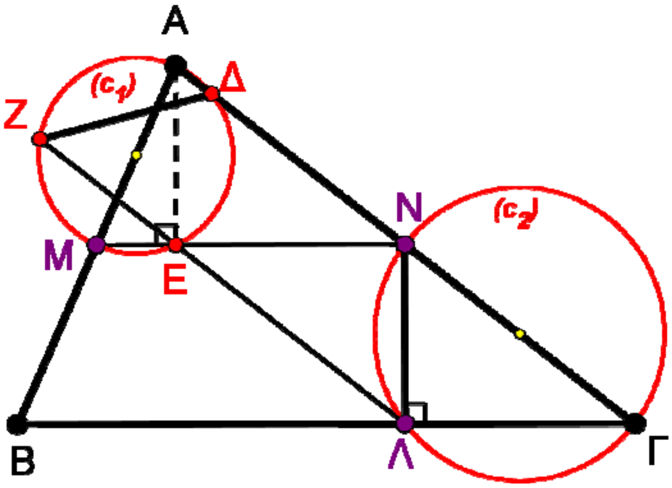
$$10x^3 - \left(6x^2 + 12x + 8\right) = 0 \Leftrightarrow 10x^3 - (x+2)^3 + x^3 = 0 \Leftrightarrow 11x^3 = (x+2)^3$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{11} = x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{11} - 1}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) και τα μέσα M, N των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_1) έχει διάμετρο την AM και τέμνει τις $A\Gamma, MN$ στα σημεία Δ, E, αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_2) έχει διάμετρο την ΓN και τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο Λ. Η $E\Lambda$ τέμνει το κύκλο (c_1) στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $Z\Delta N\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



Σχήμα 4

Η γωνία $A\hat{E}M$ είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη (στο κύκλο (c_1)) και βαίνει στη διάμετρο AM του κύκλου (c_1), οπότε θα είναι:

$$AE \perp MN \qquad (1).$$

Η γωνία $N\hat{\Lambda}\Gamma$ είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη (στο κύκλο (c_2)) και βαίνει στη διάμετρο $N\Gamma$ του κύκλου (c_2), οπότε θα είναι

$$N\Lambda \perp B\Gamma \qquad (2).$$

Τα σημεία M, N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε θα είναι:

$$MN = // \frac{B\Gamma}{2} \qquad (3).$$

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ συμπεραίνουμε ότι: $AE = \Lambda N = \frac{\upsilon_\alpha}{2}$ και $AE // \Lambda N$.

Άρα το τετράπλευρο $AE\Lambda N$ είναι παραλληλόγραμμο.

Το τετράπλευρο $A\Delta EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο , διότι είναι τραπέζιο $EZ \parallel A\Delta$, εγγεγραμμένο στον κύκλο (c_1). Άρα $AE = \Delta Z$ οπότε θα είναι και $\Delta Z = N\Lambda$.

Δηλαδή το τετράπλευρο $\Delta Z\Lambda N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (a,b) που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\frac{a}{b}+\frac{17b}{36a}$ να είναι ακέραιος.

Λύση

Θέλουμε $\frac{a}{b}+\frac{17b}{36a}=\kappa$, όπου κ είναι ένας ακέραιος. Θέτουμε $\frac{a}{b}=x$ και τότε η σχέση γράφεται ως $x+\frac{17}{36x}=\kappa \Leftrightarrow 36x^2-36\kappa x+17=0$ (1) και ουσιαστικά ψάχνουμε τις ρητές λύσεις της (1). Για να έχει ρητές λύσεις η (1) πρέπει η διακρίνουσα να είναι τέλειο τετράγωνο. Δηλαδή θέλουμε $\Delta=(36\kappa)^2-4\cdot 36\cdot 17=(2\cdot 6)^2(9\kappa^2-17)$ να είναι τέλειο τετράγωνο, οπότε θέλουμε $9\kappa^2-17=s^2$ για κάποιον θετικό ακέραιο s.

Τότε $(3\kappa)^2-s^2=17 \Leftrightarrow (3\kappa-s)(3\kappa+s)=17$ και αφού ο 17 είναι πρώτος και οι κ, s θετικοί ακέραιοι, έπεται ότι $\begin{cases} 3\kappa-s=1 \\ 3\kappa+s=17 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa=3,\ s=8$.

