Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=\dfrac{\alpha^2-1}{n^2+\alpha n}\cdot\left(\dfrac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\dfrac{\alpha+n-\alpha n^3-n^4}{1-\alpha^2}$, με α πραγματικό αριθμό μεγαλύτερο του 1 και n θετικό ακέραιο, $n>1$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{A}=n^2+n+1$

(β) Δεν είναι δυνατόν ο Α να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\frac{(\alpha+n)-n^3(\alpha+n)}{-(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n^2-n^2+n}{n-1}\right)\cdot\frac{(\alpha+n)(1-n^3)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)\cdot\frac{(\alpha+n)(1-n^3)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{n(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+n)(1-n^3)}{n(n+\alpha)(n-1)(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{n^3-1}{n-1}=n^2+n+1.\end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι: $n^2<\mathrm{A}=n^2+n+1<n^2+2n+1=(n+1)^2$, δηλαδή ο ακέραιος Α βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακέραιων, οπότε δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο κάποιου ακέραιου.

Πρόβλημα 2

Στις εξετάσεις του Α.Σ.Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 40. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 46. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 28, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 32. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Λύση

Έστω ότι τα εξεταζόμενα μαθήματα ήταν n και οι βαθμοί του υποψηφίου ήταν οι $x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n$ με τη διάταξη: $x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+x_n=40n \qquad (1)$$

$$x_2+\dots+x_{n-1}+x_n=46(n-1) \qquad (2)$$

$$x_1+x_2+\dots+x_{n-1}=28(n-1) \qquad (3)$$

$$x_2+\dots+x_{n-1}=32(n-2) \qquad (4)$$

Με αφαίρεση των (2), (3) και (4) από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$x_1=46-6n,\qquad x_n=12n+28,\qquad x_1+x_n=8n+64,$$

από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση:

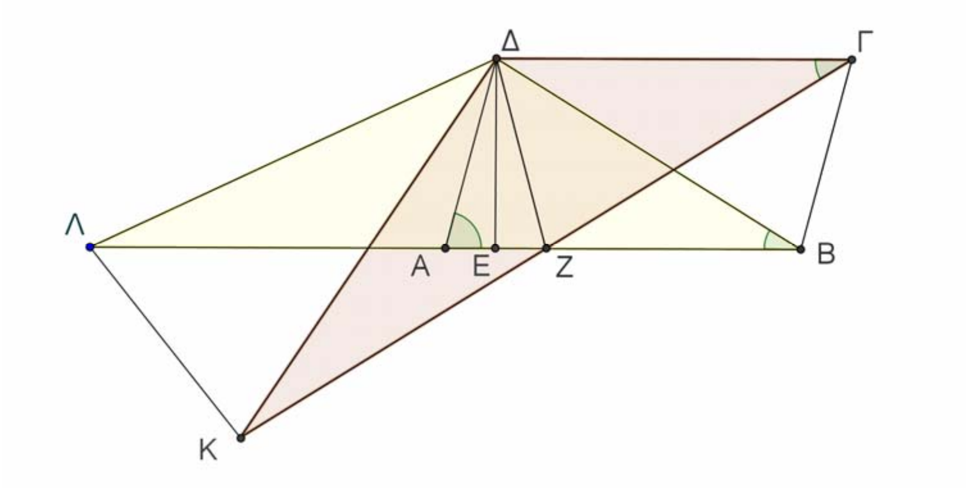
$$x_1+x_n=(46-6n)+(12n+28)=8n+64\Leftrightarrow 2n=10\Leftrightarrow n=5,$$

οπότε θα είναι $x_1=16$ και $x_5=88$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $AB = \Gamma\Delta = B\Delta$. Φέρουμε το ύψος του ΔE, όπου E σημείο της πλευράς AB. Έστω Z το συμμετρικό της κορυφής A ως προς κέντρο το σημείο Ε. Έστω επίσης Κ το συμμετρικό της κορυφής Γ ως προς κέντρο το σημείο Ζ και Λ το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς κέντρο το σημείο Α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

Λύση



Σχήμα 3

Έχουμε $\Delta Z = \Delta A$, λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία του ύψους ΔΕ. Επίσης είναι $\Delta A = B\Gamma$, από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Επομένως θα είναι $\Delta Z = B\Gamma$. Επιπλέον

$$\Delta\hat{Z}B = 180^\circ - \Delta\hat{Z}A = 180^\circ - \Delta\hat{A}B = A\hat{B}\Gamma .$$

Επομένως τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΖΒΓ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΔΖ = ΒΓ και ΖΒ κοινή) και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες. Άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

- $\Delta B = Z\Gamma \Rightarrow AB = Z\Gamma \Rightarrow 2\cdot AB = 2\cdot Z\Gamma \Rightarrow B\Lambda = \Gamma K$

- $Z\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{Z}B \Rightarrow Z\hat{B}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}Z$, αφού από $\Delta\Gamma \parallel ZB$ ισχύει ότι: $\Gamma\hat{Z}B = \Delta\hat{\Gamma}Z$.

