Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}.$$

Λύση. Έχουμε :

$$\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}=\left(\frac{21}{9}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{-2}$$

$$=\left(-\frac{28}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{-2}=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\left(\frac{10}{3}\right)^{2}:\left(\frac{10}{9}\right)^{2}=\frac{100}{9}\cdot\frac{81}{100}=\frac{81}{9}=9.$$

Πρόβλημα 2. Μία οικογένεια αγόρασε ένα ψυγείο με έκπτωση $11\frac{1}{9}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης και ένα πλυντήριο με έκπτωση $14\frac{2}{7}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης. Η συνολική τιμή πώλησης ψυγείου και πλυντηρίου ήταν 3150 ευρώ. Η συνολική έκπτωση που έγινε ήταν 390 ευρώ. Να βρείτε την τιμή πώλησης του ψυγείου και του πλυντηρίου.

Σημείωση: *Οι αριθμοί* $11\frac{1}{9}\%$ *και* $14\frac{2}{7}\%$ *είναι μεικτοί.*

Λύση

Έστω x ευρώ η τιμή πώλησης του ψυγείου, οπότε η τιμή πώλησης του πλυντηρίου θα είναι $3150-x$ ευρώ. Η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $11\frac{1}{9}\%=\frac{100}{9}\%$, οπότε η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $x\cdot\frac{100/9}{100}=\frac{x}{9}$ ευρώ. Επίσης, η έκπτωση για το πλυντήριο ήταν $14\frac{2}{7}\%=\frac{100}{7}\%$, οπότε η αντίστοιχη έκπτωση για το πλυντήριο ήταν $\left(3150-x\right)\cdot\frac{100/7}{100}=\frac{3150-x}{7}=450-\frac{x}{7}$. Άρα έχουμε

$$\frac{x}{9}+450-\frac{x}{7}=390\Leftrightarrow\frac{x}{9}-\frac{x}{7}=-60\Leftrightarrow\frac{2x}{63}=60\Leftrightarrow x=63\cdot 30\Leftrightarrow x=1890.$$

Επομένως, η τιμή πώλησης του ψυγείου ήταν 1890 ευρώ και η τιμή πώλησης του πλυντηρίου ήταν $3150-1890=1260$ ευρώ.

Πρόβλημα 3. Τέσσερα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν πέρυσι για τη μεταφορά των μαθητών τους στο Γυμνάσιο του Δήμου τους συνολικά 9690 ευρώ. Τα χρήματα που πλήρωσε κάθε χωριό ήταν ανάλογα προς τον αριθμό των μαθητών του χωριού που φοιτούσαν στο Γυμνάσιο. Να βρείτε πόσα χρήματα πλήρωσε κάθε χωριό, αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των μαθητών του χωριού Β ισούται με τα $3/4$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Γ, ο αριθμός των μαθητών του χωριού Α ισούται με τα $2/3$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Β και ο αριθμός των μαθητών του χωριού Δ είναι το άθροισμα των μαθητών των χωριών Α και Γ.

Λύση

Έστω ότι τα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν τα ποσά $\alpha,\beta,\gamma,\delta,$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

$$\beta=\frac{3\gamma}{4},\ \alpha=\frac{2\beta}{3},\ \delta=\alpha+\gamma \Rightarrow \alpha=\frac{2\beta}{3},\ \gamma=\frac{4\beta}{3},\ \delta=\frac{6\beta}{3}=2\beta$$

$$\frac{3\alpha}{2}=\beta=\frac{3\gamma}{4}=\frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2/3}=\frac{\beta}{1}=\frac{\gamma}{4/3}=\frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\frac{\delta}{6}.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος το ποσό των 9690 ευρώ πρέπει να διαμεριστεί σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ οποίοι, όπως διαπιστώνουμε από την τελευταία σχέση είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς $2,3,4$ και 6. Επομένως, αρκεί να διαμερίσουμε το ποσό των 9690 ευρώ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 2,3,4 και 6. Έτσι, αν διαιρέσουμε τον αριθμό 9690 σε $2+3+4+6=15$ ίσα μέρη έχουμε μερίδιο το ποσό $9690:15=646$ ευρώ. Επομένως, το χωριό Α πλήρωσε $646\cdot 2=1292$ ευρώ, το χωριό Β πλήρωσε $646\cdot 3=1938$ ευρώ, το χωριό Γ πλήρωσε $646\cdot 4=2584$ ευρώ και το χωριό Δ πλήρωσε $646\cdot 6=3876$ ευρώ.

Διαφορετικά, από τις ισότητες

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\frac{\delta}{6}=\omega \Rightarrow \alpha=2\omega,\ \beta=3\omega,\ \gamma=4\omega,\ \delta=6\omega,$$

οπότε από την υπόθεση $\alpha+\beta+\gamma+\delta=9690$ με αντικατάσταση λαμβάνουμε:

$$2\omega+3\omega+4\omega+6\omega=9690 \Leftrightarrow 15\omega=9690 \Leftrightarrow \omega=646.$$

Άρα είναι: $\alpha=2\omega=1292,\ \beta=3\omega=1938,\ \gamma=4\omega=2584,\ \delta=6\omega=3876$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

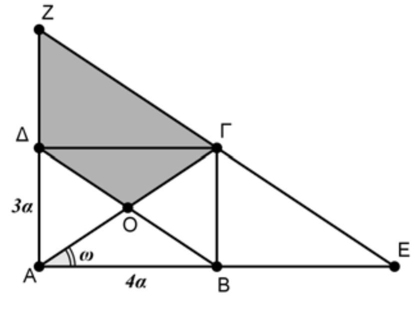
Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $\Gamma\hat{A}B=\omega$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διαγώνιο ΒΔ η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι:

$$AB=4\alpha\ cm,\ A\Delta=3\alpha\ cm.$$

1.Βρείτε τη γωνία $A\hat{\Gamma}Z$ συναρτήσει της γωνίας ω.