Για $\kappa=3$ η παραπάνω εξίσωση έχει λύσεις τις $x_1=\frac{17}{6}$ και $x_2=\frac{1}{6}$, οπότε $\frac{a}{b}=\frac{17}{6}$ ή $\frac{a}{b}=\frac{1}{6}$, οπότε έχουμε για λύσεις τις $(a,b)=(17t,6t)$ ή $(a,b)=(t,6t)$ όπου t θετικός ακέραιος.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες μεταξύ των παραμέτρων $a,b\in\mathbb{R}, ab\neq 0$, έτσι ώστε η εξίσωση

$$x^2+ax+b=a|x|$$

να έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο $\mathbb{R}$.
Είναι δυνατόν η εξίσωση να έχει τρεις διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $a\neq 0$ και $b\neq 0$.
Για $x\geq 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2+b=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-b},\ \text{εφόσον } b<0. \qquad (1)$$

Επομένως η εξίσωση έχει μία μόνο θετική ρίζα στο $\mathbb{R}$ την $x=\sqrt{-b}$, αν, και μόνον αν, $b<0.$ Αν $b>0$ η εξίσωση δεν έχει καμία λύση στους πραγματικούς αριθμούς.
Για $x<0$ η εξίσωση γίνεται

$$x^2+2ax+b=0, \qquad (2)$$

με διακρίνουσα $\Delta=4\left(a^2-b\right)$. Επομένως, η εξίσωση (2) έχει 2 ρίζες στο $\mathbb{R}$, αν και μόνον αν, $a^2>b$. Όμως για να έχει δύο αρνητικές ρίζες $x_1<x_2<0$ στο $\mathbb{R}$, πρέπει και αρκεί

$$\Delta=4\left(a^2-b\right)>0,\ x_1+x_2=-2a<0 \text{ και } x_1x_2=b>0\Leftrightarrow a^2>b,\ a>0,b>0.$$

Η εξίσωση (2) έχει μία μόνο αρνητική ρίζα, αν και μόνον αν,

$$a^2>b \text{ και } b<0\Leftrightarrow b<0.$$

Η περίπτωση με $\Delta=0\Leftrightarrow a^2=b>0$, δίνει μία αρνητική λύση, εφόσον $a>0$, αλλά δεν δίνει μη αρνητική λύση αφού $b>0$.
Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων περιπτώσεων έχουμε:

- Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις, αν και μόνον αν,
$$a^2>b,a>0,b>0 \quad \text{ή} \quad b<0.$$
- Η εξίσωση έχει τρεις πραγματικές λύσεις, αν και μόνον αν,
$$a^2>b,a>0,b>0 \text{ και } b<0,\ \textbf{(αδύνατο).}$$

Άρα η εξίσωση **δεν είναι δυνατόν** να έχει τρεις διαφορετικές λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+\ldots+x_{2017}+2017=0 \\ x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{2017}^4=\left(-x_1\right)^3+\left(-x_2\right)^3+\ldots+\left(-x_{2017}\right)^3 \end{array}\right\}.$$

Λύση

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$$(x_1+1)+(x_2+1)+\ldots+(x_{2017}+1)=0. \qquad (1)$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται:

$$x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{2017}^4=-x_1^3-x_2^3+\ldots-x_{2017}^3$$

$$x_1^4+x_1^3+x_2^4+x_2^3+\ldots+x_{2017}^4+x_{2017}^3=0$$

$$x_1^3\left(x_1+1\right)+x_2^3\left(x_2+1\right)+\ldots+x_{2017}^3\left(x_{2017}+1\right)=0 \qquad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$(x_1+1)\left(x_1^3+1\right)+(x_2+1)\left(x_2^3+1\right)+\ldots+(x_{2017}+1)\left(x_{2017}^3+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x_1+1)^2\left(x_1^2-x_1+1\right)+(x_2+1)^2\left(x_2^2-x_2+1\right)+\ldots+(x_{2017}+1)^2\left(x_{2017}^2-x_{2017}+1\right)=0$$

Επειδή ισχύει ότι: $x_i^2-x_i+1=\left(x_i-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, για κάθε $x_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,2017$,