Έτσι τα τρίγωνα ΔΒΛ και ΔΓΚ έχουν: $\Delta B = \Delta\Gamma$, ΒΛ=ΓΚ και $\Delta\hat{\Gamma}K = \Delta\hat{B}\Lambda$, οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους ΔΛ και ΔΚ ίσες.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 327 και υπόλοιπο 14. Επίσης ο αριθμός $\overline{wzyx} = 1000w + 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 227 και υπόλοιπο 16. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyzw}$.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w = 327(x + y + z + w) + 14 \qquad (1)$$

$$\overline{wzyx} = 1000w + 100z + 10y + x = 227(x + y + z + w) + 16, \qquad (2)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\overline{xyzw} - \overline{wzyx} = 999(x - w) + 90(y - z) = 100(x + y + z + w) - 2. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $17 \le x + y + z + w \le 30$, οπότε

$$1698 \le 100(x + y + z + w) - 2 \le 2998$$

$$\Rightarrow 1698 \le 999(x - w) + 90(y - z) \le 2998.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $x - w \in \{1, 2, 3\}$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Για $x - w = 1$ πρέπει $y - z \in \{8, 9\}$, οπότε από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα $x + y + z + w$.
- Για $x - w = 2$, από την (3) λαμβάνουμε:

  $$9(y - z) = 10(x + y + z + w - 20) = \text{πολλαπλάσιο του} 10,$$

  οπότε πρέπει: $y - z = 0$ και $x + y + z + w = 20$. Τότε από τις (1) και (2) έχουμε:

  $$\overline{xyzw} = 6554 \text{ και } \overline{wzyx} = 4556.$$
- Για $x - w = 3$ πρέπει $y - z = 0$, οπότε από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα $x + y + z + w$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης

$$\text{Α}=\left(\frac{25}{x+8}-\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[3]{x}+4}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^4}+8\cdot\sqrt[3]{x}}{9-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{21-\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x}},\ \text{όπου}\ x>0\ \text{ και }\ x\neq 27.$$

Λύση.

Θέτουμε: $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}=y>0,\ x>0\Rightarrow x=y^3,\ x,y>0$, οπότε η Α γράφεται:

$$\text{Α}=\left(\frac{25}{y^3+8}-\frac{y+2}{y^2-2y+4}\right)\cdot\frac{y^4+8y}{9-y^2}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\left[\frac{25}{(y+2)(y^2-2y+4)}-\frac{y+2}{y^2-2y+4}\right]\cdot\frac{y(y^3+8)}{(3-y)\cdot(3+y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{[5^2-(y+2)^2]}{(y+2)\cdot(y^2-2y+4)}\cdot\frac{y\cdot(y+2)\cdot(y^2-2y+4)}{(3+y)\cdot(3-y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{(7+y)(3-y)y(y+2)(y^2-2\cdot y+4)}{(y+2)(y^2-2y+4)(3+y)(3-y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{y(7+y)}{3+y}+\frac{21-y^2}{3+y}=\frac{7y+y^2+21-y^2}{3+y}=\frac{7(y+3)}{y+3}=7.$$

.

Πρόβλημα 2

Να εξετάσετε, αν η εξίσωση $64x^2+16^{10}x-2016^{2016}=0$ έχει ρητή ρίζα.

Λύση

Αν η εξίσωση έχει ρητή λύση, τότε η διακρίνουσα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο ρητού. Έχουμε ότι $\Delta=16^{20}+4\cdot 64\cdot 2016^{2016}$ και ας υποθέσουμε ότι:

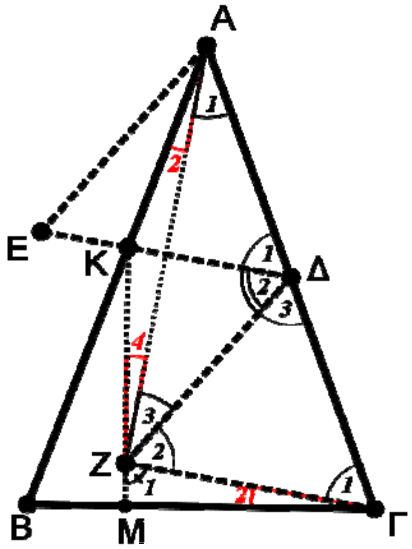
$$16^{20}+4\cdot 64\cdot 2016^{2016}=\kappa^2,\ \text{όπου}\ \kappa\ \text{ρητός.}$$

Αφού όμως το αριστερό μέλος είναι ακέραιος, θα πρέπει και ο κ να είναι ακέραιος. Παρατηρούμε ότι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 16^{20} είναι 6 και το ίδιο ισχύει για το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $4\cdot 64\cdot 2016^{2016}=256\cdot 2016^{2016}$. Επομένως το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $16^{20}+4\cdot 64\cdot 2016^{2016}$ είναι το 2, αφού $6+6=12$. Όμως, κάθε τέλειο τετράγωνο λήγει σε κάποιο από τα ψηφία $0,1,4,5,6,9$, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως η εξίσωση δεν έχει ρητή ρίζα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ με $\hat{A} = 40^0$ και έστω Δ το μέσο της πλευράς $A\Gamma$. Θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AE\Delta$, $\Delta\Gamma Z$ των οποίων οι κορυφές E, Z βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή την $A\Gamma$ και στο οποίο ανήκει η κορυφή B. Αν η $E\Delta$ τέμνει την AB στο K, να αποδείξετε ότι η KZ είναι κάθετη στη $B\Gamma$.

