ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$32^{η}$ Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015

Θέματα μικρών τάξεων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (*εκτός από αυτές τις λύσεις κάθε άλλη τεκμηριωμένη λύση, είναι αποδεκτή*)

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 + (\alpha - 2)x - (\alpha - 1)(2\alpha - 3) = 0$$

έχει δύο ρίζες, τέτοιες ώστε η μία να ισούται με το τετράγωνο της άλλης.

Λύση

Έχουμε $\Delta = (\alpha - 2)^2 + 4(\alpha - 1)(2\alpha - 3) = 9\alpha^2 - 24\alpha + 16 = (3\alpha - 4)^2$, οπότε η εξίσωση έχει τις ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{2 - \alpha \pm (3\alpha - 4)}{2} \Leftrightarrow x_1 = \alpha - 1,\ x_2 = -2\alpha + 3.$$

Επομένως ζητάμε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει:

$$x_1 = x_2^2 \text{ ή } x_2 = x_1^2 \Leftrightarrow \alpha - 1 = (-2\alpha + 3)^2 \text{ ή } -2\alpha + 3 = (\alpha - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 = 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 \quad \text{ή} \quad -2\alpha + 3 = \alpha^2 - 2\alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 13\alpha + 10 = 0 \text{ ή } \alpha^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ ή } \alpha = \frac{5}{4} \text{ ή } \alpha = \sqrt{2} \text{ ή } \alpha = -\sqrt{2}.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη μη αρνητικών ακέραιων (m,n) με $m \geq n$, που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\mathrm{A} = (m+n)^3$ να διαιρεί τον αριθμό $\mathrm{B} = 2n(3m^2 + n^2) + 8$.

.

Λύση

Έστω $\mathrm{A} = (m+n)^3, \mathrm{B} = 2n(3m^2 + n^2) + 8$. Επειδή $(m+n)^3 \,\big|\, 2n(3m^2 + n^2) + 8$ πρέπει να είναι:

$$(m+n)^3 \leq 2n(3m^2 + n^2) + 8 \Leftrightarrow m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 \leq 6m^2n + 2n^3 + 8$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3 \leq 8 \Leftrightarrow (m-n)^3 \leq 8 \overset{m \geq n}{\Longleftrightarrow} m - n \leq 2 \Leftrightarrow m - n \in \{0,1,2\}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $m - n = 0 \Leftrightarrow m = n.$ Τότε $\mathrm{A} = 8m^3, \mathrm{B} = 8m^3 + 8$, οπότε
  $\mathrm{A} \,|\, \mathrm{B} \Leftrightarrow 8m^3 \,|\, 8m^3 + 8 \Leftrightarrow 8m^3 \,|\, 8 \Leftrightarrow m = 1,$ αφού $m > 0 \Rightarrow (m,n) = (1,1).$
- $m - n = 1$. Τότε έχουμε

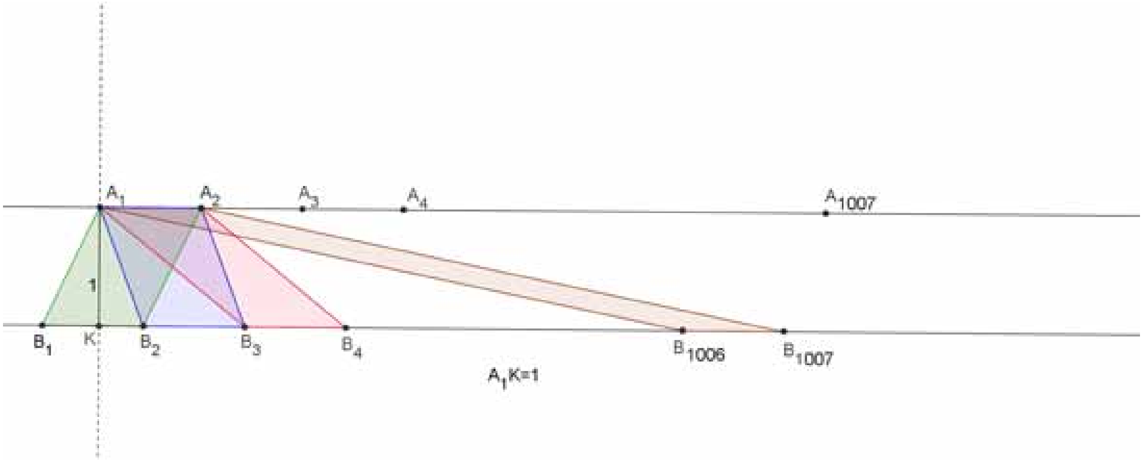
$$\mathrm{A} = (2n+1)^3, \mathrm{B} = 2n\left(3(n+1)^2 + n^2\right) + 8 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 8 = (2n+1)^3 + 7.$$

Επομένως, $\mathrm{A} \mid \mathrm{B} \Leftrightarrow (2n+1)^3 \mid 7 \Rightarrow 2n+1 = 1 \Leftrightarrow n = 0,\ m = 1$ και $(m,n) = (1,0)$.

- $m - n = 2$. Τότε $\mathrm{A} = 8(n+1)^3 = \mathrm{B}$, οπότε έχουμε άπειρα ζεύγη λύσεων της μορφής $(k+2,k)$, με $k \geq 0$.

Πρόβλημα 3.
Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε κατάλληλα στο επίπεδο 2014 σημεία, έτσι ώστε με κορυφές από αυτά τα σημεία να κατασκευάσουμε 1006^2 παραλληλόγραμμα εμβαδού 1;

Λύση
Θα αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν. Παίρνουμε δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που να έχουν απόσταση 1. Τοποθετούμε σε κάθε μία από αυτές από 1007 σημεία ώστε τα οποία να απέχουν μεταξύ τους απόσταση 1. Τότε στην ε_1 έχουμε 1006 μοναδιαία τμήματα και στην ε_2 έχουμε 1006 μοναδιαία τμήματα. Οποιοδήποτε μοναδιαίο τμήμα της ε_1 με οποιοδήποτε μοναδιαίο τμήμα της ε_2 δημιουργούν ένα παραλληλόγραμμο εμβαδού 1. Επομένως, συνολικά τα παραλληλόγραμμα εμβαδού 1 είναι: $1006 \cdot 1006 = 1006^2$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} \leq \mathrm{A\Gamma}$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(\mathrm{O}, R)$. Η κάθετη από την κορυφή Α προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ την τέμνει στο σημείο Δ.