η τελευταία εξίσωση αληθεύει, αν, και μόνον αν,

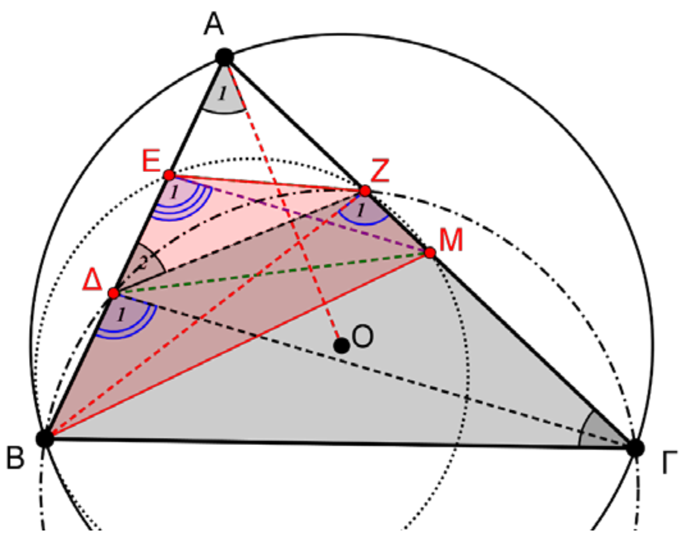
$$x_i+1=0,\ i=1,2,\ldots,2017 \Leftrightarrow x_i=-1,\ i=1,2,\ldots,2017 \Leftrightarrow x_1=x_2=\ldots=x_{2017}=-1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο *c*(O,R) (με AB < ΑΓ < ΒΓ) και τυχόν σημείο Δ της πλευράς AB. Από το σημείο Δ φέρουμε κάθετη στην ακτίνα OA, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και Μ το μέσο της ΑΓ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε, Ζ και Μ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

.

Λύση



Σχήμα 4

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΒΔΖΓ είναι εγγράψιμο. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε: $\widehat{A}_1=90°-\widehat{\Gamma}$. Από την καθετότητα των ΟΑ και ΔΖ έχουμε: $\widehat{\Delta}_2=90°-\widehat{A}_1$. Από τις παραπάνω ισότητες γωνιών, συμπεραίνουμε ότι: $\widehat{\Delta}_2=\widehat{\Gamma}$ και κατά συνέπεια, το τετράπλευρο ΒΔΖΓ είναι εγγράψιμο (η εξωτερική γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική).

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΔΖΓ, έχουμε: $\widehat{\Delta}_1=\widehat{Z}_1$. (η ΒΓ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ, Ζ υπό ίσες γωνίες)

Στο τρίγωνο ΑΔΓ, η ΕΜ συνδέει τα μέσα των πλευρών του ΑΔ και ΑΓ, οπότε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΔΓ, δηλαδή ΕΜ∥ΔΓ.

Από την παραλληλία ΕΜ∥ΔΓ, συμπεραίνουμε ότι : $\widehat{\Delta}_1=\widehat{E}_1$ (εντός εκτός επί τα αυτά γωνίες).

Άρα είναι: $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$ και επομένως το τετράπλευρο ΒΕΖΜ είναι εγγράψιμο, οπότε τα σημεία Β, Ε, Ζ και Μ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ρητών (a,b) που είναι τέτοια ώστε οι αριθμοί $\frac{ab+1}{a}$ και $\frac{ab+1}{b}$ να είναι και οι δύο ακέραιοι.

Λύση

Αφού οι αριθμοί

$$\frac{ab+1}{a} = p \text{ και } \frac{ab+1}{b} = q \qquad (1)$$

είναι θετικοί ακέραιοι, και το γινόμενό τους θα είναι θετικός ακέραιος. Δηλαδή, το κλάσμα $\frac{(ab+1)^2}{ab}$ είναι θετικός ακέραιος. Θέτουμε $ab = x$ και τότε

$$\frac{(x+1)^2}{x} = k, k > 0, k \in \mathbb{Z}.$$

Η τελευταία γράφεται:

$$x^2 + 2x + 1 = kx \Leftrightarrow x^2 + (2-k)x + 1 = 0. \qquad (2)$$

Ζητάμε η (2) να έχει ρητές λύσεις, επομένως η διακρίνουσα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Επομένως $(2-k)^2 - 4 = s^2$ για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο s.

Τότε $(k-2-s)(k-2+s) = 4$, επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

$$\begin{cases} k-2-s=1 \\ k-2+s=4 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} k-2-s=2 \\ k-2+s=2 \end{cases}$$

Η μόνη περίπτωση που δίνει λύσεις είναι η δεύτερη όπου $s = 0$ και $k = 4$.