Λύση



Σχήμα 3

Έστω ότι η KZ τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο M. Θα αποδείξουμε ότι $\hat{\Gamma}_2 + \hat{Z}_1 = 90^0$

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta Z$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma}_1 = 60^0$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($\hat{B} = \hat{\Gamma}$) με $\hat{A} = 40^0$ (οπότε από $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0$) έχουμε: $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 70^0$.

$$\text{Άρα } \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_1 = 70^0 - 60^0 = 10^0 \qquad (1).$$

Ισχύει $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 = 180^0$ και επειδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_3 = 60^0$ (ως γωνίες ισόπλευρων τριγώνων), συμπεραίνουμε ότι: $\hat{\Delta}_2 = 60^0$.

Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές (διότι $A\Delta = \Delta\Gamma = \Delta Z$) και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 60^0$.

Δηλαδή η ΔK είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}Z$, οπότε θα είναι και μεσοκάθετος της βάσης AZ του (ισοσκελούς) τριγώνου $A\Delta Z$.
Εφόσον η ΔK είναι μεσοκάθετη της AZ, το τρίγωνο AKZ είναι ισοσκελές.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta Z$ έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{Z}_3$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο AKZ έχουμε: $\hat{A}_2 = \hat{Z}_4$.

Προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε: $\hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 40^0$.

Από τη ισότητα $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 = 180^0$ (με δεδομένο ότι $\hat{Z}_2 = 60^0$), καταλήγουμε:

$$\hat{Z}_1 = 80^0 \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ έχουμε: $\hat{\Gamma}_2 + \hat{Z}_1 = 90^0$.

Πρόβλημα 4
Τρεις φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης και ο Βασίλης, έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα στη σακούλα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Ο Βαγγέλης παίρνει κάποιες από τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{4}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Τέλος ο Βασίλης παίρνει τις υπόλοιπες που είχαν μείνει στη σακούλα κρατάει το $\frac{1}{6}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει θετικό ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι τριπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη και οι καραμέλες του Βαγγέλη είναι διπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Λύση
Έστω α οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Γιάννης και β οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Βαγγέλης και γ ο Βασίλης. Τότε ο Γιάννης κρατάει $\frac{3\alpha}{4}$ και δίνει στο Βαγγέλη και το Βασίλη $\frac{\alpha}{8}$.

Αντίστοιχα, ο Βαγγέλης κρατάει $\frac{\beta}{4}$ και δίνει στο Γιάννη και το Βασίλη $\frac{3\beta}{8}$. Και αφού σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες, πρέπει το β να είναι πολλαπλάσιο του 8. (1)

Τέλος, ο Βασίλης κρατάει $\frac{\gamma}{6}$ και δίνει στο Γιάννη και το Βαγγέλη από $\frac{5\gamma}{12}$.

Επομένως ο Γιάννης έχει συνολικά $\frac{3\alpha}{4}+\frac{3\beta}{8}+\frac{5\gamma}{12}$ καραμέλες, ο Βαγγέλης έχει $\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{4}+\frac{5\gamma}{12}$ και ο Βασίλης έχει $\frac{\alpha}{8}+\frac{3\beta}{8}+\frac{\gamma}{6}$.

Επομένως πρέπει να ισχύει

$$3\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{3\beta}{8}+\frac{\gamma}{6}\right)=\frac{3\alpha}{4}+\frac{3\beta}{8}+\frac{5\gamma}{12} \Leftrightarrow \frac{3\beta}{4}+\frac{\gamma}{12}=\frac{3\alpha}{8} \Leftrightarrow 18\beta+2\gamma=9\alpha \,. \quad (2)$$

$$2\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{3\beta}{8}+\frac{\gamma}{6}\right)=\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{4}+\frac{5\gamma}{12} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma}{12} \Leftrightarrow 3\alpha+12\beta=2\gamma \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις (2), (3) κατά μέλη έχουμε ότι :

$$30\beta=6\alpha \Leftrightarrow 5\beta=\alpha$$

Οπότε από την (3) προκύπτει ότι:

$$27\beta=2\gamma\,.$$

Το β αφού είναι πολλαπλάσιο του 8 η ελάχιστη τιμή του είναι 8. Οπότε η ελάχιστη τιμή για το α είναι $\alpha=5\cdot 8=40$ και για το $\gamma=\frac{27\cdot 8}{2}=27\cdot 4=108$. Δηλαδή η ελάχιστη τιμή από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $8+40+108=156$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$x^2+4x-9=4|x|.$$

Λύση

Για $x\geq 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2-9=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9}\Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-3,$$

από τις οποίες είναι δεκτή μόνο η λύση: $x=3$.

Για $x<0$ η εξίσωση γίνεται

$$x^2+8x-9=0, \qquad (2)$$

με διακρίνουσα $\Delta=64+36=100$. Επομένως, η εξίσωση αυτή έχει 2 διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο $\mathbb{R}$, τις

$$x=\frac{-8\pm 10}{2}\Leftrightarrow x=-9 \text{ ή } x=1,$$

από τις οποίες είναι δεκτή μόνο η $x=-9$.