(α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

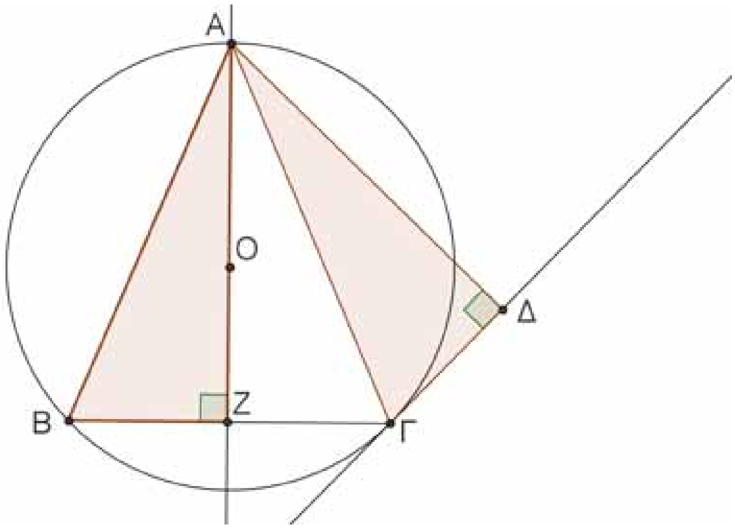
(β) Αν ισχύει ότι $\Gamma\Delta = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση
(α) Αν Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε η ΑΖ είναι ύψος και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΖ και ΑΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν:

- ΑΓ κοινή πλευρά (υποτείνουσα)

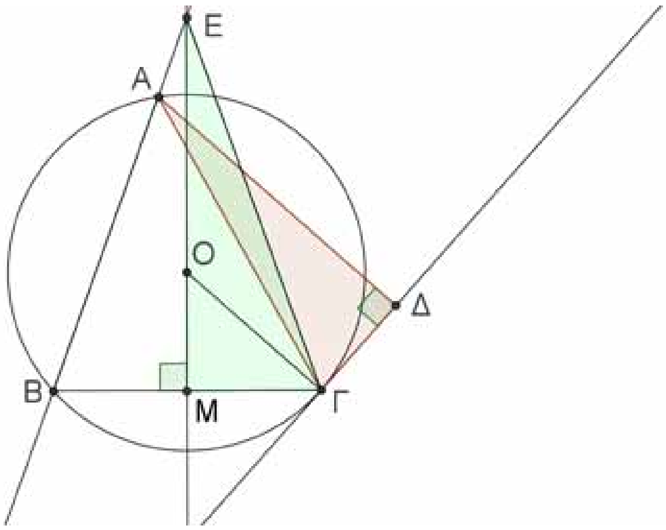
- $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}Z$, αφού $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{B}\Gamma$ (γωνία χορδής – εφαπτομένης και αντίστοιχη εγγεγραμμένη) και $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}Z$, αφού $AB = A\Gamma$.

Επομένως θα είναι και $\Gamma\Delta = \Gamma Z = \dfrac{B\Gamma}{2}$.



Σχήμα 2

(β) Ας υποθέσουμε ότι $AB < A\Gamma$. Θεωρούμε τη μεσοκάθετο στο μέσο M της $B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της AB στο E. Τότε $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma\Delta}$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης), και επιπλέον από την εκφώνηση έχουμε ότι $2\Gamma\Delta = B\Gamma = 2BM$, οπότε $\Gamma\Delta = BM$. Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα EBM και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε θα είναι $A\Gamma = EB$. Όμως $EB = E\Gamma$, οπότε $A\Gamma = E\Gamma$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η γωνία $\widehat{EA\Gamma} = 180° - \hat{A}$ είναι αμβλεία, οπότε το τρίγωνο $EA\Gamma$ θα είχε δύο αμβλείες γωνίες. Επομένως, θα είναι $AB = A\Gamma$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισοσκελές.



Σχήμα 3

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Οι θετικοί ακέραιοι p,q και r είναι πρώτοι και έχουν γινόμενο ίσο με n. Αν αυξήσουμε καθέναν από τους $p,\ q$ κατά 1, τότε το γινόμενο $(p+1)(q+1)r$ είναι ίσο με $n+138$. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του n.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{c} pqr=n \\ (p+1)(q+1)r=n+138 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} pqr=n \\ pqr+(p+q)r+r=n+138 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} pqr=n \\ (p+q+1)r=138 \end{array}\right\}.$$

Από την εξίσωση

$$(p+q+1)r=138=2\cdot 3\cdot 23 \qquad (1)$$

θα προσδιορίσουμε τις δυνατές τιμές των p,q,r και στη συνέχεια από την εξίσωση $pqr=n$ θα βρούμε τις δυνατές τιμές του n.

Επειδή οι θετικοί ακέραιοι p,q,r είναι πρώτοι, οι δυνατές τιμές του r είναι 2 ή 3 ή 23, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $r=2$, τότε $p+q+1=69 \Leftrightarrow p+q=68$, από την οποία, αφού p,q πρώτοι, προκύπτουν τα ζεύγη:

  $$(p,q)=(7,61),\ (p,q)=(61,7),\ (p,q)=(31,37),(p,q)=(37,31).$$

  Επομένως για το αρχικό γινόμενο προκύπτουν οι τιμές:

  $$n=7\cdot 61\cdot 2=\mathbf{854} \quad \text{ή} \quad n=31\cdot 37\cdot 2=\mathbf{2294}.$$

- Αν $r=3$, τότε προκύπτει η εξίσωση $p+q+1=46 \Leftrightarrow p+q=45$, από την οποία, αφού p,q πρώτοι, προκύπτουν τα ζεύγη:

  $(p,q)=(2,43),\ (p,q)=(43,2)$ και η τιμή $n=2\cdot 43\cdot 3=\mathbf{258}$.

- Αν $r=23$, τότε $p+q+1=6 \Leftrightarrow p+q=5 \Leftrightarrow (p,q)=(2,3)$ ή $(p,q)=(3,2)$, οπότε θα είναι $n=2\cdot 3\cdot 23=\mathbf{138}$.

Επομένως οι δυνατές τιμές του n είναι οι: **138, 258, 854** και **2294**.

Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί x,y,z, με $x\neq z$, είναι διαφορετικοί από το 0 και ικανοποιούν τις ισότητες

$$\left(x+y\right)^2+\left(2-xy\right)=9,$$
$$\left(y+z\right)^2-\left(3+yz\right)=4.$$

Να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^3}{x^2y}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^2z}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^3}{z^2x}\right).$$

Λύση

Οι δεδομένες σχέσεις γίνονται:

$$x^2+y^2+xy=7, \quad (1)$$
$$y^2+z^2+yz=7, \quad (2)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει:

$$x^2-z^2+xy-yz=0 \Leftrightarrow \left(x-z\right)\left(x+z\right)+y\left(x-z\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-z\right)\left(x+z+y\right)=0.$$

Από την τελευταία ισότητα, επειδή είναι από την υπόθεση $x-z\neq 0$, έπεται ότι:

$$x+y+z=0. \quad (3)$$

Θεωρούμε τώρα καθέναν χωριστά τους παράγοντες της παράστασης A. Έχουμε

$$\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^3}{x^2y}=\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2y},\ \frac{y}{z}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^2z}=\frac{x^3+y^3+z^3}{y^2z},$$

$$\frac{z}{x}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^3}{z^2x}=\frac{x^3+y^3+z^3}{z^2x},\ \text{οπότε η παράσταση γίνεται:}$$

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^3}{\left(xyz\right)^3}. \quad (4)$$

Από τη σχέση (3) λαμβάνουμε: $z=-x-y$, οπότε

$$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3+\left(-x-y\right)^3=x^3+y^3-\left(x+y\right)^3$$
$$=-3xy\left(x+y\right)=-3xy\left(-z\right)=3xyz. \quad (5)$$

Η σχέση (5) προκύπτει άμεσα και από την ταυτότητα του Euler.