Τότε η (2) γίνεται $(x-1)^2 = 0$, οπότε $x = 1$, δηλαδή $ab = 1$. (3)

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $\frac{2}{a} = p$, $\frac{2}{b} = q$, οπότε η (3) γίνεται $pq = 4$, με p, q θετικούς ακεραίους. Έπεται ότι $(p,q) \in \{(1,4),(2,2),(4,1)\}$, οπότε έχουμε:

$$(a,b) \in \left\{ \left(2, \frac{1}{2}\right), (1,1), \left(\frac{1}{2}, 2\right) \right\}.$$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x+y,\ a_2 = x^2+y^2$ και $a_4 = x^4+y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_5 = x^5+y^5$ είναι ακέραιος.

Λύση

Επειδή, έχουμε ότι:

$$x^5+y^5 = \left(x^4+y^4\right)\left(x+y\right) - x^4y - xy^4 = \left(x^4+y^4\right)\left(x+y\right) - xy\left(x^3+y^3\right),$$

και οι αριθμοί $a_1 = x+y,\ a_2 = x^2+y^2$ και $a_4 = x^4+y^4$ είναι ακέραιοι, αρκεί να αποδείξουμε ότι και ο αριθμός $a_3 = x^3+y^3$ είναι ακέραιος.

Επειδή $x^3+y^3 = \left(x+y\right)^3 - 3xy\left(x+y\right) \in \mathbb{Z}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $xy \in \mathbb{Z}$.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε

$$a_1^2 - a_2 = \left(x+y\right)^2 - \left(x^2+y^2\right) = 2xy \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

$$a_2^2 - a_4 = \left(x^2+y^2\right)^2 - \left(x^4+y^4\right) = 2x^2y^2 \in \mathbb{Z}\,, \tag{2}$$

αφού $a_1, a_2, a_4 \in \mathbb{Z}$. Από την (1) έπεται ότι: $xy = \dfrac{a_1^2 - a_2}{2}$.

Θα αποδείξουμε ότι $xy \in \mathbb{Z}$. Πράγματι, αν $xy = \dfrac{a_1^2 - a_2}{2} \notin \mathbb{Z}$, τότε θα είχαμε $a_1^2 - a_2 = m$ περιττός ακέραιος, οπότε από τη σχέση (2) θα είχαμε ότι

$$2x^2y^2 = 2\cdot\frac{\left(a_1^2-a_2\right)^2}{4} = \frac{\left(a_1^2-a_2\right)^2}{2} = \frac{m^2}{2} \notin \mathbb{Z},$$

αφού m περιττός. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί αντίκειται στη σχέση (2). Επομένως αληθεύει ότι $xy \in \mathbb{Z}$.

Άρα έχουμε:

$$x^3+y^3 = \left(x+y\right)^3 - 3xy\left(x+y\right) \in \mathbb{Z},$$

αφού $x+y,\ xy \in \mathbb{Z}$.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$x^3+y^3 = \left(x^2+y^2\right)\left(x+y\right) - xy\left(x+y\right) \in \mathbb{Z}, \text{ αφού } x^2+y^2,\ x+y,\ xy \in \mathbb{Z}.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ανίσωση:

$$\frac{x}{x^2+2x+3} > \frac{x+a}{x^2+x+1}.$$

Λύση

Επειδή $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0,\ x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$x\left(x^2+x+1\right)>\left(x^2+2x+3\right)(x+a)\Leftrightarrow x^3+x^2+x>x^3+2x^2+3x+ax^2+2ax+3a$$
$$\Leftrightarrow (a+1)x^2+2(a+1)x+3a<0. \qquad (1)$$

Για $a=-1$, η ανίσωση (1) γίνεται: $-3<0$ και αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $a\neq -1$, το πρώτο μέλος της ανίσωσης είναι τριώνυμο με διακρίνουσα

$$\Delta=4(a+1)^2-12a(a+1)=4(a+1)(a+1-3a)=-4(a+1)(2a-1).$$

Η ανίσωση (1) αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$a+1<0 \text{ και } -4(a+1)(2a-1)<0\Leftrightarrow a+1<0 \text{ και } 4(a+1)(2a-1)>0$$
$$\Leftrightarrow a<-1 \text{ και } a<-1 \text{ ή } a>\frac{1}{2}\Leftrightarrow a<-1.$$

Επομένως το ζητούμενο αληθεύει για κάθε $a\leq -1$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α,β ώστε $\beta=2\alpha$. Στο εσωτερικό του θεωρούμε N κύκλους (που πιθανόν τέμνονται), έτσι ώστε το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{N}\geq 4$.