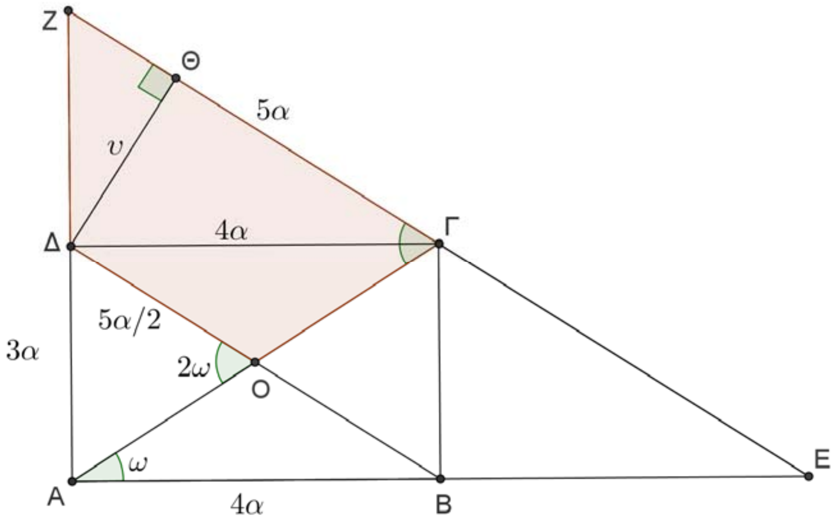
2.Αποδείξετε ότι: $A\Gamma=\Gamma Z=\Gamma E$.

3.Βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΟΓΖ.



Σημείωση. *Να σχεδιάσετε το σχήμα του προβλήματος στο τετράδιο σας. Να αιτιολογήσετε κάθε απάντησή σας.*

Λύση



Σχήμα 2

1. Επειδή οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται, έπεται ότι $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{O\Gamma} = \mathrm{O\Delta}$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με $\mathrm{O\hat{B}A} = \omega = \mathrm{O\hat{A}B}$. Η γωνία $\mathrm{A\hat{O}\Delta}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΟΒ, οπότε θα είναι $\mathrm{A\hat{O}\Delta} = \mathrm{O\hat{A}B} + \mathrm{O\hat{B}A} = 2\omega$. Από την παραλληλία $\mathrm{EZ} \parallel \mathrm{B\Delta}$, επειδή οι γωνίες $\mathrm{A\hat{\Gamma}Z}$ και $\mathrm{A\hat{O}\Delta}$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά, έχουμε: $\mathrm{A\hat{\Gamma}Z} = 2\omega$.

2. Επειδή $\mathrm{EZ} \parallel \mathrm{B\Delta}$ και $\mathrm{\Gamma\Delta} \parallel \mathrm{AE}$, $\mathrm{B\Gamma} \parallel \mathrm{AZ}$, τα τετράπλευρα ΔΒΕΓ και ΔΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες. Άρα είναι: $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Gamma Z} = \mathrm{\Gamma E}$ Όμως οι διαγώνιες παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{B\Delta}$. Επομένως, θα είναι και $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma Z} = \mathrm{\Gamma E}$.

3. Το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΓΖ, οπότε το ύψος του $\mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{AB} = 4\alpha\ cm$ είναι και διάμεσος. Αρα είναι: $\mathrm{AZ} = 2 \cdot \mathrm{A\Delta} = 6\alpha\ cm$ και $\mathrm{\Delta Z} = 3\alpha\, cm$.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$\mathrm{B\Delta}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Delta}^2 \Rightarrow \mathrm{B\Delta}^2 = (4\alpha)^2 + (3\alpha)^2 = 25\alpha^2 \Rightarrow \mathrm{B\Delta} = 5\alpha\ cm.$$

Άρα είναι: $\mathrm{O\Delta} = \dfrac{\mathrm{B\Delta}}{2} = \dfrac{5\alpha}{2}$ και $\mathrm{\Gamma Z} = 5\alpha\, cm$.
Για το ύψος $\upsilon = \mathrm{\Delta\Theta}$ έχουμε ότι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{\Gamma\Delta Z}) = \frac{\mathrm{\Delta\Gamma} \cdot \mathrm{\Delta Z}}{2} = \frac{\mathrm{\Gamma Z} \cdot \mathrm{\Delta\Theta}}{2} \Leftrightarrow \frac{4\alpha \cdot 3\alpha}{2} = \frac{\mathrm{\Gamma Z} \cdot \upsilon}{2} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{12\alpha}{5}.$$

