ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
32η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Οι λύσεις που δίνονται παρακάτω δεν είναι μοναδικές. Στα περισσότερα προβλήματα έχουν δοθεί και άλλες λύσεις από τους μαθητές που είναι τεκμηριωμένες και ως εκ τούτου αποδεκτές.

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες θετικών ακέραιων (x, y, p), όπου p πρώτος, οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{xy^3}{x+y} = p.$$

Λύση

Έστω $d = (x, y)$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών x, y. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι a, b τέτοιοι ώστε

$$x = da,\ y = db,\ (a,b) = 1.$$

Με αντικατάσταση στη δεδομένη εξίσωση παίρνουμε:

$$\frac{d^3ab^3}{a+b} = p. \qquad (1)$$

Όμως, από τη σχέση $(a,b)=1$, έχουμε ότι $(a, a+b)=1$ και $(b^3, a+b)=1$, οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $a+b \mid d^3$. Γράφουμε

$$\frac{d^3}{a+b} = k, \qquad (2)$$

όπου k θετικός ακέραιος. Τότε η (1) γίνεται: $kab^3 = p$, οπότε $b^3 \mid p$. Επομένως πρέπει $b=1$ και $ka = p$. Επομένως , έχουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $k = p, a = 1$, τότε η (2) γίνεται $\frac{d^3}{2} = p$, οπότε $2p = d^3$, οπότε $2 \mid d$ άρα $8 \mid d^3$ και έπεται ότι $8 \mid 2p$, άτοπο.

(ii) $k = 1, a = p$. Τότε η (2) γίνεται $d^3 = p+1 \Rightarrow d^3 - 1 = p \Rightarrow (d-1)(d^2+d+1) = p$.

Επομένως, έχουμε ότι $d-1=1, d^2+d+1 = p$ (αφού $d^2+d+1 > d-1$), $\Leftrightarrow d = 2, p = 7$, από όπου έχουμε: $(x, y, p) = (14, 2, 7)$.

Πρόβλημα 2

Έστω $P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (c+b)x + c$ και $Q(x) = x^4 + (b-1)x^3 + (a-b)x^2 - (c+a)x + c$ πολυώνυμα μεταβλητής x, όπου a,b,c είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και

$b>0$. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες x_0, x_1, x_2, οι οποίες είναι ρίζες και του πολυωνύμου $Q(x)$, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $abc > 28$.

(β) Αν a,b,c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι με $b>0$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές τους;

Λύση

(α) Επειδή το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου $P(x)$ ισούται με 0 έπεται ότι μία ρίζα του είναι το 1, οπότε έχουμε

$$P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (c+b)x + c = (x-1)(ax^2+bx-c)$$

Αν θέσουμε $x_0 = 1$, από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ και } x_1x_2 = -\frac{c}{a} \neq 0, \qquad (1)$$

οπότε θα είναι $x_1, x_2 \neq 0$.

Επιπλέον, από την υπόθεση έπεται ότι οι x_0, x_1, x_2 θα είναι ρίζες και του πολυωνύμου

$$\begin{aligned} F(x) = Q(x) - P(x) &= x^4 + (b-a-1)x^3 + 2(a-b)x^2 + (b-a)x \\ &= x\left(x^3 + (b-a-1)x^2 + 2(a-b)x + b - a\right) \\ &= x\left[x^3 - x^2 + (b-a)(x^2-x) + (a-b)(x-1)\right] \\ &= x(x-1)\left[x^2 + (b-a)x + (a-b)\right]. \end{aligned}$$

Επειδή $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x^2 + (b-a)x + (a-b) = 0$ και $x_0, x_1, x_2 \neq 0$, έπεται ότι:

$$x_0 = 1,\ x_1 + x_2 = a - b,\ \ x_1x_2 = a - b\ . \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$a - b = -\frac{b}{a} = -\frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$b = c \qquad (3) \qquad \text{και} \qquad a^2 - ab = -b \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) έχουμε:

$$a^2 = b(a-1) \Rightarrow a > 1 \text{ (αφού } b>0\text{) και } b = c = \frac{a^2}{a-1}.$$