Επομένως, από τη σχέση (4) λαμβάνουμε

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^3}{\left(xyz\right)^3}=\frac{\left(3xyz\right)^3}{\left(xyz\right)^3}=27.$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ // ΒΓ) με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$ και ΑΔ < ΒΓ. Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών ΑΒ και ΓΔ, Ζ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ και Μ το μέσον της ΕΖ. Αν δίνεται ότι η ευθεία ΓΜ είναι κάθετη στην ευθεία ΔΖ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΓ είναι κάθετη στην ευθεία ΕΓ.

Λύση

Έστω ότι η ΔΖ τέμνει τις ΓΜ, ΒΓ στα Κ, Ν αντίστοιχα. Τότε στο τρίγωνο ΑΔΖ, έχουμε ότι Β μέσον του ΑΖ και ΒΝ // ΑΔ, οπότε έχουμε ότι Ν μέσον του ΖΔ.

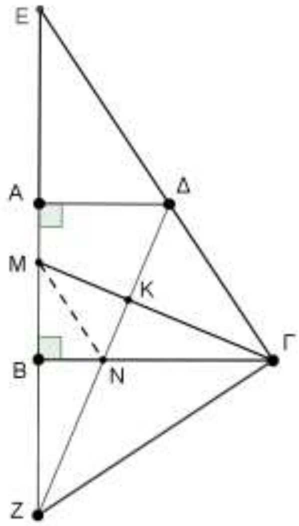
Επομένως στο τρίγωνο ΖΕΔ η ΜΝ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών, οπότε:

$$\mathrm{MN} \,//\, \mathrm{E\Delta} \quad (1)$$

Επιπλέον στο τρίγωνο ΜΓΖ, τα ΓΒ, ΖΚ είναι ύψη, άρα το σημείο Ν είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε:

$$MN \perp Z\Gamma \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $Z\Gamma \perp E\Gamma$, που είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 4.

Να υπολογίσετε το πλήθος των διατεταγμένων εξάδων $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)$ που μπορούν να δημιουργηθούν, αν οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ μπορούν να πάρουν τις τιμές $0,1$ και 2 και το άθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ είναι άρτιος.

Λύση

Το άθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ είναι άρτιος, αν και μόνο αν το πλήθος των 1 είναι άρτιο, δηλαδή 0,2, 4,6.

Αν δεν έχουμε καθόλου 1, οι δυνατές επιλογές είναι 2^6, αφού για καθέναν από τους a_i έχουμε δύο επιλογές (0 ή 2)

Αν έχουμε δύο 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{2}$ τρόπους και στις υπόλοιπες 4 θέσεις έχουμε 2^4 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^4\cdot\binom{6}{2}$ δυνατές εξάδες.

Αν έχουμε τέσσερα 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{4}$ τρόπους και στις υπόλοιπες 2 θέσεις έχουμε 2^2 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^2\cdot\binom{6}{4}$ δυνατές εξάδες. Αν έχουμε έξι 1, τότε είναι φανερό ότι έχουμε έναν τρόπο.

Επομένως, συνολικά έχουμε: $2^6+2^4\cdot\binom{6}{2}+2^2\cdot\binom{6}{4}+1=64+16\cdot15+4\cdot15+1=365$ εξάδες.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

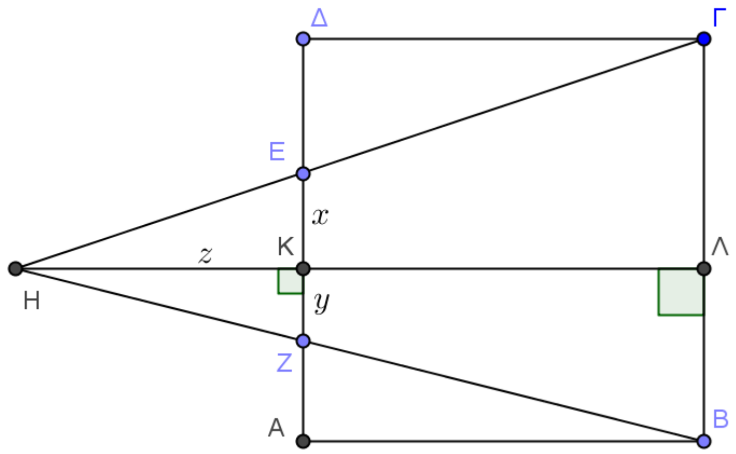
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
34^{η} Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
4 Μαρτίου 2017

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Πάνω στην πλευρά ΑΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\text{ΔΕ} = \frac{\alpha}{3}$ και $\text{ΑΖ} = \frac{\alpha}{4}$. Αν οι ευθείες ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Η, να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ ως συνάρτηση του α.

Λύση ($1^{ος}$ τρόπος)



Σχήμα 1

Φέρνουμε το ύψος ΗΛ του τριγώνου ΒΓΗ το οποίο τέμνει κάθετα την ΑΔ στο σημείο Κ. Θέτουμε ΕΚ = x, ΚΖ = y και ΚΗ = z. Είναι ΗΛ = $\alpha + z$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ είναι ίσο με

$$\text{Ε} = \frac{1}{2} \cdot \text{ΒΓ} \cdot \text{ΗΛ} = \frac{1}{2}\alpha(\alpha + z) \quad . \qquad (1)$$

Αρκεί να εκφράσουμε το z ως συνάρτηση του α.