Επομένως, είναι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{\Delta O\Gamma Z}) = \frac{(\mathrm{\Delta O} + \mathrm{\Gamma Z})}{2} \cdot \upsilon = \frac{\left(\frac{5\alpha}{2} + 5\alpha\right)}{2} \cdot \frac{12\alpha}{5} = 9\alpha^2\ cm^2.$$

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Δίνονται οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί $\alpha = 0,\overline{2}$ και $\beta = 0,\overline{3}$.
(α) Να γράψετε τους αριθμούς α και β σε κλασματική μορφή.
(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016}.$$

Λύση
(α) Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha = 0,222\ldots$$
$$10\alpha = 2,222\ldots$$
$$10\alpha = 0,222\ldots + 2$$
$$10\alpha = \alpha + 2$$
$$9\alpha = 2$$

Άρα είναι $\alpha = \frac{2}{9}$..

Εργαζόμενοι ομοίως, βρίσκουμε ότι: $\beta = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

(β) Έχουμε:

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016} = \left(3\cdot\frac{2}{9} - 5\cdot\frac{3}{9}\right)^{2015} + \left(18\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{3}{9}\right)^2\right)^{2016}$$

$$= \left(\frac{6}{9} - \frac{15}{9}\right)^{2015} + \left(18\cdot\frac{4}{81} + \frac{9}{81}\right)^{2016} = (-1)^{2015} + (+1)^{2016} = -1 + 1 = 0.$$

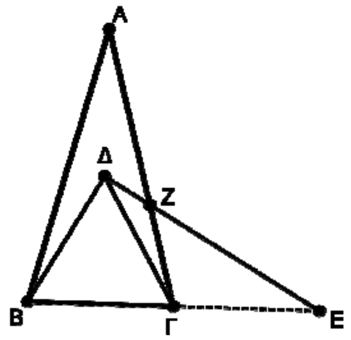
Πρόβλημα 2.
Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο με τον οποίο είτε πολλαπλασιάσουμε είτε διαιρέσουμε το 2016, προκύπτει ως αποτέλεσμα τέλειο τετράγωνο.

Λύση
Αναλύουμε το 2016 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε ότι $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Επομένως, όταν ο αριθμός 2016 πολλαπλασιαστεί με κάποιο παράγοντα, για να προκύψει γινόμενο που είναι τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει ο παράγοντας αυτός να έχει ως παράγοντες τους αριθμούς 2 και 7 σε περιττό εκθέτη και κάθε άλλο πρώτο παράγοντα σε άρτιο εκθέτη. Ο μικρότερος τέτοιος αριθμός είναι ο $2 \cdot 7 = 14$. Παρατηρούμε ότι και η

διαίρεση $2016 : (2\cdot 7)$ δίνει πηλίκο ίσο με $2^4 \cdot 3^2 = (2^2 \cdot 3)^2 = 12^2$, που είναι τέλειο τετράγωνο.
Επομένως ο μικρότερος θετικός ακέραιος με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι ο 14.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές $(ΑΒ = ΑΓ)$ και $\hat{A} = 30^0$. Το τρίγωνο $ΒΓΔ$ είναι ισόπλευρο και το σημείο $Ε$ βρίσκεται στη προέκταση της πλευράς $ΒΓ$ και είναι τέτοιο ώστε $ΒΓ = ΓΕ$. Αν η πλευρά $ΑΓ$ τέμνεται από τη $ΔΕ$ στο σημείο $Ζ$, τότε:

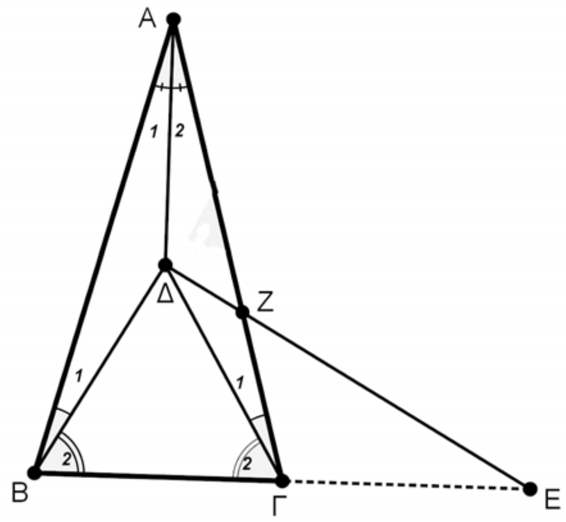


(α) Να υπολογιστούν οι γωνίες $Α\hat{Β}Δ$ και $Α\hat{Γ}Δ$.

(β) Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ είναι ισοσκελή.

(γ) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $ΒΔΕ$ είναι ορθογώνιο.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Το τρίγωνο $ΒΓΔ$ είναι ισόπλευρο άρα $\hat{B}_2 = \hat{Γ}_2 = 60^0$.

Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 30^0$ άρα $\hat{B} = \hat{Γ} = 75^0$.

Αφαιρώντας τις ισότητες κατά μέλη, έχουμε:

$$\hat{B} - \hat{B}_2 = \hat{Γ} - \hat{Γ}_2 = 75^0 - 60^0 = 15^0 \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{Γ}_1 = 15^0.$$

β) Επειδή $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΔΒ = ΔΓ$ η $ΑΔ$ είναι μεσοκάθετη της $ΒΓ$, άρα και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 15^0.$$

Άρα τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελή.