Έχουμε ότι

$$abc = a\left(\frac{a^2}{a-1}\right)^2 = \frac{a^5}{(a-1)^2} \overset{x=a-1>0}{=} \frac{(x+1)^5}{x^2} = \frac{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1}{x^2}$$

$$\Rightarrow abc = x^3 + \left(5x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(10x + \frac{5}{x}\right) + 10. \qquad (5)$$

Όμως ισχύουν:

- $x^3 > 0,\ 5x^2 + \frac{1}{x^2} > 4 \Leftrightarrow 5x^4 - 4x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^4 + (2x^2-1)^2 > 0,$ ισχύει,
- $10x + \frac{5}{x} > 14 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} 10x^2 - 14x + 5 > 0,$ ισχύει αφού $\Delta = -4 < 0.$

Άρα από τη σχέση (5) έχουμε: $abc > 28$.

(β) Από το ερώτημα (α) και τη σχέση $b = a + 1 + \dfrac{1}{a-1}$, επειδή οι αριθμοί $b,\ a+1$ είναι ακέραιοι, προκύπτει ότι και ο αριθμός $\dfrac{1}{a-1} \in \mathbb{Z}$, οπότε πρέπει:

$$a - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow a = 0\,(\text{απορρίπτεται, γιατί } a \neq 0) \ \text{ ή } \ a = 2. \text{ Τότε } b = c = \frac{a^2}{a-1} = 4.$$

Για τις τιμές αυτές το πολυώνυμο

$$P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (c+b)x + c = 2x^3 + 2x^2 - 8x + 4 = 2(x-1)(x^2+2x-2)$$

έχει ρίζες $x_0 = 1,\ x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$ οι οποίες είναι ρίζες και του πολυωνύμου

$$F(x) = Q(x) - P(x) = x(x-1)\left(x^2 + (b-a)x + (a-b)\right) = x\left(x^2 + 2x - 2\right),$$

οπότε θα είναι ρίζες και του πολυωνύμου $Q(x) = F(x) + P(x)$.

Πρόβλημα 3

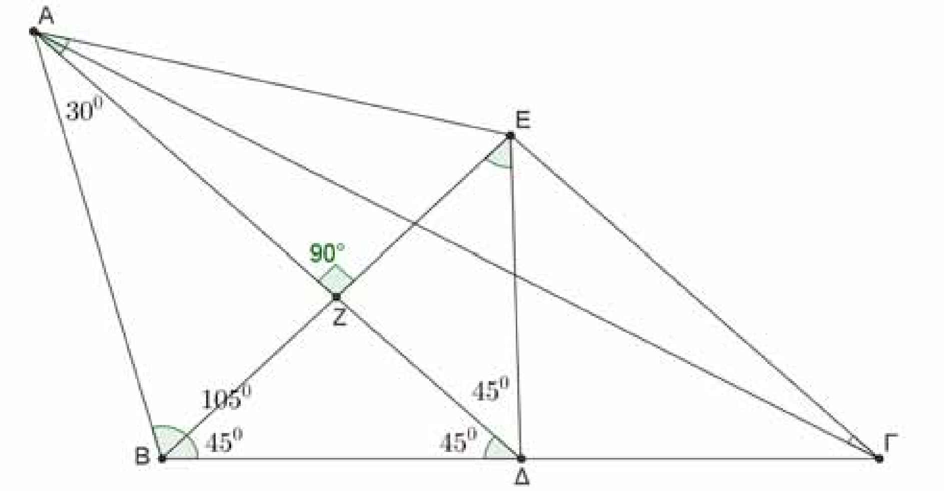
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{B}} = 105^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{A} = 45^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Αν το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε $\hat{\Gamma} = 30^\circ$

(β) Αν $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, τότε το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Λύση (1ος τρόπος)

Ευθύ. Έστω ότι το Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι: $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.



Σχήμα 1

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$. Έστω Ε το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ΑΔ και έστω Ζ το μέσο της ΒΕ. Τότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{AE}$ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 2 \cdot \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο, οπότε

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BE} = \mathrm{AE} \qquad (1)$$

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 60^\circ \qquad (2)$$

Τότε, από το τρίγωνο ΒΖΔ με $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\Delta = 90^\circ$, έχουμε: $\Delta\mathrm{BZ} = 45^\circ$.