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΕΗΚ είναι όμοια, αφού $\text{Γ}\hat{\text{Δ}}\text{Ε} = \text{Ε}\hat{\text{Κ}}\text{Η} = 90^{o}$ και $\text{Δ}\hat{\text{Ε}}\text{Γ} = \text{Κ}\hat{\text{Ε}}\text{Η}$ ως κατά κορυφή. Επομένως, έχουμε

$$\frac{\text{ΚΗ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΚΕ}}{\text{ΔΕ}} \Leftrightarrow \frac{z}{\alpha} = \frac{x}{\frac{\alpha}{3}} \Leftrightarrow z = 3x \qquad (2)$$

Ομοίως, τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΖΚΗ είναι όμοια, οπότε παίρνουμε ότι

$$\frac{\mathrm{KH}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{AZ}} \Leftrightarrow \frac{z}{\alpha}=\frac{y}{\frac{\alpha}{4}} \Leftrightarrow z=4y \quad . \qquad (3)$$

Ακόμα, έχουμε ότι

$$x+y=\mathrm{A\Delta}-\mathrm{AZ}-\Delta\mathrm{E}=\alpha-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{3}=\frac{5\alpha}{12} \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (4) παίρνουμε

$$x+y=\frac{5\alpha}{12} \Leftrightarrow \frac{z}{3}+\frac{z}{4}=\frac{5\alpha}{12} \Leftrightarrow z=\frac{5\alpha}{7} \;,$$

οπότε η (1) γίνεται

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\alpha\left(\alpha+\frac{5\alpha}{7}\right)=\frac{12\alpha^2}{14}=\frac{6\alpha^2}{7}.$$

2^{ος} τρόπος. Από τα δεδομένα παίρνουμε ότι $\mathrm{ZE}=\alpha-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{3}=\frac{5\alpha}{12}$. Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου $\mathrm{Z E \Gamma B}$ είναι:

$$(\mathrm{ZE\Gamma B})=\frac{\frac{5\alpha}{12}+\alpha}{2}\cdot a=\frac{17a^2}{24}.$$

Επιπλέον τα τρίγωνα ZHE και $\mathrm{BH\Gamma}$ είναι όμοια, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητας αυτών, δηλαδή

$$\frac{(\mathrm{BH\Gamma})}{(\mathrm{ZHE})}=\left(\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{ZE}}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{5\alpha/12}\right)^2=\left(\frac{12}{5}\right)^2.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{(\mathrm{BH\Gamma})}{(\mathrm{BH\Gamma})-(\mathrm{BZE\Gamma})}=\left(\frac{12}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(\mathrm{BH\Gamma})}{(\mathrm{BH\Gamma})-\frac{17\alpha^2}{24}}=\left(\frac{12}{5}\right)^2$$

και λύνοντας ως προς $(\mathrm{BH\Gamma})$ παίρνουμε ότι $(\mathrm{BH\Gamma})=\frac{6\alpha^2}{7}$.

Πρόβλημα 2

Αν x, y, z θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να λύσετε το σύστημα:

$$\{x(6-y)=9,\; y(6-z)=9,\; z(6-x)=9\}..$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Επειδή είναι $x, y, z>0$, από τις δεδομένες εξισώσεις προκύπτει ότι

$$0<x<6,\; 0<y<6,\; 0<z<6.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε:

$$xyz(6-x)(6-y)(6-z)=9^3 \Leftrightarrow x(6-x)y(6-y)z(6-z)=9^3. \quad (1)$$

Όμως ισχύει ότι

$$0<x(6-x)=6x-x^2=9-(3-x)^2\le 9. \qquad (2)$$

Η ισότητα ισχύει για $x=3$. Ομοίως ισχύουν και οι σχέσεις

$$0\le y(6-y)\le 9 \qquad (3)$$

$$0 \le z(6-z) \le 9 \qquad (4)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (2), (3) και (4), λαμβάνουμε

$$0 < x(6-x)y(6-y)z(6-z) \le 9^3, \qquad (5)$$

οπότε σε σύγκριση με την (1) προκύπτει ότι οι σχέσεις (2), (3) και (4) πρέπει να ισχύουν ως ισότητες, δηλαδή $x = y = z = 3$.

Εναλλακτικά οι σχέσεις (2) , (3) και (4) μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου. Για παράδειγμα, αφού $x, 6-x > 0$, έχουμε

$$0 < \sqrt{x(6-x)} \le \frac{x+6-x}{2} = 3 \Rightarrow 0 < x(6-x) \le 9.$$

2$^{\text{ος}}$ τρόπος: Επειδή είναι $x, y, z > 0$, από τις δεδομένες εξισώσεις προκύπτει ότι

$$0 < x < 6,\ 0 < y < 6,\ 0 < z < 6.$$

Από τους τρεις αριθμούς κάποιος είναι ο μικρότερος, έστω $x \le y$ και $x \le z$. Τότε έχουμε

$$9 = x(6-y) \le x(6-x) \le z(6-x) = 9,$$

οπότε έπεται ότι

$$x(6-x) = 9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη και στην τελευταία σχέση βρίσκουμε ότι $y = 3$ και $z = 3$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους $a, b, p,$ όπου p πρώτος, που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$p\left(a^2 + b^2\right) = a^2 b^2 \qquad (1)$$

Επειδή p πρώτος, από την (1) προκύπτει ότι: $p \mid a$ ή $p \mid b$.

Υποθέτουμε ότι $p \mid a$, οπότε $a = pa_1, a_1 \in \mathbb{N}^*$.

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{b^2} \Rightarrow b^2 > p \Rightarrow b^2 \ge p+1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{b^2} \ge \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2 a_1^2} \ge \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p^2 + p} \ge \frac{1}{2p^2} \Rightarrow \frac{1}{a_1^2} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow a_1^2 \le 2 \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a = p.$$

Τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$p\left(p^2 + b^2\right) = p^2 b^2 \Leftrightarrow p^2 + b^2 = pb^2 \Leftrightarrow p^2 = (p-1)b^2 \Leftrightarrow p^2 - 1 = (p-1)b^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (p-1)(p+1) = (p-1)b^2 - 1 \Rightarrow (p-1) \mid 1 \overset{p-1>0}{\Longleftrightarrow} p - 1 = 1 \Leftrightarrow p = 2.$$

Επομένως, έχουμε $a = p = 2$ και από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι $b = 2$.

Ομοίως εργαζόμαστε, αν υποθέσουμε ότι $p \mid b.$

2$^{\text{ος}}$ τρόπος. Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$p\left(a^2+b^2\right)=a^2b^2 \qquad (1)$$

Λύνοντας ως προς a^2 έχουμε ότι

$$a^2=\frac{pb^2}{b^2-p}=\frac{p(b^2-p)+p^2}{b^2-p}=p+\frac{p^2}{b^2-p}. \qquad (2)$$

Αφού ο a^2 είναι ακέραιος, θα πρέπει $b^2-p \mid p^2$, επομένως

$$b^2-p=1, \quad ή \quad b^2-p=p, \quad ή \quad b^2-p=p^2.$$

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι, $b^2-p=1 \Leftrightarrow p=b^2-1=(b-1)(b+1)$ και αφού p πρώτος, θα πρέπει $b-1=1$, άρα $b=2$ και $p=3$. Τότε είναι $a^2=12$, άτοπο.

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $b^2=2p$. Τότε b άρτιος, έστω $b=2b_1$, οπότε $4b_1^2=2p$, άρα $2\mid p$, άρα και πάλι $p=2$ και $b=2$, οπότε και $a=2$. Στην τρίτη περίπτωση η (2) δίνει $a^2=p+1 \Leftrightarrow p=a^2-1=(a-1)(a+1)$, οπότε αφού p πρώτος, θα πρέπει $a-1=1$, άρα $a=2$ και $p=3$, οπότε προκύπτει $b^2=3$, άτοπο.