(γ) Το τρίγωνο $ΓΔΕ$ είναι ισοσκελές ($ΓΔ = ΓΕ$) με

$$Δ\hat{E}Γ = \hat{Γ}_1 + Ζ\hat{Γ}Ε = 15^0 + (180^0 - \hat{Γ}) =$$

$$= 15^0 + 180^0 - 75^0 = 120^0 .$$

Άρα $\Gamma\hat{\Delta}E = \Delta\hat{E}\Gamma = 30^0$. Επειδή από το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ είναι

$$E\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta = 60^o ,$$

έπεται ότι:

$$B\hat{\Delta}E = 180^\circ - \left(E\hat{B}\Delta + \Delta\hat{E}B\right) = 180^\circ - \left(60^\circ + 30^\circ\right) = 90^\circ ,$$

οπότε το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

.

Πρόβλημα 4.

Για την εκτέλεση ενός μεγάλου ερευνητικού έργου στο προαπαιτούμενο χρονικό όριο, ξεκίνησαν να εργάζονται συνολικά 500 ερευνητές. Όταν τελείωσε στην ώρα του το $\frac{1}{4}$ του έργου, αποχώρησαν 100 ερευνητές, οπότε το δεύτερο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με καθυστέρηση. Αποχώρησαν όμως τότε και άλλοι 100 ερευνητές, οπότε το τρίτο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με επιπλέον καθυστέρηση. Πόσοι ερευνητές πρέπει να προσληφθούν, ώστε το έργο να τελειώσει στον προγραμματισμένο χρόνο.

(*Υποθέτουμε ότι όλοι οι ερευνητές που εργάστηκαν, αλλά και αυτοί που θα προσληφθούν, δουλεύουν με την ίδια απόδοση*)

Λύση

Αφού στο πρώτο τέταρτο δούλευαν όλοι οι ερευνητές, το έργο ολοκληρώθηκε στην ώρα του και υποθέτουμε ότι χρειάστηκαν χρόνο t.

Στο δεύτερο τέταρτο σε κάθε χρονική μονάδα ολοκληρώνεται το $\frac{500-100}{500} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$ από το έργο που θα ολοκληρωνόταν αν δούλευαν όλοι. Επομένως, για να ολοκληρωθεί το δεύτερο τέταρτο του έργου χρειάζεται χρόνος $\frac{5}{4}t$.

Όμοια για να ολοκληρωθεί το τρίτο τέταρτο του έργου θα χρειαστεί χρόνος $\frac{5}{3}t$.

Έστω τέλος ότι με την προσθήκη των ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο χρειάζεται χρόνος x.

Το έργο για να τελειώσει στην ώρα ή νωρίτερα του χρειάζεται χρόνος τετραπλάσιος από το πρώτο τέταρτο που δούλευαν όλοι, δηλαδή χρόνος μικρότερος ή ίσος με $4t$.

Άρα, έχουμε τη σχέση:

$$t + \frac{5}{4}t + \frac{5}{3}t + x = 4t \Leftrightarrow x = t\left(3 - \frac{5}{4} - \frac{5}{3}\right) = t\frac{(36-15-20)}{12} = \frac{1}{12}t$$

Επομένως, αν έγινε πρόσληψη y ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο δούλεψαν $300 + y$ επιστήμονες και για το τελευταίο τέταρτο χρειάστηκαν χρόνο $x = \frac{500}{300+y}t$,

οπότε πρέπει $\frac{500}{300+y}t = \frac{1}{12}t \Rightarrow 6000 = y + 300 \Rightarrow 5700 = y$

Επομένως πρέπει να προσληφθούν 5700 επιστήμονες.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να βρεθούν όλα τα μη μηδενικά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, με α,β μη αρνητικούς ακέραιους και $\alpha+\beta=4$.

(β) Για το μικρότερο από τα κλάσματα του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε την τιμή της παράστασης**:** $\mathrm{A}=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2\cdot\alpha}{\beta}-\frac{9}{27}\right)$ **.**

Λύση

(α) Αφού το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι μη μηδενικό πρέπει $\alpha\neq 0$ και αφού το β είναι παρονομαστής πρέπει $\beta\neq 0$. Αφού α,β είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $\alpha+\beta=4$ πρέπει να ισχύει $\alpha<4$ και $\beta<4$. Επομένως, έχουμε:

$$\alpha=3,\ \beta=1,\ \frac{\alpha}{\beta}=3\ ,\quad \alpha=2,\ \beta=2,\ \frac{\alpha}{\beta}=1 \text{ και } \alpha=1,\ \beta=3,\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{3}.$$

(β) Το μικρότερο από τα κλάσματα που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα είναι το $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{3}$, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2\cdot\alpha}{\beta}-\frac{9}{27}\right)=\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2\cdot 1}{3}-\frac{9}{27}\right)$$
$$=\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=2-1=1.$$

Πρόβλημα 2

Ο θετικός ακέραιος Α έχει το γινόμενο των ψηφίων του ίσο με 12, το άθροισμα των ψηφίων του ίσο με 9 και επιπλέον διαιρείται με το 4. Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α.