Επιπλέον, στο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε, λόγω συμμετρίας, ότι η διάμεσος ΕΔ ισούται με

$$E\Delta = \Delta B = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Άρα το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές με

$$E\hat{B}\Gamma = 45^\circ \text{ και } BE = E\Gamma. \qquad (3)$$

Επομένως το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές $B\hat{E}\Gamma = 90^\circ$. Επειδή είναι και $A\hat{Z}E = 90^\circ$, έπεται ότι: $A\Delta \parallel E\Gamma$. Τότε προκύπτει η ισότητα των γωνιών

$$\Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{\Gamma}A \qquad (4)$$

Επιπλέον, από τις ισότητες (1) και (3) λαμβάνουμε ότι $AE = E\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές με

$$E\hat{\Gamma}A = E\hat{A}\Gamma \qquad (5)$$

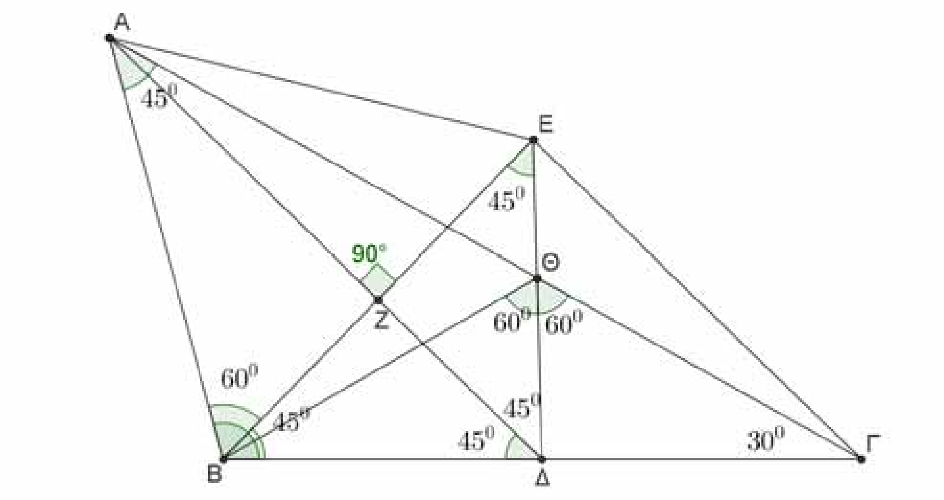
Από τις σχέσεις (4) και (5) λαμβάνουμε

$$\Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{A}\Gamma = \frac{\Delta\hat{A}E}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

οπότε από το τρίγωνο ΑΒΓ προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{B} - \left(B\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}\Gamma\right) = 180^\circ - 105^\circ - \left(30^\circ + 15^\circ\right) = 30^\circ.$$

Αντίστροφο. Έστω ότι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θα αποδείξουμε ότι το Μ είναι το μέσο της ΒΓ.



Σχήμα 2

Παρατηρούμε ότι $B\hat{A}\Delta = 180^\circ - \left(105^\circ + 45^\circ\right) = 30^\circ$ και $B\hat{A}\Gamma = 45^\circ$. Έστω Ε το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ΑΔ και έστω Ζ το μέσο της ΑΕ. Τότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $AB = AE$ και $B\hat{A}E = 2 \cdot B\hat{A}\Delta = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο, οπότε

$$AB = BE = AE \qquad (1)$$

$$A\hat{B}E = A\hat{E}B = B\hat{A}E = 60^\circ \qquad (2)$$

Τότε, από το τρίγωνο ΒΖΔ με $B\hat{Z}\Delta = 90^\circ$, έχουμε: $\Delta BZ = 45^\circ$.
Επιπλέον, λόγω συμμετρίας έχουμε