Επομένως, η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις $x=3$ και $x=-9$.

Πρόβλημα 2

Βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους $\overline{abc}=100a+10b+c$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\overline{abc}=(a+b+c)^2+a+b+c.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση με αγνώστους τα ψηφία του αριθμού γράφεται:

$$\overline{abc}=(a+b+c)^2+a+b+c\Leftrightarrow 100a+10b+c=(a+b+c)^2+a+b+c$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2=99a+9b\Leftrightarrow (a+b+c)^2=9(11a+b).$$

Επειδή $1\leq a\leq 9, 0\leq b\leq 9$, από την τελευταία ισότητα μπορούμε να έχουμε έναν περιορισμό για τον αριθμό $(a+b+c)^2$. Πράγματι, έχουμε

$$9\cdot(11\cdot 1+0)=99\leq 9(11a+b)\leq 9(11\cdot 9+9)=972$$

$$\Rightarrow 99\leq (a+b+c)^2\leq 972\Rightarrow 10\leq a+b+c\leq 31$$

Όμως είναι $a+b+c\leq 27$, οπότε: $10\leq a+b+c\leq 27$.

Επίσης από την ισότητα $(a+b+c)^2=9(11a+b)$ προκύπτει ότι ο αριθμός $(a+b+c)^2$ είναι πολλαπλάσιο του 9, οπότε ο αριθμός $a+b+c$ θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι, αν ήταν $a+b+c\neq 3k$, όπου k θετικός ακέραιος, τότε θα είχαμε τις περιπτώσεις $a+b+c=3k+1$ ή $a+b+c=3k+2$, $k\in\mathbb{Z}$, από τις οποίες έπεται ότι $(a+b+c)^2 = \pi o\lambda.3+1$, δηλαδή $(a+b+c)^2 \neq \pi o\lambda.9$, δηλαδή ο αριθμός $(a+b+c)^2$ δεν θα ήταν πολλαπλάσιο του 9, άτοπο. Επομένως οι δυνατές τιμές του αθροίσματος $a+b+c$ είναι οι: 12, 15, 18, 21, 24, 27.

- Αν $a+b+c=12$, τότε $11a+b=16 \Leftrightarrow a=1, b=5$, οπότε $c=6$ και $\overline{abc}=156$
- Αν $a+b+c=15$, τότε $11a+b=25 \Leftrightarrow a=2, b=3$, οπότε $c=10$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=18$, τότε $11a+b=36 \Leftrightarrow a=3, b=3$, οπότε $c=12$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=21$, τότε $11a+b=49 \Leftrightarrow a=4, b=5$, οπότε $c=12$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=24$, τότε $11a+b=64 \Leftrightarrow a=5, b=9$, οπότε $c=10$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=27$, τότε $11a+b=81 \Leftrightarrow a=7, b=4$, οπότε $c=16$, άτοπο.

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο **156.**

Πρόβλημα 3

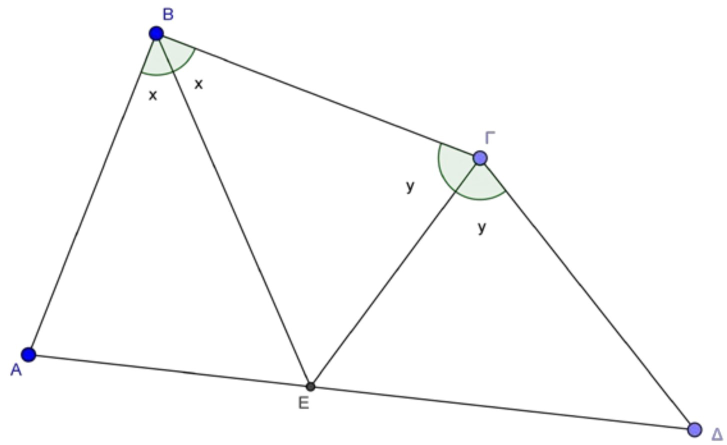
Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ώστε $\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=240^\circ$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{B}\Gamma=\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\mathrm{B}}, \hat{\Gamma}$ τέμνονται πάνω στην πλευρά ΑΔ.

Λύση

Έστω οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\mathrm{B}}, \hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ε. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Α, Ε και Δ είναι συνευθειακά, δηλαδή το Ε βρίσκεται πάνω στην πλευρά ΑΔ. Έχουμε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=x$ και $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta=y$ με $x+y=120^\circ$.Τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΕ είναι ίσα, αφού έχουν $\mathrm{AB}=\mathrm{B}\Gamma$, ΒΕ κοινή και την περιεχόμενη γωνία ίση. Επομένως θα είναι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=y$ και από το τρίγωνο ΒΑΕ έχουμε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}=180^\circ-x-y=60^\circ$. Από την ισότητα των τριγώνων έχουμε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A}=60^\circ$.

Όμοια τα τρίγωνα ΒΕΓ, ΓΔΕ είναι ίσα αφού έχουν $\mathrm{B}\Gamma=\Gamma\Delta$, ΓΕ κοινή και την περιεχόμενη γωνία ίση λόγω διχοτόμου. Άρα θα είναι: $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\Delta=\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}=60^\circ$.