Λύση

Επειδή είναι $12=2\cdot 2\cdot 3$ τα δυνατά ψηφία του Α, έτσι ώστε αυτά να έχουν άθροισμα 9 είναι τα εξής:

(α) 2,6,1 (τριψήφιος αριθμός)

(β) 3,4,1,1 (τετραψήφιος αριθμός)

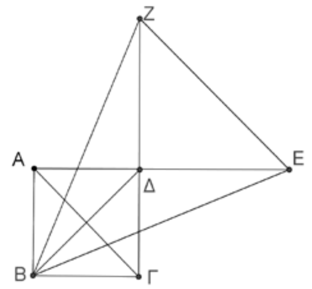
(γ) 2,2,3,1,1 (πενταψήφιος αριθμός)

Η μικρότερη δυνατή τιμή μπορεί να προκύψει από την περίπτωση (α). Δεδομένου ότι ένα αριθμός διαιρείται με το 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4. οι δυνατές τιμές του Α είναι οι 216 και 612. Επομένως η μικρότερη δυνατή τιμή του Α είναι **216.**

Η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α μπορεί να προκύψει από την περίπτωση (γ). Δεδομένου ότι ένα αριθμός διαιρείται με το 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4, οι δυνατές τιμές του Α πρέπει να έχουν τελευταίο διψήφιο τμήμα το 12 ή το 32. Όμως για τον προσδιορισμό της μεγαλύτερης δυνατής τιμής του Α πρέπει το πρώτο ψηφίο του να είναι το 3. Επομένως η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α είναι **32112**.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{E} = \mathrm{B}\Delta$ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{Z} = \mathrm{B}\Delta$.

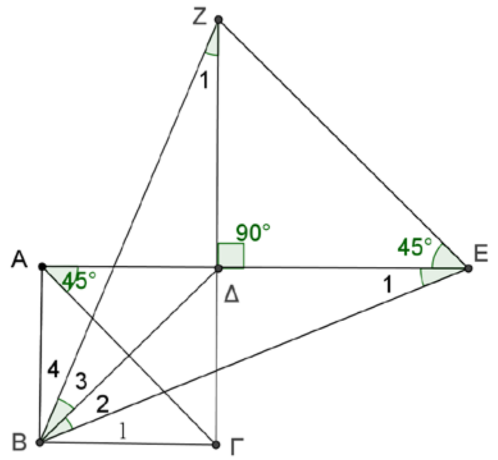


(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ και $\Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ είναι παράλληλες.

Σημείωση: *Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.*

Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή $\mathrm{AE} \parallel \mathrm{B\Gamma}$ και τέμνονται από την ευθεία ΒΕ έχουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, δηλαδή

$$\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1 \qquad (1)$$

Επειδή από υπόθεση $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{B}$, το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ισοσκελές και έχει:

$$\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{\mathrm{E}}_1 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η ισότητα:

$$\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{\mathrm{B}}_1 \qquad (3)$$

Επειδή το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές ($\mathrm{B\Gamma} = \Gamma\Delta,\ \hat{\Gamma} = 90^\circ$) θα έχουμε:

$$\Gamma\hat{B}\Delta \equiv \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 45^\circ \overset{(3)}{\Rightarrow} 2\cdot\Gamma\hat{B}\Delta = 45^\circ \Rightarrow \Delta\hat{B}E = 22,5^\circ$$

Με το ίδιο σκεπτικό όπως προηγουμένως έχουμε ότι $\hat{B}_3 = \hat{Z}_1$, αφού ΔΒ = ΓΖ, $\hat{B}_4 = \hat{Z}_1$, αφού $AB \parallel \Gamma Z$. Επίσης είναι $A\hat{B}\Delta = \hat{B}_3 + \hat{B}_4 = 45^\circ$, οπότε λαμβάνουμε τελικά $\Delta\hat{Z}B = \hat{Z}_1 = 22,5^\circ$.

(β) Επειδή τα τρίγωνα ΔΓΑ και ΔΕΖ είναι ορθογώνια ισοσκελή θα έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{E}Z = 45^\circ$, οπότε οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ τεμνόμενες από την ευθεία ΑΕ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Επομένως οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ είναι παράλληλες.

Πρόβλημα 4

Ένας πεζοπόρος περπατάει από το χωριό Α για να πάρει το τρένο στην πόλη Β. Ο πεζοπόρος σε μία ώρα προχώρησε κατά 4 χιλιόμετρα και τότε διαπίστωσε ότι περπατώντας με αυτή την ταχύτητα θα έφθανε στο σταθμό μία ώρα αργότερα από την αναχώρηση του τρένου. Για αυτό το λόγο στο υπόλοιπο της διαδρομής κινήθηκε με 6 χιλιόμετρα την ώρα και έτσι έφθασε στο σταθμό μισή ώρα νωρίτερα από την αναχώρηση του τρένου. Να βρείτε την απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β.

Λύση

Έστω ότι η απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β είναι x χιλιόμετρα. Με την ταχύτητα που έτρεχε ο πεζοπόρος θα κάλυπτε την απόσταση σε $\frac{x}{4}$ ώρες, οπότε η ώρα που ξεκινούσε από το χωριό Α και η ώρα αναχώρησης του τρένου διέφεραν κατά $\frac{x}{4}-1$ ώρες.