$$B\hat{E}\Delta = \Delta\hat{B}Z = 45^\circ, \qquad (3)$$

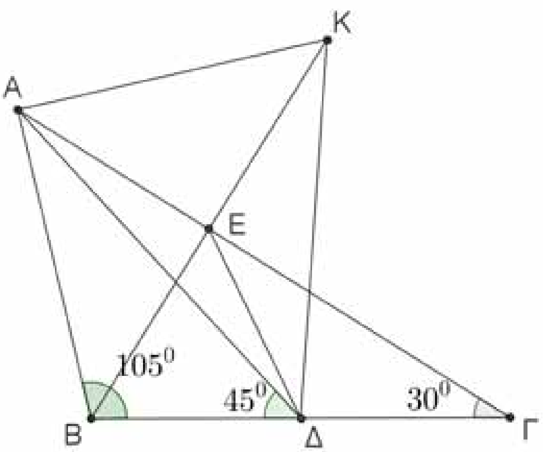
$$E\hat{\Delta}B = 2 \cdot Z\hat{\Delta}B = 90^\circ. \qquad (4)$$

Έστω Θ το σημείο τομής της ΔΕ με την ΑΓ. Τότε, από τη σχέση (4) προκύπτει ότι το ΘΔ είναι **ύψος** του τριγώνου ΒΘΓ.

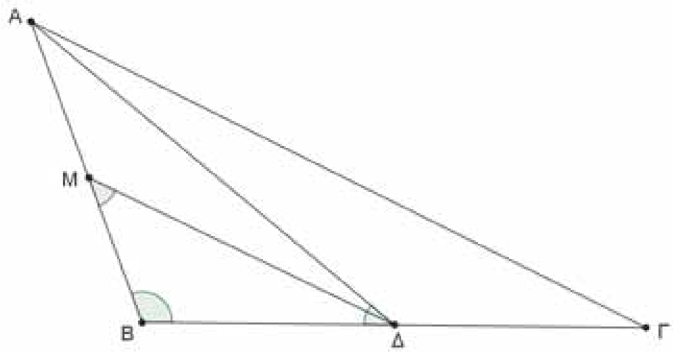
Επιπλέον, από τη σχέση (3) λαμβάνουμε $B\hat{E}\Theta = B\hat{E}\Delta = 45^\circ = B\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Theta$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΘΕ είναι εγγράψιμο. Άρα έχουμε $B\hat{\Theta}\Delta = B\hat{A}E = 60^\circ$ και $\Delta\hat{\Theta}\Gamma = A\hat{\Theta}E = A\hat{B}E = 60^\circ$. Επομένως είναι $B\hat{\Theta}\Delta = \Delta\hat{\Theta}\Gamma = 60^\circ$, οπότε η ΘΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Theta}\Gamma$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ΘΔ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΒΘΓ, οπότε το τρίγωνο ΒΘΓ είναι ισοσκελές και θα έχει τη ΘΔ διάμεσο, δηλαδή το Δ είναι το μέσο της ΒΓ.

2ος τρόπος

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $\hat{\Gamma} = 30°$ (σχήμα 3). Θεωρούμε το συμμετρικό Κ του Β ως προς την ευθεία ΑΓ και έστω ότι η ΚΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Τότε έχουμε ότι $K\hat{B}\Gamma = 60°$, οπότε $A\hat{B}E = 45°$, επομένως $A\hat{K}B = 45°$ και το τρίγωνο ΒΑΚ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Ισχύει επομένως ότι $A\hat{\Delta}B = A\hat{K}B = 45°$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΔΚ είναι εγγράψιμο. Αν η ΚΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε, τότε ισχύει $EA = EB = EK$, άρα το Ε είναι το κέντρο του κύκλου, άρα $E\Delta = EB$, και αφού $K\hat{B}\Gamma = 60°$, το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο, άρα $EB = E\Delta$ (1). Επιπλέον, θα είναι $\Delta\hat{E}\Gamma = 30°$, άρα το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\Delta E = \Delta\Gamma$ (2). Από τις (1),(2) έχουμε ότι $\Delta B = \Delta\Gamma$.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι Δ μέσον του ΒΓ (σχήμα 4). Θεωρούμε σημείο M του AB τέτοιο ώστε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Delta = 45°$. Τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το (α) στο τρίγωνο $\mathrm{AB}\Delta$, αφού $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 30°$, οπότε το σημείο M είναι μέσον του ΑΒ, οπότε $\Delta\mathrm{M} // \mathrm{A}\Gamma$. Επομένως $\hat{\Gamma} = \mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{M} = 180° - \left(105° + 45°\right) = 30°$