Επομένως $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}+\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma+\Gamma\hat{\mathrm{E}}\Delta=60^\circ+60^\circ+60^\circ=180^\circ$ και άρα το Ε ανήκει στην ΑΔ.



Σχήμα 3

Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι Α και Β ανέλαβαν την εκτέλεση ενός έργου. Ο Β ξεκίνησε να εργάζεται μία ώρα μετά το ξεκίνημα του Α. Τρεις ώρες μετά το ξεκίνημα της εργασίας του Α διαπίστωσαν ότι έχουν ακόμη να εκτελέσουν τα $\frac{9}{20}$ του έργου. Όταν τελείωσε το έργο διαπίστωσαν ότι ο καθένας τους είχε εκτελέσει το μισό του έργου. Να βρείτε σε πόσες ώρες μπορεί ο καθένας από του δύο φίλους να τελειώσει το έργο, αν εργάζεται μόνος του.

Λύση.

Έστω ότι για την αποπεράτωση του έργου, ο Α, αν εργάζεται μόνος του, χρειάζεται x ώρες και ο Β, αν εργάζεται μόνος του, χρειάζεται y ώρες. Τότε σε μία ώρα ο Α θα εκτελεί το $\frac{1}{x}$ του έργου, ενώ ο Β θα εκτελεί το $\frac{1}{y}$ του έργου. Έτσι 3 ώρες μετά την έναρξη εργασίας του Α αυτός θα έχει εκτελέσει τα $\frac{3}{x}$ του έργου, ενώ ο Β θα έχει εργαστεί 2 ώρες και θα έχει εκτελέσει τα $\frac{2}{y}$ του έργου. Σύμφωνα με την υπόθεση, σε 3 ώρες το μέρος του έργου που έχει εκτελεστεί είναι $1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$, οπότε θα έχουμε την εξίσωση

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{11}{20} \qquad (1)$$

Επειδή στο τελείωμα του έργου ο καθένας έχει εκτελέσει το μισό μέρος του έργου, θα έχουν εργαστεί ο Α $\frac{x}{2}$ ώρες και ο Β $\frac{y}{2}$ ώρες, αντίστοιχα. Επομένως, θα έχουμε

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=1 \qquad (2)$$

Άρα έχουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{11}{20}\\ \frac{x}{2}-\frac{y}{2}=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}20(2x+3y)=11xy\\ x-y=2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}20(2x+3y)=11xy\\ y=x-2\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}20(2x+3(x-2))=11x(x-2)\\ y=x-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}100x-120=11x^2-22x\\ y=x-2\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}11x^2-122x+120=0\\ y=x-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x^2-\left(10+\frac{12}{11}\right)x+10\cdot\frac{12}{11}=0\\ y=x-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x=10 \text{ ή } x=\frac{12}{11}\\ y=x-2\end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow (x,y)=(10,8)$, αφού η λύση $x=\frac{12}{11}$ απορρίπτεται, γιατί σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει να είναι $x>3$. Άρα, ο Α τελειώνει μόνος του το έργο σε 10 ώρες και Β το τελειώνει μόνος του σε 8 ώρες.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x + y,\ a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_3 = x^3 + y^3$ είναι ακέραιος.

Λύση

Επειδή $x^3 + y^3 = \left(x+y\right)^3 - 3xy\left(x+y\right) \in \mathbb{Z}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $xy \in \mathbb{Z}$.
Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε

$$a_1^2 - a_2 = \left(x+y\right)^2 - \left(x^2 + y^2\right) = 2xy \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

$$a_2^2 - a_4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - \left(x^4 + y^4\right) = 2x^2y^2 \in \mathbb{Z}\,, \qquad (2)$$

αφού $a_1, a_2, a_4 \in \mathbb{Z}$. Από την (1) έπεται ότι:

$$xy = \frac{a_1^2 - a_2}{2}\ .$$

Θα αποδείξουμε ότι $xy \in \mathbb{Z}$. Πράγματι, αν $xy = \dfrac{a_1^2 - a_2}{2} \notin \mathbb{Z}$, τότε θα είχαμε $a_1^2 - a_2 = m$ περιττός ακέραιος, οπότε από τη σχέση (2) θα είχαμε ότι

$$2x^2y^2 = 2 \cdot \frac{\left(a_1^2 - a_2\right)^2}{4} = \frac{\left(a_1^2 - a_2\right)^2}{2} = \frac{m^2}{2} \notin \mathbb{Z},$$

αφού m περιττός. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί αντίκειται στη σχέση (2). Επομένως αληθεύει ότι $xy \in \mathbb{Z}$.
Άρα έχουμε:

$$x^3 + y^3 = \left(x+y\right)^3 - 3xy\left(x+y\right) \in \mathbb{Z},$$

αφού $x + y,\ xy \in \mathbb{Z}$. Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$x^3 + y^3 = \left(x^2 + y^2\right)\left(x+y\right) - xy\left(x+y\right) \in \mathbb{Z}, \text{ αφού } x^2 + y^2,\ x+y,\ xy \in \mathbb{Z}.$$