Μετά την πρώτη ώρα ο χρόνος που είχε ο πεζοπόρος για να φθάσει έγκαιρα στο σταθμό ήταν $\left(\frac{x}{4}-1\right)-1=\frac{x}{4}-2$ ώρες. Τα χιλιόμετρα που απέμεναν ήταν $x-4$ και για να τα καλύψει ο πεζοπόρος χρειάστηκε $\frac{x-4}{6}$ ώρες. Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4}-2-\frac{x-4}{6}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{4}-\frac{x-4}{6}=\frac{1}{2}+2 \Leftrightarrow \frac{x}{4}-\frac{x-4}{6}=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{12}-\frac{2x-8}{12}=\frac{30}{12} \Leftrightarrow 3x-\left(2x-8\right)=30 \Leftrightarrow 3x-2x+8=30 \Leftrightarrow x=22.$$

Επομένως η απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β ήταν 22 χιλιόμετρα.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης**:**

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2\beta+\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{\alpha-11\beta}{\beta}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=10$.

Λύση

1ος Τρόπος

$$\mathrm{A}=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}-11\right)=(2+10)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(10-11)$$

$$=12\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(-1)=4\cdot 500-18\cdot(-1)=2000+18=2018.$$

2ος Τρόπος

Επειδή $\dfrac{\alpha}{\beta}=10$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=10\beta$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2\beta+10\beta}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{10\beta-11\beta}{\beta}\right)=\left(\frac{12\beta}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{-\beta}{\beta}\right)$$

$$=\frac{12}{1}\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(-1)=4\cdot 500+18=2000+18=2018.$$

Πρόβλημα 2.

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων που πρέπει να αφαιρεθούν από το σύνολο $\mathrm{A}=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$, έτσι ώστε το γινόμενο όλων των στοιχείων του που θα απομείνουν να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου;

Λύση

Το γινόμενο των στοιχείων του συνόλου Α γράφεται:

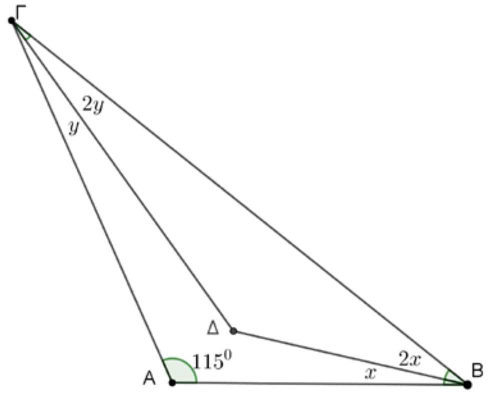
$$\Gamma=2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\cdot16\cdot18\cdot20=2\cdot2^2\cdot2\cdot3\cdot2^3\cdot2\cdot5\cdot2^2\cdot3\cdot2\cdot7\cdot2^4\cdot2\cdot3^2\cdot2^2\cdot5=2^{18}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$$

Στο τελευταίο γινόμενο πρώτων παραγόντων πρέπει οι εκθέτες να είναι άρτιοι , οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πρέπει σίγουρα να αφαιρεθεί ο παράγοντας 7, ο οποίος υπάρχει μόνο στην ανάλυση του 14. Επομένως πρέπει να αφαιρεθεί ο αριθμός 14. Τότε το γινόμενο που προκύπτει είναι $\Gamma=2^{17}\cdot3^4\cdot5^2$ στο οποίο ο εκθέτης του 2 είναι περιττός. Για να γίνει άρτιος πρέπει να αφαιρεθεί περιττός αριθμός παραγόντων ίσων με 2. Για αυτό έχουμε δύο επιλογές. Η μία είναι να αφαιρέσουμε τον αριθμό 2 και η άλλη είναι να αφαιρέσουμε τον αριθμό 8. Στην πρώτη περίπτωση το γινόμενο που θα προκύψει είναι το $\Gamma_1=2^{16}\cdot3^4\cdot5^2=\left(2^8\cdot3^2\cdot5\right)^2$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το γινόμενο είναι $\Gamma_2=2^{14}\cdot3^4\cdot5^2=\left(2^7\cdot3^2\cdot5\right)^2$. Επομένως ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων του συνόλου Α που πρέπει να αφαιρέσουμε είναι 2, δηλαδή τους αριθμούς 2 και 14 ή τους αριθμούς 8 και 14.

Πρόβλημα 3

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 115^\circ$ θεωρούμε στο εσωτερικό του σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2 \cdot \Delta\hat{B}A$ και $\Delta\hat{\Gamma}B = 2 \cdot \Delta\hat{\Gamma}A$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$.