3ος τρόπος (τριγωνομετρικά):

Έστω ότι η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = x$. Από το νόμο ημιτόνων στο τρίγωνο $\mathrm{AB}\Delta$ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{B}\Delta}{\eta\mu 30°} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\eta\mu 105°} \Rightarrow \mathrm{B}\Delta = \frac{\mathrm{A}\Delta}{2\eta\mu 105°}.$$

Όμοια από το νόμο ημιτόνων στο τρίγωνο $\mathrm{A}\Delta\Gamma$ έχουμε: $\Delta\Gamma = \dfrac{\mathrm{A}\Delta\,\eta\mu(45° - x)}{\eta\mu x}$.

Επομένως, το Δ είναι μέσο αν και μόνο αν:

$$\frac{\mathrm{A}\Delta\,\eta\mu(45° - x)}{\eta\mu x} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{2\eta\mu 105°} \Leftrightarrow 2\eta\mu 105°\eta\mu 45°(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) = \eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu 105°\eta\mu 45°\sigma\upsilon\nu x = (1 + 2\eta\mu 105°\eta\mu 45°)\eta\mu x$$

Όμως ισχύει ότι:

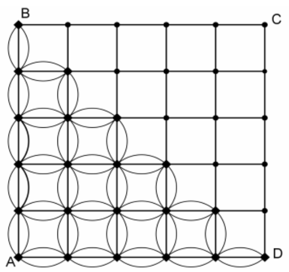
$$2\eta\mu 45°\eta\mu 105° = 2\eta\mu 45°\eta\mu\left(60° + 45°\right) = (\eta\mu 45°)^2(\eta\mu 60° + \sigma\upsilon\nu 60°) = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

οπότε η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2}} = \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} = \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{1}{\sqrt{3}} \overset{x<45°}{\Leftrightarrow} x = 30°.$$

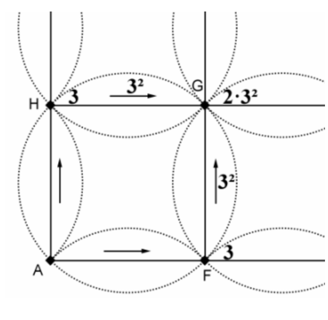
Πρόβλημα 4

Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του (στο σχήμα φαίνεται η περίπτωση για $n = 5$). Τα σημεία που πλέγματος που βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD συνδέονται μεταξύ τους και με δύο τόξα κύκλων. Ξεκινώντας από το σημείο A, κινούμαστε προς τα δεξιά και προς τα άνω (η κίνηση γίνεται επάνω στα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα στοιχειώδη τετράγωνα και τα τόξα των κύκλων). Πόσες είναι οι δυνατές διαδρομές από το σημείο A μέχρι το σημείο C;



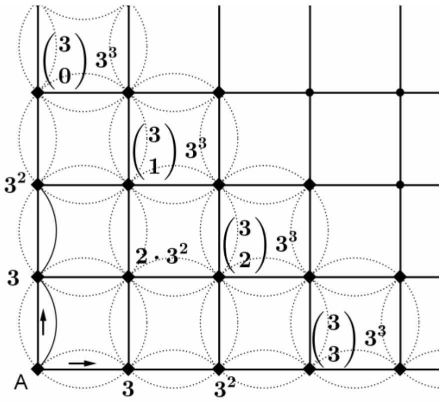
Λύση

Υποθέτουμε ότι το τετράγωνο είναι τοποθετημένο σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο A και τους άξονες να ταυτίζονται



Σχήμα 5

με τις πλευρές AB και AD. Τότε όλα τα σημεία του πλέγματος θα έχουν θετικές ακέραιες συντεταγμένες.
Παρατηρούμε (Σχήμα 1) ότι το σημείο $F(1,0)$, μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $A(0,0)$) με 3 τρόπους.
Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι και το σημείο $H(0,1)$, μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $A(0,0)$) με 3 τρόπους.
Το σημείο $G(1,1)$ μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $H(0,1)$) με 3 τρόπους. Άρα το σημείο $G(1,1)$ μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $\mathrm{A}(0,0)$) με 3^2 τρόπους (πολλαπλασιαστική αρχή), ακλουθώντας τη διαδρομή A,H,G.
Με όμοιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι οι δυνατοί τρόποι προσέγγισης του σημείου $G(1,1)$ (ακλουθώντας τη διαδρομή A,F,G) είναι 3^2 τρόποι.
Άρα τελικά όλοι οι δυνατοί τρόποι προσέγγισης του σημείου $G(1,1)$ είναι $2\cdot 3^2$.