Πρόβλημα 4.

Μία παρέα που αποτελείται από n άτομα παίζει ένα επιτραπέζιο παιχνίδι με τους εξής κανόνες.

(α) Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα

(β) Το παιχνίδι ολοκληρώνεται μετά από n γύρους

(γ) Κάθε δυάδα παικτών έχει παίξει μαζί σε τουλάχιστον ένα γύρο.

Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του n.

Λύση

Αφού σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα, το πλήθος των δυάδων σε κάθε γύρο είναι $\binom{3}{2}=3$. Επομένως όταν το παιχνίδι ολοκληρωθεί μετά από n γύρους, θα έχουν παίξει μαζί $3n$ δυάδες ατόμων. Για να ικανοποιείται η τελευταία συνθήκη και να παίξουν όλες οι δυάδες παικτών, πρέπει το $3n$ να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το συνολικό πλήθος των δυάδων, που είναι $\binom{n}{2}$. Δηλαδή, πρέπει:

$$\binom{n}{2}\le 3n \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}\le 3n \Leftrightarrow \frac{n-1}{2}\le 3 \Leftrightarrow n\le 7.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η τιμή $n=7$ είναι η μεγαλύτερη δυνατή, αφού ικανοποιεί τους κανόνες του προβλήματος. Πράγματι, για $n=7$ είναι

$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=\frac{6\cdot 7}{2}=21=3\cdot 7$$

και αν υποθέσουμε ότι τα επτά μέλη της παρέας είναι οι : Α,Β,.Γ,Δ,Ε,Ζ,Η, τότε είναι δυνατόν να ορίσουμε επτά τριάδες που θα παίξουν στους επτά γύρους που πρέπει να γίνουν, έτσι ώστε όλα τα μέλη της παρέας ανά δύο να έχουν παίξει ένα παιγνίδι σε ένα τουλάχιστον γύρο. Μία τέτοια περίπτωση δίνουν οι τριάδες:

(Α, Β, Γ), (Α, Δ, Ε), (Α, Ζ, Η), (Β, Δ, Η), (Β, Ε, Ζ), (Γ, Δ, Ζ), (Γ, Ε, Η).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μικρών τάξεων

Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1

(α) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός x, τέτοιος ώστε οι αριθμοί $x+\sqrt{3}$ και $x^2+\sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.

(β) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε οι αριθμοί $y+\sqrt{3}$ και $y^3+\sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.

Λύση

(α) Έστω $x+\sqrt{3}=q,\ x^2+\sqrt{3}=p$ με $p,q\in\mathbb{Q}$. Τότε

$$x=q-\sqrt{3}\Rightarrow x^2=q^2-2q\sqrt{3}+3$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$\left(q^2-2q\sqrt{3}+3\right)+\sqrt{3}=p\Leftrightarrow-\sqrt{3}\left(2q-1\right)=p-q^2-3$$

Τότε πρέπει $2q-1=0\Leftrightarrow q=\frac{1}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση $p=q^2+3\Rightarrow q=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}$ και $x=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$.

(β) Έστω $y+\sqrt{3}=q,\ y^3+\sqrt{3}=p$ με $p,q\in\mathbb{Q}$. Τότε

$$y=q-\sqrt{3}\Rightarrow y^3=q^3-3q^2\sqrt{3}+9q-3\sqrt{3}$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$\left(q^3-3q^2\sqrt{3}+9q-3\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=p\Leftrightarrow-\sqrt{3}\left(3q^2+2\right)=p-q^3-9q\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}=\frac{q^3+9q-p}{3q^2+2}\in\mathbb{Q}$$

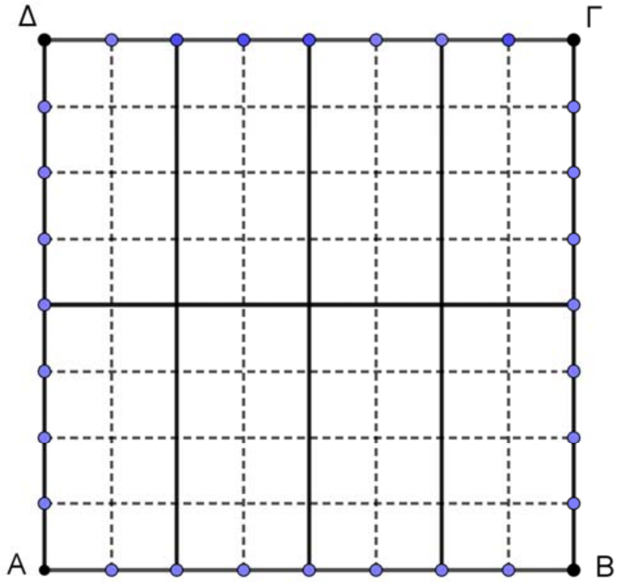
που είναι άτοπο.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 8 cm το οποίο υποδιαιρούμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε 64 μικρά τετράγωνα πλευράς 1cm. Χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, ενώ όλα τα υπόλοιπα 57 μικρά τετράγωνα είναι λευκά. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε ανεξάρτητα από τη θέση των 7 μαύρων μικρών τετραγώνων, υπάρχει ορθογώνιο εμβαδού k cm^2 με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του ΑΒΓΔ και με όλα τα μικρά τετράγωνα από τα οποία αποτελείται να είναι λευκά, που μπορεί να αποκοπεί από το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του k.

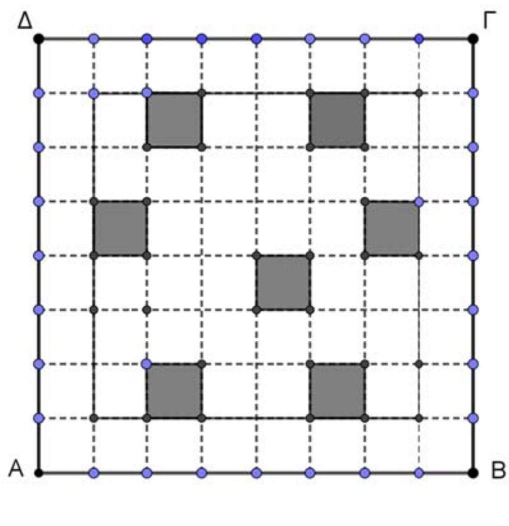
Λύση

Μπορούμε να χωρίσουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ σε 8 ορθογώνια 4×2. Έτσι μπορούμε να χρωματίσουμε στα επτά 4×2 ορθογώνια από ένα μαύρο μικρό τετράγωνο, οπότε από την αρχή του Περιστερώνα θα μείνει με λευκά μικρά τετράγωνα τουλάχιστον ένα 4×2 ορθογώνιο εμβαδού $8\,\text{cm}^2$.