Λύση



Σχήμα 1

Αν θέσουμε $\Delta\hat{B}A = x,$ τότε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2 \cdot \Delta\hat{B}A = 2x$. Ομοίως, αν $\Delta\hat{\Gamma}A = y.$ τότε $\Delta\hat{\Gamma}B = 2 \cdot \Delta\hat{\Gamma}A = 2y.$

Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$\hat{A} + 3x + 3y = 180^\circ \Rightarrow 3(x+y) = 180^\circ - 115^\circ \Rightarrow x + y = \frac{65^\circ}{3}.$$

Από το τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε

$$B\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - 2x - 2y = 180^\circ - 2(x+y) = 180^\circ - 2 \cdot \frac{65^\circ}{3} = 180^\circ - \frac{130^\circ}{3} = \frac{410^\circ}{3}.$$

Πρόβλημα 4

Ο Γιάννης πήγε στην αγορά έχοντας μαζί του κέρματα των δύο ευρώ και του ενός ευρώ. Ο αριθμός των κερμάτων του ήταν 40. Για την αγορά που έκανε ξόδεψε ακριβώς το ένα τρίτο των κερμάτων των δύο ευρώ που είχε μαζί του. Την επόμενη μέρα ξόδεψε το 40% της αξίας των χρημάτων που του είχαν απομείνει. Αν και τις δύο μέρες ξόδεψε συνολικά 40 ευρώ, να βρεθεί πόσα κέρματα των δύο ευρώ είχε αρχικά μαζί του..

Λύση
Έστω x τα κέρματα των δύο ευρώ που είχε αρχικά. Αφού χρησιμοποίησε το ένα τρίτο αυτών, σημαίνει ότι το x είναι πολλαπλάσιο του 3 και ότι το ένα τρίτο αυτών ισούται με $\frac{x}{3}$ και αυτά έχουν αξία $\frac{2x}{3}$. Η αξία των χρημάτων που έδωσε την πρώτη μέρα είναι $\frac{2x}{3}$, επομένως τη δεύτερη μέρα του απέμειναν $\frac{2x}{3}\cdot 2+40-x=40+\frac{x}{3}$ ευρώ. Αφού ξόδεψε το 40% αυτών, τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $\left(40+\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{4}{10}=16+\frac{2x}{15}$ ευρώ. Επομένως συνολικά, την πρώτη και τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $2\cdot\frac{x}{3}+16+\frac{2x}{15}=16+\frac{12x}{15}$ ευρώ.
Από την εκφώνηση ξέρουμε τώρα ότι ξόδεψε 40 ευρώ, οπότε

$$16+\frac{12x}{15}=40 \Leftrightarrow \frac{12x}{15}=24 \Leftrightarrow 12x=360 \Leftrightarrow x=30.$$

Επομένως είχε αρχικά μαζί του 30 κέρματα των δύο ευρώ και 10 κέρματα του ενός ευρώ με συνολική αξία 70 ευρώ.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης**:**

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$.

Λύση
1ος Τρόπος
Επειδή $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=3\beta$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right)=\left(\frac{3\beta^2+9\beta^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{9\beta^2-3\beta^2}{9\beta^2}+\frac{13}{3}\right)$$

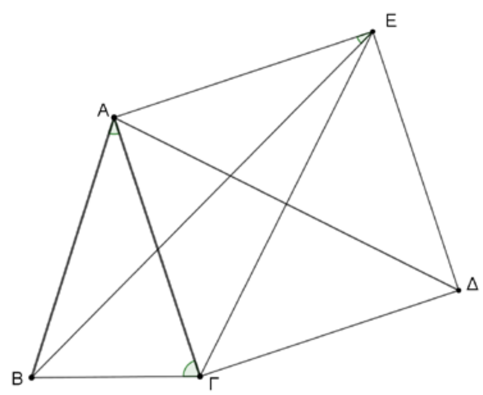
$$=\left(\frac{12\beta^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{6\beta^2}{9\beta^2}+\frac{13}{3}\right)=(12-10)\left(\frac{2}{3}+\frac{13}{3}\right)=2\cdot\frac{15}{3}=10.$$

2ος Τρόπος
Επειδή $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$, συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{1}{3}$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right)=\left(3+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-10\right)\cdot\left(1-3\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{13}{3}\right)$$

$$=\left(3+3^2-10\right)\cdot\left(1-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{13}{3}\right)=(3+9-10)\cdot\left(1-\frac{3}{9}+\frac{13}{3}\right)=2\cdot(+5)=10.$$

Πρόβλημα 2
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\Gamma}=2\cdot\hat{\mathrm{A}}$. Το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο.
(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A\hat{E}B}$.
(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Delta}$ και $\mathrm{B\hat{E}\Gamma}$.
Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στο φύλλο με τις απαντήσεις σας.



Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με

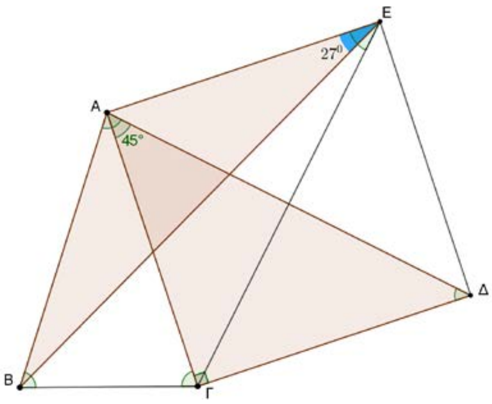
$AB = A\Gamma$ έπεται ότι $\hat{\Gamma} = \hat{B} = 2 \cdot \hat{A}$, οπότε από τη σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ έπεται ότι:

$$\hat{A} + 2\hat{A} + 2\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow 5\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ.$$

Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, αφού $AB = A\Gamma = AE$ και ισχύει ότι

$$B\hat{A}E = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}E = 36^\circ + 90^\circ = 126^\circ,$$

οπότε θα είναι $A\hat{E}B = \dfrac{180^\circ - B\hat{A}E}{2} = \dfrac{180^\circ - 126^\circ}{2} = 27^\circ$.