Πρόβλημα 2

Έστω $\mathrm{A} = \kappa\left(\kappa+1\right)\left(\kappa+2\right)\left(\kappa+3\right)$ το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών θετικών ακέραιων.
(α) Να αποδείξετε ότι ο Α ισούται με το γινόμενο δύο διαδοχικών άρτιων ακέραιων.
(β) Είναι δυνατόν να είναι ο Α ίσος με το τετράγωνο ενός ακέραιου;

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \kappa\left(\kappa+1\right)\left(\kappa+2\right)\left(\kappa+3\right) = \kappa\left(\kappa+3\right)\left(\kappa+1\right)\left(\kappa+2\right)\\ &= \kappa\left(\kappa+3\right)\left(\kappa^2 + 3\kappa + 2\right) = \kappa\left(\kappa+3\right)\left(\kappa(\kappa+3) + 2\right)\end{aligned}$$

Επομένως ο Α ισούται με το γινόμενο των ακεραίων $\kappa\left(\kappa+3\right)$, $\kappa\left(\kappa+3\right) + 2$ οι οποίοι διαφέρουν κατά 2 και επιπλέον είναι άρτιοι, αφού στο γινόμενο $\kappa\left(\kappa+3\right)$ ο ένας από τους δύο παράγοντες είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.
(β) Έστω $\kappa\left(\kappa+3\right) = 2\mu$, όπου μ θετικός ακέραιος. Τότε $\mathrm{A} = 2\mu\left(2\mu+2\right) = 4\mu\left(\mu+1\right)$

Αν ήταν ο Α τέλειο τετράγωνο ακεραίου, τότε θα είχαμε $\mathrm{A} = 4\mu(\mu+1) = (2\lambda)^2 = 4\lambda^2$, όπου

λ ακέραιος. Θα είχαμε τότε $\mu(\mu+1) = \lambda^2$, όπου μ θετικός ακέραιος και λ ακέραιος, το οποίο είναι άτοπο, γιατί

$$\mu^2 < \mu^2 + \mu = \mu(\mu+1) < (\mu+1)^2,$$

δηλαδή ο $\mu(\mu+1)$ βρίσκεται μεταξύ δύο τετραγώνων διαδοχικών θετικών ακέραιων.

Πρόβλημα 3

Ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει άθροισμα των δύο μη παράλληλων πλευρών του ίσο με $4\sqrt{10}$ μέτρα, ύψος ίσο με 6 μέτρα και το εμβαδόν του ισούται με 72 τετραγωνικά μέτρα. Αν το τραπέζιο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας R .

Λύση

Ονομάζουμε Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου και θέτουμε $\mathrm{AB} = \alpha,\ \Gamma\Delta = \beta$ και φέρουμε το ύψος $\mathrm{AE} = 6$. Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές, θα ισχύει ότι ΒΓ=ΑΔ. Όμως $\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{A\Delta} = 4\sqrt{10}$, οπότε $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{A\Delta} = 2\sqrt{10}$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΕ παίρνουμε

$$\mathrm{AE}^2 + \mathrm{E\Delta}^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow \mathrm{E\Delta}^2 = 40 - 36 \Leftrightarrow \mathrm{E\Delta} = 2 \qquad (1)$$

Επιπλέον από τον τύπο για το εμβαδό του τραπεζίου έχουμε:

$$\mathrm{E} = \frac{(\alpha+\beta)\cdot \mathrm{A\Delta}}{2} \Rightarrow 72 = \frac{(\alpha+\beta)\cdot 6}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = 24 \qquad (2)$$

Αν τώρα φέρουμε την κάθετη από το Ο στις βάσεις που τις τέμνει στα μέσα τους Ν και Μ, τότε

$$\mathrm{E\Delta} = \mathrm{M\Delta} - \mathrm{ME} = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} \beta - \alpha = 4 \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) παίρνουμε $\alpha = 10,\ \beta = 14$.

Αν τέλος ονομάσουμε $\mathrm{OM} = x,\ \mathrm{ON} = y$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Αν το Ο είναι μεταξύ των Μ, Ν τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα τρίγωνα ΟΜΓ, ΟΝΒ, έχουμε

$$x^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + 49 = R^2 \qquad (4)$$

και

$$y^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow y^2 + 25 = R^2 \Rightarrow (6-x)^2 + 25 = R^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 12x + 36 + 25 = R^2 \Rightarrow 61 - 12x = R^2 - x^2 \overset{(4)}{=} 49$$

οπότε $12x = 12 \Rightarrow x = 1$, οπότε από την (4) έχουμε ότι $R = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

(β) Αν το Ο δεν είναι μεταξύ των Μ, Ν τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα τρίγωνα ΟΜΓ, ΟΝΒ, έχουμε

$$x^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + 49 = R^2 \qquad (4)$$

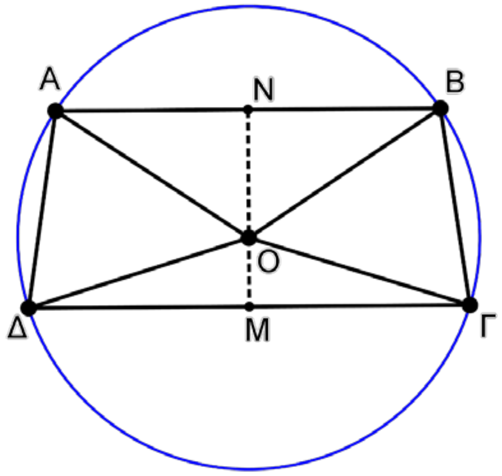
και

$$y^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow y^2 + 25 = R^2 \Rightarrow (6+x)^2 + 25 = R^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 12x + 36 + 25 = R^2 \Rightarrow 61 + 12x = R^2 - x^2 \overset{(4)}{=} 49$$

οπότε $12x + 12 = 0$, άτοπο.