Λύση

Έστω $d_1,d_2,...,d_N$ οι διάμετροι των κύκλων. Τότε το μήκος του πρώτου κύκλου είναι $2\pi R_1=\pi d_1$, το μήκος του δεύτερου $2\pi R_2=\pi d_2$, το μήκος του N-οστού είναι $2\pi R_{\mathrm{N}}=\pi d_{\mathrm{N}}$. Αφού το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου, θα έχουμε

$$\pi d_1+...+\pi d_{\mathrm{N}}=2(2\alpha+2\beta)=4(\alpha+\beta)=4(\alpha+2\alpha)=12\alpha \qquad (1).$$

Για να χωράει όμως κάθε κύκλος στο ορθογώνιο θα πρέπει η διάμετρός του να είναι το πολύ όσο η μικρότερη πλευρά του ορθογωνίου, δηλαδή $d_1\leq\alpha, d_2\leq\alpha,...,d_N\leq\alpha$, οπότε

$$\pi d_1+...+\pi d_{\mathrm{N}}\leq\alpha\pi+...+\alpha\pi=\mathrm{N}\alpha\pi \qquad (2)$$

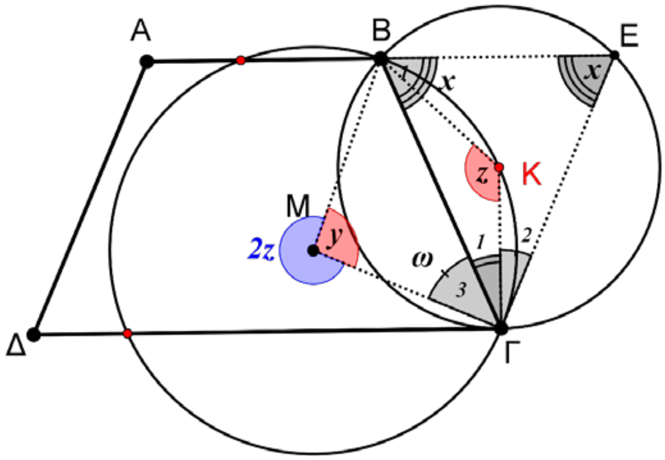
Από (1) και (2) έχουμε $\mathrm{N}\alpha\pi\geq 12\alpha\Leftrightarrow \mathrm{N}\geq\frac{12}{\pi}$ και αφού ο N είναι ακέραιος, $\mathrm{N}\geq 4$

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ /\!/ ΓΔ)$ για το οποίο ισχύει $ΓΔ=2ΑΒ$. Αν $Ε$ είναι το συμμετρικό του σημείου $Α$ ως προς το $Β$ και $Κ$ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΒΓΕ$ να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου

$B\Gamma E$ εφάπτεται στην $\Gamma\Delta$ στο σημείο Γ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Gamma K$ εφάπτεται στην ΓE στο σημείο Γ.

Λύση



Σχήμα 4

Έστω M το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $B\Gamma K$.

Θα αποδείξουμε ότι $K\Gamma \perp \Gamma\Delta$ και $M\Gamma \perp \Gamma E$.

Εφόσον E είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς το B, θα ισχύει $AE = 2AB$.

Άρα $AE = \Delta\Gamma = 2AB$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $AE\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο (έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες).

Άρα $\Gamma E = A\Delta = B\Gamma$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές ($\Gamma E = B\Gamma$) οπότε το περίκεντρό του θα βρίσκεται στη μεσοκάθετο της BE που είναι η ΓK (διότι Γ, K ισαπέχουν από τα άκρα του BE).

Άρα $K\Gamma \perp BE \parallel \Gamma\Delta \Rightarrow K\Gamma \perp \Gamma\Delta$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $B\Gamma E$ έχουμε: $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 180° - 2\hat{x}$.