Σχήμα 1

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι υπάρχει χρωματισμός των 7 μικρών τετραγώνων έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των $8\,\text{cm}^2$. Στο τετράγωνο του παρακάτω σχήματος 2 αφήνουμε όλα τα συνοριακά μικρά τετράγωνα λευκά και στο 6×6 εσωτερικό τετράγωνο χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των $8\,\text{cm}^2$.



Σχήμα 2

Σημείωση: Για το πρώτο κομμάτι της άσκησης μπορούμε να θεωρήσουμε τις 8 γραμμές ή τις 8 στήλες του πίνακα και να κάνουμε το επιχείρημα όπως στην παραπάνω λύση με την αρχή του Περιστερώνα.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τους θετικούς ακεραίους a, b τέτοιους ώστε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2+4a}{ab}$$

να είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι αν ο b είναι περιττός, τότε ο a είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση

Έστω $\frac{(a+b)^2+4a}{ab} = \kappa \in \mathbb{Z}$. Η τελευταία γράφεται ως

$$(a+b)^2+4a = \kappa ab \quad (1)$$

Θα δείξουμε ότι ο a είναι περιττός. (2) Πράγματι, αν $2 \mid a$, τότε θα πρέπει $2 \mid (a+b)^2$, τότε θα πρέπει και ο b να είναι άρτιος, άτοπο. Θεωρούμε τώρα την (1) σαν δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς b, στη μορφή:

$$b^2 + b(2-\kappa)a + a^2 + 4a = 0$$

Για να έχει αυτή ακέραιες λύσεις, η διακρίνουσά της θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Έχουμε ότι $\Delta = a^2(\kappa-2)^2 - 4(a^2+4a) = a(a(\kappa-2)^2 - 4a - 16)$. Επομένως το γινόμενο των a, $a(\kappa-2)^2 - 4a - 16$ είναι τέλειο τετράγωνο. Επειδή όμως ο a είναι περιττός είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε ο καθένας τους θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο, άρα ο a είναι τέλειο τετράγωνο.

$2^{ος}$ τρόπος:

Έστω $d = (a,b)$ και γράφουμε $a = dx, b = dy$, με $(x,y)=1$. Παρατηρούμε ότι επειδή $d \mid b$ και ο b είναι περιττός, θα πρέπει d περιττός. Τότε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2+4a}{ab} = \frac{d^2(x+y)^2+4dx}{d^2xy} = \frac{d(x+y)^2+4x}{dxy}$$

είναι ακέραιος. Άρα $x \mid d(x+y)^2 + 4x \Rightarrow x \mid dy^2$ και επειδή $(x,y)=1$, πρέπει $x \mid d$. Επίσης, $d \mid d(x+y)^2 + 4x \Rightarrow d \mid 4x$ και αφού d περιττός, $d \mid x$. Από τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε $d = x$, άρα $a = d^2$.

Πρόβλημα 4

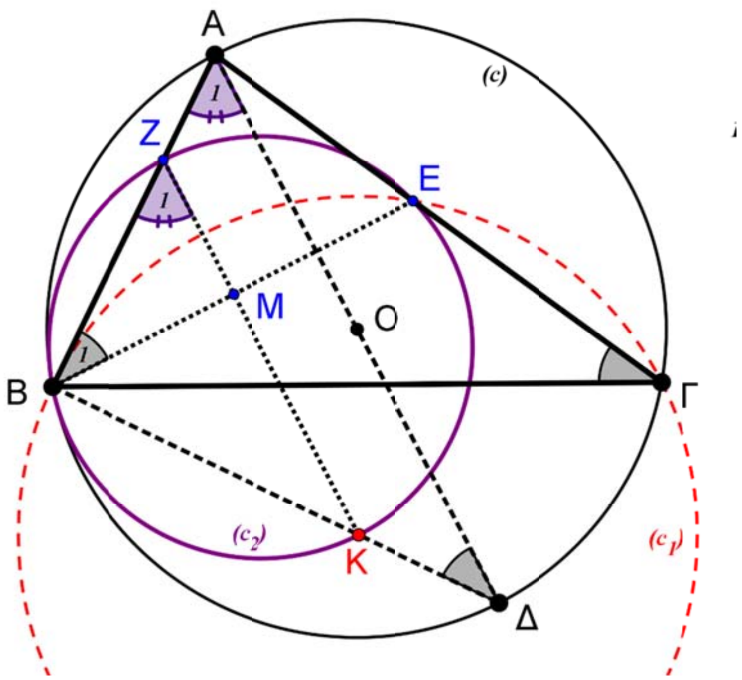
Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο c με κέντρο O και ακτίνα R. Ονομάζουμε Δ το αντιδιαμετρικό της κορυφής A. Δίνεται επίσης ο κύκλος c_1 του οποίου το κέντρο K βρίσκεται επάνω στο τμήμα $\mathrm{B\Delta}$ και περνάει από τα σημεία B και Γ. Αν ο κύκλος c_1 τέμνει την $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο E, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BKE, έστω c_2, εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου c.

Λύση (1^{ος} Τρόπος)

Έστω Z η τομή του κύκλου c_2 με την AB και M η τομή της KZ με την BE. Η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta$ (άρα και η γωνία $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$) είναι ορθή διότι βαίνει στη διάμετρο $\mathrm{A}\Delta$ του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$.

Εφόσον $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = 90°$, η ZK είναι διάμετρος του κύκλου c_2 και κατά συνέπεια η ZK θα είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής BE των κύκλων c_1 και c_2. Η AB εφάπτεται στον κύκλο c_1, άρα $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο BMZ έχουμε:

$$\widehat{Z_1} = 90° - \widehat{\mathrm{B}_1} = 90° - \hat{\Gamma} \quad . \qquad (1)$$



Σχήμα 3

Οι γωνίες $\hat{\Delta}, \hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο c και βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB}\Delta$, έχουμε: $\hat{\mathrm{A}}_1 = 90° - \hat{\Delta} = 90° - \hat{\Gamma} \quad (2)$.

Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\widehat{\mathrm{A}_1} = \widehat{Z_1}$, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{A}\Delta$ και KZ είναι παράλληλα και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $ΑΔΚΖ$ είναι τραπέζιο. Εφόσον το $Ο$ είναι το μέσο της $ΑΔ$, συμπεραίνουμε ότι η $ΟΒ$ θα διέρχεται από το μέσο της $ΚΖ$ που είναι το κέντρο του κύκλου c_2. Άρα τα κέντρα των κύκλων c , c_2 και το σημείο $Β$ θα είναι συνευθειακά.