Σχήμα 1

(β) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με ορθή γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ$, οπότε οι οξείες γωνίες του θα είναι 45° η καθεμία, δηλαδή $\Gamma\hat{A}\Delta = 45^\circ$. Επομένως είναι

$$B\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta = 36^\circ + 45^\circ = 81^\circ.$$

Ομοίως, από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ με $\Gamma\hat{A}E = 90^\circ$ προκύπτει ότι: $A\hat{E}\Gamma = 45^\circ$, οπότε $B\hat{E}\Gamma = A\hat{E}\Gamma - A\hat{E}B = 45^\circ - 27^\circ = 18^\circ$.

Πρόβλημα 3

Για τη φωταγώγηση μιας πλατείας, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοποθετήθηκαν περιμετρικά 182 κολώνες φωτισμού. Τέσσερις από αυτές τοποθετήθηκαν στις γωνίες τις πλατείας. Στη συνέχεια τοποθετήθηκαν και οι υπόλοιπες 178 στην περίμετρο της πλατείας έτσι ώστε κάθε δύο διαδοχικές κολώνες απέχουν τέσσερα μέτρα. Επίσης διαπιστώθηκε ότι η μεγαλύτερη πλευρά της πλατείας είχε διπλάσιες κολώνες από τη μικρή πλευρά, όπου σε κάθε πλευρά μετράμε και τις κολώνες στις γωνίες. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών της πλατείας. **Σημείωση**: *Θεωρείστε τις κολώνες πάνω στις πλευρές της πλατείας ως σημεία.*

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η μικρή πλευρά του ορθογωνίου είναι α μέτρα και η μεγάλη β μέτρα.

Τότε αφού κάθε δύο κολώνες απέχουν 4 μέτρα, η μικρή πλευρά θα έχει $\frac{\alpha}{4}+1$ κολώνες, συμπεριλαμβανομένων των γωνιών.

Ομοίως η μεγάλη πλευρά θα έχει $\frac{\beta}{4}+1$ κολώνες, συμπεριλαμβανομένων και των γωνιών, οπότε, αφού η μεγάλη πλευρά έχει διπλάσιες κολώνες από τη μικρή, θα έχουμε ότι

$$\frac{\beta}{4}+1=2\left(\frac{\alpha}{4}+1\right)\Rightarrow \beta=2\alpha+4.$$

Όμως συνολικά οι κολώνες είναι 182 και απέχουν τέσσερα μέτρα μεταξύ τους, οπότε η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $182\cdot 4=728$, δηλαδή $2\alpha+2\beta=728\Rightarrow a+\beta=364$.

Επομένως, με αντικατάσταση της τιμής του β, έχουμε:

$$\alpha+2\alpha+b=364\Rightarrow 3\alpha+4=364\Rightarrow \alpha=120. \text{ και } \beta=244.$$

Πρόβλημα 4

(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό εξαψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

Λύση

(α) Για να διαπιστώσουμε ποια ψηφία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αναλύουμε τον ακέραιο 12600 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε: $12600=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7$, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα όλους τους ακέραιους: 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, χωρίς να αποκλείεται το ψηφίο 1, αφού δεν επηρεάζει το γινόμενο των ψηφίων.

Προφανώς ο οκταψήφιος ακέραιος 22233557 έχει γινόμενο ψηφίων 126000. Επειδή ζητάμε το μικρότερο δυνατό ακέραιο με την ιδιότητα αυτή, θα εξετάσουμε τη δυνατότητα να βρούμε τρόπους μείωσης του αριθμού των ψηφίων που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτό μπορεί να γίνει, αν χρησιμοποιήσουμε ψηφία που προέρχονται από γινόμενα των παραπάνω αριθμών και ειδικότερα από γινόμενα των πέντε πρώτων στη σειρά ακέραιων. Αυτά είναι το $8=2\cdot 2\cdot 2$ και το $9=3\cdot 3$ που είναι και ο ελάχιστος δυνατός αριθμός τέτοιων ψηφίων. Έτσι λαμβάνουμε τον πενταψήφιο ακέραιο $\mathbf{A=55789}$ ως τον μικρότερο δυνατό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο 12600. Άλλη δυνατότητα είναι να πάρουμε τρία ψηφία $2,\ 4=2\cdot 2,\ 9=3\cdot 3$ ή $2, 6=2\cdot 3,\ 6=2\cdot 3.$ Τότε όμως προκύπτει εξαψήφιος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από τον πενταψήφιο 55789.

(β) Σκεπτόμενοι ομοίως με το ερώτημα (α), για την εύρεση εξαψήφιου ακέραιου έχουμε τις δυνατότητες των ακέραιων 245599 ή 255669. Όμως υπάρχει και η δυνατότητα χρησιμοποίησης του ψηφίου 1 στην αρχή του ακέραιου 55789, οπότε προκύπτει ο ακέραιος **155789** που είναι μικρότερος από τους δύο προηγούμενους.