Επομένως υπάρχει μόνο μία δυνατή περίπτωση στην οποία $R = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$



Σχήμα 3

Πρόβλημα 4

Πόσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι πολλαπλασιαζόμενοι με το 2007 δίνουν αποτέλεσμα που να λήγει σε 2008;

Λύση

Θα βρούμε πρώτα έναν τετραψήφιο x τέτοιον, ώστε ο $2007x$ να λήγει σε 2008. Γράφουμε $2007x = 2000x + 7x$ οπότε αφού ο $2000x$ λήγει σε 000, αναζητούμε x ώστε ο $7x$ να λήγει σε 008.

Για να λήγει ο $7x$ σε 008, πρέπει ο x να λήγει σε 4. Τότε έχουμε δύο κρατούμενα, οπότε το προτελευταίο ψηφίο του x πρέπει να είναι 4. Έχουμε τρία κρατούμενα, οπότε το τρίτο από το τέλος ψηφίο του x πρέπει να είναι 1. Επομένως ο x λήγει σε 144.

Αναζητούμε λοιπόν τετραψήφιο $\overline{a144}$ τέτοιον, ώστε να πολλαπλασιάζεται με τον 2007 και ο αριθμός που προκύπτει να λήγει σε 2008. Ο $2000 \cdot \overline{a144}$ έχει τέταρτο ψηφίο από το τέλος το τελευταίο ψηφίο του $2a$. Επιπλέον ο $7 \cdot \overline{a144}$ έχει τέταρτο ψηφίο από το τέλος ίσο με το τελευταίο ψηφίο του $7a+1$ (γιατί έχουμε και ένα κρατούμενο). Οπότε ο $2a + (7a+1) = 9a + 1$, πρέπει να λήγει σε 2, οπότε πρέπει $a = 9$.

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 9144. Πράγματι, το γινόμενο $2007 \cdot 9144$ ισούται με 18352008 που λήγει σε 2008.

Αν τώρα πάρουμε έναν οποιαδήποτε εξαψήφιο $\overline{\beta\gamma9144}$ και τον πολλαπλασιάσουμε με τον 2007, τα τέσσερα τελευταία ψηφία του γινομένου δεν επηρεάζονται άρα λήγει και αυτός σε 2008. Για το διψήφιο τμήμα $\overline{\beta\gamma}$ έχουμε επιλογές από 10 έως 99. Επομένως έχουμε συνολικά 90 επιλογές, άρα έχουμε 90 εξαψήφιους με τη ζητούμενη ιδιότητα.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε: $\alpha^3+\beta^3=2\alpha\beta(\alpha+\beta)$,

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{K}=\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\alpha^3+\beta^3=2\alpha\beta(\alpha+\beta) \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)=2\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\left(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2\right)=0 \overset{\alpha+\beta>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2=0$$

$$\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+1=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Επειδή το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)+1=0$ ισούται με 1, έπεται ότι οι αριθμοί $\rho_1=\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ και $\rho_2=\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (ή με αντίστροφη σειρά) είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)+1=0$ με άθροισμα $\rho_1+\rho_2=3$. Επομένως, έχουμε:

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2=3^2-2=7$$

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι n, m είναι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί $\dfrac{50}{3n-2}$ και $\dfrac{243}{4m-1}$ να είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A=2(n+1)-3(m+2)+7 .$$

(β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση:

$$B=\frac{162}{n^2}-\frac{m^2}{3721}.$$

Λύση

Οι θετικοί διαιρέτες του 50 είναι οι αριθμοί 1, 2, 5, 10, 25, 50, οπότε ο $3n-2$ είναι κάποιος από αυτούς, οπότε ο $3n$ είναι κάποιος από τους 3, 4, 7, 12, 27, 52 οπότε οι πιθανές τιμές του n, αφού είναι θετικός ακέραιος, είναι 1, 4, 9.

Οι θετικοί διαιρέτες του $243=3^5$ είναι οι αριθμοί 1, 3, 9, 27, 81, 243 οπότε ο $4m-1$ είναι κάποιος από αυτούς, οπότε ο $4m$ είναι κάποιος από τους 2, 4, 10, 28, 82, 244, οπότε οι πιθανές τιμές του m είναι 1, 7, 61.

(α) Η παράσταση $A=2(n+1)-3(m+2)+7=2n-3m+3$ παίρνει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή της όταν ο ακέραιος n πάρει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του και ο ακέραιος m πάρει τη μικρότερη δυνατή τιμή του. Τότε είναι: $\max A=2\cdot 9-3\cdot 1+3=18$.