Εναλλακτικά, το τελικό συμπέρασμα (που διατυπώνεται στην τελευταία παράγραφο) θα μπορούσε να προκύψει και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας:

Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\hat{Α}_1 = \hat{Ζ}_1$, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΔ$ και $ΚΖ$ είναι παράλληλα και κατά συνέπεια ομοιόθετα στην ομοιοθεσία με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο $Β$.
Εφόσον τα τμήματα $ΑΔ$ και $ΚΖ$ (δηλαδή, οι διάμετροι των κύκλων c και c_2) είναι ομοιόθετα με κέντρο ομοιοθεσίας το $Β$ και οι κύκλοι c και c_2 θα είναι ομοιόθετοι με το ίδιο κέντρο ομοιοθεσίας. Δηλαδή τα κέντρα των κύκλων c , c_2 και το σημείο $Β$ θα είναι συνευθειακά.

2^{ος} τρόπος

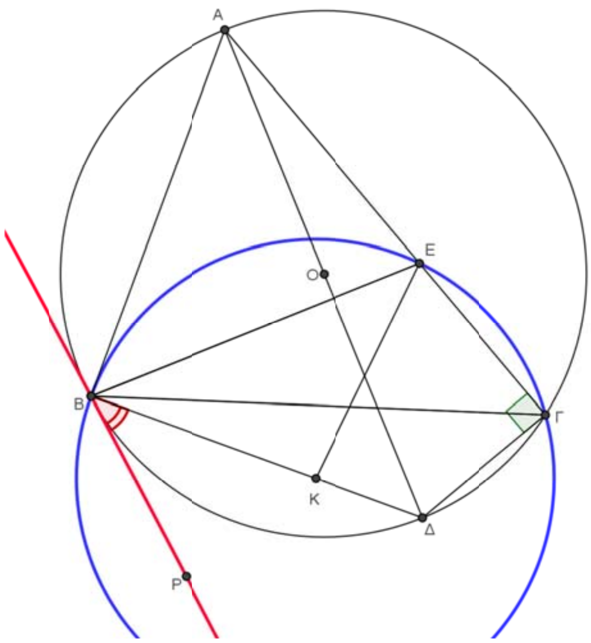
Θα αποδείξουμε ότι ο c_2 εφάπτεται του κύκλου $c(O,R)$ στο σημείο $Β$. Για το σκοπό αυτό θα δείξουμε ότι οι δύο αυτοί κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $Β$. Έστω $ΒΡ$ η εφαπτομένη του $c(O,R)$ στο σημείο $Β$ και ονομάζουμε $\widehat{ΚΒΡ} = \omega$. Για να δείξουμε ότι η $ΒΡ$ είναι εφαπτομένη του c_2 στο $Β$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\widehat{ΒΕΚ} = \omega \quad . \qquad (1)$$

Επειδή η $ΒΡ$ η εφαπτομένη του $c(O,R)$, έχουμε ότι $\widehat{ΔΓΒ} = \omega$. Επιπλέον η $ΑΔ$ είναι διάμετρος, οπότε $\widehat{ΑΓΔ} = 90°$, οπότε $\widehat{ΕΓΒ} = 90° - \omega$. Όμως

$$\widehat{ΒΚΕ} = 2\widehat{ΒΓΕ} = 2(90° - \omega) = 180° - 2\omega, \qquad (2)$$

από τη σχέση επίκεντρης εγγεγραμμένης στον c_1. Όμως το τρίγωνο $ΒΚΕ$ είναι ισοσκελές επομένως λόγω της (2) θα είναι $\widehat{ΚΒΕ} = \widehat{ΚΕΒ} = \omega$, οπότε η (1) ισχύει και έχουμε το ζητούμενο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

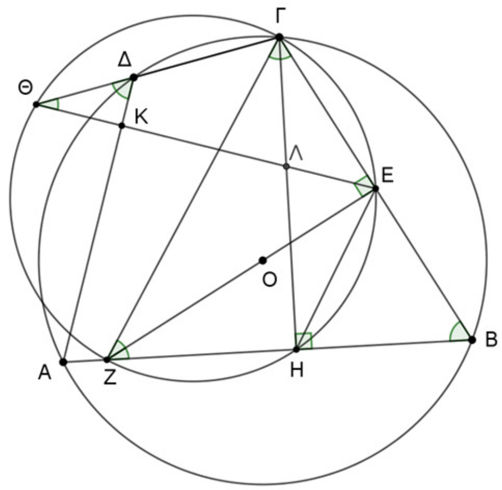
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
36η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα « Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
23 Φεβρουαρίου 2019
Θέματα και ενδεικτικές λύσεις μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Να βρείτε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:
$$\begin{Bmatrix} x^2+y^2+25z^2=6xz+8yz \\ 3x^2+2y^2+z^2=240 \end{Bmatrix}$$

Λύση
Η πρώτη εξίσωση γράφεται στη μορφή:
$$x^2-6xz+9z^2+y^2-8yz+16z^2=0 \Leftrightarrow (x-3z)^2+(y-4z)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x-3z=0 \text{ και } y-4z=0 \Leftrightarrow x=3z \text{ και } y=4z.$$
Επομένως, όλες οι τριάδες (x,y,z) πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την πρώτη εξίσωση είναι της μορφής:
$$(x,y,z)=(3t,\,4t,\,t),\ t\in\mathbb{R}.$$
Τότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται:
$$3\cdot 9t^2+2\cdot 16t^2+t^2=240 \Leftrightarrow 60t^2=240 \Leftrightarrow t^2=4 \Leftrightarrow t=\pm 2.$$
Για $t=2$ προκύπτει η λύση $(x,y,z)=(6,8,2)$, ενώ για $t=-2$ προκύπτει η λύση $(x,y,z)=(-6,-8,-2)$.

Πρόβλημα 2
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Η κάθετη στο μέσον Ε της πλευράς ΒΓ τέμνει την ευθεία ΑΒ σε σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΕΖ τέμνει την πλευρά ΑΒ για δεύτερη φορά στο σημείο Η και την ευθεία ΓΔ σε σημείο Θ διαφορετικό του Δ. Η ευθεία ΕΘ τέμνει την ευθεία ΑΔ στο σημείο Κ και την ευθεία ΓΗ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Η, Λ, Κ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή $\Gamma\hat{H}Z = \Gamma\hat{E}Z = 90^\circ$, έπεται ότι $A\hat{H}\Lambda = 90^\circ$ Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι $A\hat{K}\Lambda = 90^\circ$. Επειδή $\Delta\hat{K}\Theta = A\hat{K}\Lambda$ (ως κατά κορυφή γωνίες), αρκεί να αποδείξουμε ότι στο τρίγωνο ΔΘΚ οι δύο οξείες γωνίες του έχουν άθροισμα 90°, δηλαδή: $\Delta\hat{\Theta}K + \Theta\hat{\Delta}K = 90^\circ$.