Η γωνία $B\hat{K}\Gamma = \hat{z}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της $B\hat{E}\Gamma = \hat{x}$ (στο περιγεγραμμένο κύκλο του ισοσκελούς τριγώνου $B\Gamma E$), άρα $\hat{z} = 2\hat{x}$ και κατά συνέπεια $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 180° - \hat{z}$.

Η γωνία $B\hat{K}\Gamma = \hat{z}$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $BK\Gamma$ και η μη κυρτή γωνία $B\hat{M}\Gamma = 2\hat{z}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη.

Αν θέσουμε $\hat{\Gamma}_3 = \hat{\omega}$, τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $MB\Gamma$ έχουμε:

$2\hat{\omega} + \hat{y} = 180° \Leftrightarrow 2\hat{\omega} + 360° - 2\hat{z} = 180° \Leftrightarrow \hat{\omega} = \hat{z} - 90°$.

Άρα $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 = 180° - \hat{z} + \hat{z} - 90° = 90°$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση: $\left||x+8|-3x\right|=\frac{x+7}{6}$.

Λύση

Λόγω της ύπαρξης των απόλυτων τιμών θα εργαστούμε σε κατάλληλα διαστήματα που θα μας επιτρέπουν να αποφύγουμε τις απόλυτες τιμές. Παρατηρούμε πρώτα ότι, λόγω της απόλυτης τιμής στο πρώτο μέλος, πρέπει: $\frac{x+7}{6}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -7$.

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$|x+8-3x|=\frac{x+7}{6} \Leftrightarrow |8-2x|=\frac{x+7}{6} \qquad (1).$$

Επειδή το πρόσημο του όρου $8-2x$ αλλάζει εκατέρωθεν του 4, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $-7\leq x<4$. Τότε

$$(1) \Leftrightarrow 8-2x=\frac{x+7}{6} \Leftrightarrow 48-12x=x+7 \Leftrightarrow 13x=41 \Leftrightarrow x=\frac{41}{13}<4,$$

η οποία είναι δεκτή γιατί ανήκει στο διάστημα $[-7,4)$.

(β) $x\geq 4$. Τότε

$$(1) \Leftrightarrow 2x-8=\frac{x+7}{6} \Leftrightarrow 12x-48=x+7 \Leftrightarrow 11x=55 \Leftrightarrow x=5>4, \text{ δεκτή.}$$

Πρόβλημα 2

Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις ισότητες

$$x+2y=y+3z=z+5x,$$

να βρείτε:

(α) Την τιμή των λόγων $\frac{x}{y}$ και $\frac{z}{y}$.

(β) Τις τιμές των $x,\ y,\ z$ για τις οποίες η παράσταση $x^2+y^2+z^2-2y-144$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Λύση

Αν θέσουμε $x+2y=y+3z=z+5x=t$, τότε έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y=t \\ y+3z=t \\ z+5x=t \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+2y=t \\ -2y-6z=-2t \\ 6z+30x=6t \end{array}\right\} \Rightarrow 31x=5t \Rightarrow x=\frac{5t}{31}.$$

Τότε λαμβάνουμε:

$$x+2y=t \Rightarrow \frac{5t}{31}+2y=t \Rightarrow 2y=\frac{26t}{31} \Rightarrow y=\frac{13t}{31},$$

$$z+5x=t \Rightarrow z+\frac{25t}{31}=t \Rightarrow z=\frac{6t}{31}.$$

Επομένως έχουμε: $\frac{x}{y}=\frac{5}{13}, \ \frac{z}{y}=\frac{6}{13}$.

(β) Εκφράζουμε την παράσταση συναρτήσει της μεταβλητής y, οπότε έχουμε:

$$\left(\frac{5}{13}y\right)^2+y^2+\left(\frac{6}{13}y\right)^2-2y-144=\frac{230}{169}y^2-2y-144=f(y),$$

Επειδή ο συντελεστής του y^2 είναι θετικός, η παράσταση παίρνει την ελάχιστη τιμή της για $y=-\frac{-2}{2\cdot\frac{230}{169}}=\frac{169}{230}$. Τότε είναι $x=\frac{5}{13}y=\frac{5}{13}\cdot\frac{169}{230}=\frac{13}{46}, \ \ z=\frac{6}{13}\cdot\frac{169}{230}=\frac{78}{230}=\frac{39}{115}$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (x,y) που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu(xy)+9=0$$