(β) Έχουμε ότι $B=\frac{162}{n^2}-\frac{m^2}{3721}$, οπότε η παράσταση B παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή της όταν ο ακέραιος n πάρει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του και ο ακέραιος m πάρει επίσης τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του. Τότε έχουμε:

$$\min B=\frac{162}{9^2}-\frac{61^2}{3721}=\frac{162}{81}-\frac{3721}{3721}=2-1=1.$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x,y,z που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\frac{y+3x}{xy}=\frac{3z+5y}{yz}=\frac{5x+z}{zx}=\frac{140}{x^2+y^2+z^2}.$$

Λύση

Οι δύο πρώτες εξισώσεις μπορούν να γραφούν:

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=\frac{5}{z}+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{5}{z},\ \frac{1}{x}=\frac{3}{y}\Leftrightarrow y=3x,\ z=5x.$$

Τότε έχουμε:

$$\frac{3z+5y}{yz}=\frac{140}{x^2+y^2+z^2}\Leftrightarrow\frac{15x+15x}{15x^2}=\frac{140}{x^2+9x^2+25x^2}\Leftrightarrow\frac{30x}{15x^2}=\frac{140}{35x^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{x}=\frac{140}{35x^2}\Leftrightarrow\frac{2}{x}=\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow 2x^2=4x\Leftrightarrow 2x\left(x-2\right)=0\overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow}x=2.$$

Άρα έχουμε: $x=2,\ y=6,\ z=10$.

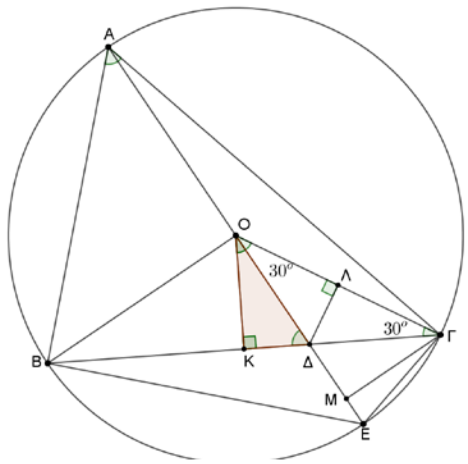
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$. Η διάμετρος ΑΕ του περιγεγραμμένου κύκλου $C\left(\mathrm{O},R\right)$ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ, έτσι ώστε $\mathrm{B\Delta}=2\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{\Delta\hat{O}\Gamma}=30^\circ$

(β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΕΓ συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Φέρουμε την $\mathrm{OK} \perp \mathrm{B\Gamma}$, οπότε το Κ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και $\mathrm{K\Gamma} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Επειδή $\frac{\mathrm{B\Delta}}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{1} = \frac{\mathrm{B\Delta} + \Delta\Gamma}{2+1} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{3} = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \Delta\Gamma = \frac{\alpha}{3}$ και $\mathrm{K\Delta} = \mathrm{K\Gamma} - \Delta\Gamma = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha}{6}$.

Επίσης $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\Delta = \mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{K} = 90^\circ - \mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 90^\circ - \hat{\mathrm{A}} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, οπότε, αν φέρουμε $\Delta\Lambda \perp \mathrm{O\Gamma}$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΛ με $\Delta\hat{\Gamma}\Lambda = 30^\circ$ προκύπτει ότι η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή : $\Delta\Lambda = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{6}$.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το ημίτονο τη γωνίας των 30° στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΛ, οπότε έχουμε: $\Delta\Lambda = \Delta\Gamma \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{6}$.

Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΚΔ και ΟΛΔ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΟΔ κοινή υποτείνουσα και $\mathrm{K\Delta} = \Lambda\Delta$), οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν $\mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{O}}\Lambda$ και αφού $\mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Delta + \Delta\hat{\mathrm{O}}\Lambda = \mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 60^\circ$, έπεται ότι $\mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{O}}\Lambda = 30^\circ \Rightarrow \Delta\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 30^\circ$.

(β) Επειδή το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{OA} = \mathrm{O\Gamma} = R$, και την εξωτερική του γωνία $\Delta\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 30^\circ$, έπεται ότι $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \frac{\Delta\hat{\mathrm{O}}\Gamma}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$. Επομένως θα είναι

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma - \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ.$$

Τότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με ύψος την ακτίνα ΒΟ. Από το τρίγωνο ΟΚΓ προκύπτει η σχέση της ακτίνας R με την πλευρά α, αφού είναι $\mathrm{OK} = \frac{R}{2}$ και

$$\mathrm{O\Gamma}^2 - \mathrm{OK}^2 = \mathrm{K\Gamma}^2 \Rightarrow R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3R^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow \alpha = R\sqrt{3}.$$

Το ύψος ΓΜ του τριγώνου ΑΓΕ παρατηρούμε προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΜ με $\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 30^\circ$ ότι είναι $\Gamma\mathrm{M} = \frac{\mathrm{O\Gamma}}{2} = \frac{R}{2}$.

Για το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΕΓ έχουμε:

$$\mathrm{E}_{(\mathrm{ABE\Gamma})} = \mathrm{E}_{(\mathrm{ABE})} + \mathrm{E}_{(\mathrm{AE\Gamma})} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AE} \cdot \mathrm{BO} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AE} \cdot \Gamma\mathrm{M} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R + \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \frac{R}{2} = \frac{3R^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2}.$$