Όμως έχουμε ότι:

$\Delta\hat{\Theta}K = \Gamma\hat{\Theta}E = \Gamma\hat{Z}E$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο)

$\Gamma\hat{Z}E = E\hat{Z}B$ (γιατί είναι συμμετρικές ως προς τη μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ)

Άρα έχουμε:

$$\Delta\hat{\Theta}K = E\hat{Z}B \qquad (1).$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$\Theta\hat{\Delta}K = Z\hat{B}E \qquad (2)$$

(εσωτερική και απέναντι εξωτερική γωνία του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ)

Επομένως με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\Delta\hat{\Theta}K + \Theta\hat{\Delta}K = E\hat{Z}B + Z\hat{B}E = 90^\circ,$$

γιατί το τρίγωνο ΖΒΕ είναι ορθογώνιο στο Ε.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους οι οποίοι είναι ίσοι με 13 φορές το άθροισμα των ψηφίων τους.

Λύση

Έστω κ το πλήθος των ψηφίων του ακέραιου Α ο οποίος ισούται με 13 φορές το άθροισμα των ψηφίων του. Ο μικρότερος δυνατός θετικός ακέραιος με κ ψηφία είναι ο $10^{\kappa-1}$, ενώ το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα ψηφίων του είναι 9κ. Επομένως, για να ισχύει το ζητούμενο του προβλήματος θα πρέπει:

$$10^{\kappa-1} \le 13 \cdot 9\kappa = 117\kappa \ . \qquad (1)$$

Για $\kappa \ge 4$ θα αποδείξουμε ότι: $10^{\kappa-1} > 117\kappa$, δηλαδή δεν ισχύει η σχέση (1).

Πράγματι, για $\kappa = 4$ έχουμε: $10^{4-1} = 10^3 > 117 \cdot 4 = 468$. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει: $10^{\kappa-1} > 117\kappa$, για το τυχόν $\kappa > 4$, τότε προκύπτει ότι:

$$10^{(\kappa+1)-1} = 10^{\kappa} = 10 \cdot 10^{\kappa-1} > 10 \cdot 117\kappa = 117 \cdot 10\kappa > 117 \cdot (\kappa+1).$$

Επομένως το πλήθος κ των ψηφίων του Α πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο του 3.

- Η περίπτωση με $\kappa = 1$ αποκλείεται, αφού $\mathrm{A} = \alpha < 13\alpha$, με $0 < \alpha \le 9$.
- Η περίπτωση με $\kappa = 2$ αποκλείεται, αφού $\mathrm{A} = 10\alpha + \beta < 13(\alpha + \beta)$.
- Έστω $\kappa = 3$ και $\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, με $0 < \alpha \le 9,\ 0 \le \beta, \gamma \le 9$. Τότε πρέπει:

$$100\alpha + 10\beta + \gamma = 13 \cdot (\alpha + \beta + \gamma), \text{ με } 0 < \alpha \le 9,\ 0 \le \beta, \gamma \le 9$$

$$\Leftrightarrow 87\alpha = 3\beta + 12\gamma, \text{ με } 0 < \alpha \le 9,\ 0 \le \beta, \gamma \le 9$$

$$\Leftrightarrow 29\alpha = \beta + 4\gamma,\ 0 < \alpha \le 9,\ 0 \le \beta, \gamma \le 9$$

Επειδή ισχύει: $0 \le \beta + 4\gamma \le 45 \Rightarrow 29\alpha \le 45 \Rightarrow \alpha \le 1 \Rightarrow \alpha = 1$ (αφού $\alpha \ne 0$), οπότε έχουμε:

$$\beta + 4\gamma = 29 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma \ge 0 \Rightarrow 0 \le \beta = 29 - 4\gamma \le 9$$

$$\Rightarrow -29 \le -4\gamma \le -20 \Rightarrow 5 \le \gamma \le \frac{29}{4} \Rightarrow \gamma \in \{5, 6, 7\}$$

- Για $\gamma = 5 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 9$ και $\mathrm{A} = 195$.
- Για $\gamma = 6 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 5$ και $\mathrm{A} = 156$.
- Για $\gamma = 7 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 1$ και $\mathrm{A} = 117$.

Πρόβλημα 4

Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι θετικοί ακέραιοι: 1, 2, 3,…,2018. Ο Γιάννης και η Μαρία έχουν τη δυνατότητα να κάνουν μαζί την παρακάτω κίνηση:

Επιλέγουν δύο αριθμούς α, β *από αυτούς που είναι γραμμένοι στον πίνακα και τους αντικαθιστούν με τους αριθμούς* $5\alpha - 2\beta$ και $3\alpha - 4\beta$.

Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι μετά από πεπερασμένο πλήθος τέτοιων κινήσεων μπορούν να τριπλασιαστούν όλοι οι αριθμοί του πίνακα, δηλαδή να προκύψουν οι αριθμοί: 3, 6, 9,…, 6054. Η Μαρία σκέπτεται για λίγο και του απαντά ότι αυτό δεν είναι δυνατό να γίνει. Ποιος από τους δύο έχει δίκιο και γιατί;

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε κάθε κίνηση το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στον πίνακα μεταβάλλεται όσο η διαφορά:

$$(5\alpha - 2\beta) + (3\alpha - 4\beta) - (\alpha + \beta) = 7\alpha - 7\beta = 7(\alpha - \beta) = \pi o\lambda.7$$

Αυτό σημαίνει ότι μετά από κάθε εφαρμογή της παραπάνω κίνησης η διαφορά του αθροίσματος $\Sigma_{\nu\acute{\varepsilon}o}$ των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα μείον το άθροισμα $\Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}}$ των αριθμών που ήταν αρχικά γραμμένοι στον πίνακα είναι αριθμός πολλαπλάσιος του 7, δηλαδή

$$\Sigma_{\nu\acute{\varepsilon}o} - \Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}} = \pi o\lambda.7 \ .$$

Επομένως τα αθροίσματα $\Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}}$ και $\Sigma_{\nu\acute{\varepsilon}o}$ διαιρούμενα με το 7 πρέπει να δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

Όμως $\Sigma_{αρχικό} = 1 + 2 + 3 + ... + 2018 = \dfrac{2018 \cdot 2019}{2} = 1009 \cdot 2019 \equiv 1 \cdot 3 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$.

Επιπλέον, αν μετά από πεπερασμένο πλήθος κινήσεων φθάσουμε στους αριθμούς 3,6,9,…,6054, τότε το άθροισμα τους θα είναι

$$\Sigma_{τελικό} = 3 + 6 + 9 = ... + 6054 = 3 \cdot \Sigma_{αρχικό} \equiv 3 \cdot 3 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$$

Επειδή τα υπόλοιπα των αθροισμάτων $\Sigma_{αρχικό}$ και $\Sigma_{τελικό}$ όταν διαιρούνται με το 7 είναι διαφορετικά συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούν να προκύψουν στον πίνακα οι αριθμοί 3,6,9,…,6054 και επομένως έχει δίκιο η Μαρία.