και ανήκουν στο ορθογώνιο $D=\left\{(x,y): -\pi\le x\le\pi, -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$ του Καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu(xy)+9=0 \Leftrightarrow x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu(xy)+9\left[\sigma\upsilon\nu^2(xy)+\eta\mu^2(xy)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[x+3\sigma\upsilon\nu(xy)\right]^2+\left[3\eta\mu(xy)\right]^2=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+3\sigma\upsilon\nu(xy)=0 \\ 3\eta\mu(xy)=0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+3\sigma\upsilon\nu(xy)=0 \\ xy=2\kappa\pi, \ \kappa\in\mathbb{Z} \end{array}\right\} \ \acute{\eta} \ \left\{\begin{array}{c} x+3\sigma\upsilon\nu(xy)=0 \\ xy=(2\kappa+1)\pi, \ \kappa\in\mathbb{Z} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-3 \\ y=\frac{2\kappa\pi}{-3}, \kappa\in\mathbb{Z} \end{array}\right\} \ \acute{\eta} \ \left\{\begin{array}{c} x=3 \\ y=\frac{(2\kappa+1)\pi}{3}, \kappa\in\mathbb{Z} \end{array}\right\}.$$

Για να ανήκουν τα παραπάνω ζεύγη στο ορθογώνιο D πρέπει

$$-\frac{\pi}{2} \le \frac{2\kappa\pi}{-3} \le \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le \kappa \le \frac{3}{4},\ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \kappa = 0 \qquad \text{ή}$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \frac{(2\kappa+1)\pi}{3} \le \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le 2\kappa+1 \le \frac{3}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \le \kappa \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow \kappa \in \{-1, 0\},$$

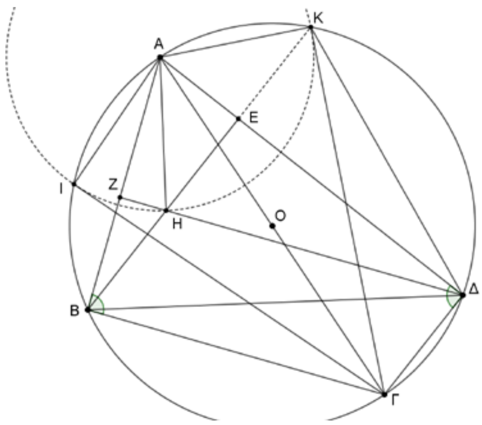
οπότε προκύπτουν τα ζεύγη:

$$\left(3, -\frac{\pi}{3}\right), (-3, 0), \left(3, \frac{\pi}{3}\right).$$

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο $C_1(\mathrm{O}, R)$ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ. Ο κύκλος $C_2(\mathrm{A}, \mathrm{AH})$ κέντρου Α και ακτίνας ΑΗ τέμνει τον κύκλο $C_1(\mathrm{O}, R)$ στα σημεία Ι και Κ. Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\mathrm{I} = \Gamma\mathrm{K} = \mathrm{B}\Delta$.

Λύση



Σχήμα 4

Τα τρίγωνα ΓΙΚ και ΓΚΑ είναι ορθογώνια, αφού η ΑΓ είναι διάμετρος και έχουν κοινή υποτείνουσα και $\mathrm{AI} = \mathrm{AK}$, ως ακτίνες του κύκλου $C_2(\mathrm{A}, \mathrm{AH})$. Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα και θα έχουν και $\Gamma\mathrm{I} = \Gamma\mathrm{K}$.

Επειδή η ΒΚ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΔ, έχουμε ότι: $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$.

Έχουμε επιπλέον ότι:

$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{K} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{K}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{K} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$ (από ισότητα τριγώνων ΑΔΚ, ΑΔΗ, αφού $\mathrm{AK} = \mathrm{AH}$, ΑΔ κοινή, $\mathrm{A}\hat{\mathrm{H}}\Delta = 180^\circ - \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\Delta > 90^\circ$)

$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ (γιατί ΓΖ ύψος του τριγώνου ΑΒΔ).

Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$, οπότε τα σημεία Α, Η, Ε, Κ είναι συνευθειακά. Επειδή επιπλέον οι ευθείες ΒΚ και ΓΔ είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ευθεία ΑΔ, έπεται ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι τραπέζιο εγγεγραμμένο στον κύκλο $C_1(\mathrm{O}, R)$ και άρα ισοσκελές. Επομένως οι διαγώνιοι του ΓΚ και ΒΔ είναι ίσες.