Σχήμα 6

Κάθε λοιπόν σημείο του πλέγματος $M(i,j)$ (που βρίσκεται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD) μπορούμε να το προσεγγίσουμε με $\binom{i+j}{i}\cdot 3^{i+j}=\binom{i+j}{j}\cdot 3^{i+j}$ τρόπους (από το σημείο $\mathrm{A}(0,0)$).
Τα σημεία του πλέγματος που βρίσκονται επάνω στη διαγώνιο BD (δηλ τα σημεία $(0,n),(1,n-1)),\ (2,n-2),\ldots,(n-1,1),(n,0)$ μπορούμε να τα προσεγγίσουμε με $\binom{n}{0}\cdot 3^n,\binom{n}{1}\cdot 3^n,\binom{n}{2}\cdot 3^n,\ldots,\binom{n}{n-1}\cdot 3^n,\binom{n}{n}\cdot 3^n$ τρόπους αντίστοιχα.
Τα υπόλοιπα σημεία του πλέγματος (δηλαδή τα σημεία του πλέγματος που δεν βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD), συνδέονται μεταξύ τους μόνο με ευθύγραμμα τμήματα. Η μετακίνηση από το σημείο (i,j) στο σημείο $(i+k,j+m)$ του πλέγματος (κινούμενοι προς τα δεξιά και άνω), μπορεί να γίνει με $\binom{k+m}{k}=\binom{k+m}{m}$ τρόπους.

Άρα η μετακίνηση από το σημείο $(0,n)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{0}$ τρόπους.

Η μετακίνηση από το σημείο $(1,n-1)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{1}$ τρόπους.

Η μετακίνηση από το σημείο $(2,n-2)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{2}$ τρόπους.

. . . .

Η μετακίνηση από το σημείο $(n-1,1)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{n-1}$ τρόπους.

Η μετακίνηση από το σημείο $(n,0)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{n}$ τρόπους.

Άρα το σημείο $C(n,n)$, μπορεί να προσεγγιστεί από το σημείο A με:

$$3^n\left(\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n-1}^2+\binom{n}{n}^2\right)=3^n\binom{2n}{n} \text{ τρόπους.}$$

2^{ος} τρόπος

Αν δεν υπήρχαν τα τόξα των κύκλων, έχουμε $\binom{n+n}{n}$ διαφορετικές διαδρομές για να πάμε από το A στο C.

Πράγματι, από τα συνολικά $2n$ βήματα που πρέπει να κάνουμε είτε δεξιά είτε πάνω, σε ακριβώς n πρέπει να πάμε δεξιά και σε ακριβώς n πρέπει να πάμε πάνω. Αν επομένως σταθεροποιήσουμε τα βήματα στα οποία πάμε δεξιά, τότε προσδιορίζεται όλη η διαδρομή. Επομένως πρέπει να επιλέξουμε τα n βήματα από τα συνολικά $2n$. Αυτό γίνεται με $\binom{2n}{n}$ τρόπους.

Τώρα, κάθε σημείο της διαγωνίου BD είναι της μορφής $(k,n-k)$, οπότε για να φτάσουμε σε καθένα από αυτά χρειαζόμαστε ακριβώς $k+n-k=n$ βήματα.

Με τα τόξα, το μόνο που αλλάζει είναι ότι στα πρώτα n βήματα, δηλαδή ακριβώς στα βήματα πριν τη διαγώνιο, έχω 3 επιλογές για τη μετακίνηση από το ένα σημείο στο άλλο. Δηλαδή για κάθε διαδρομή χωρίς τόξα, έχω 3^n διαδρομές με τμήματα και τόξα. Επομένως αφού οι διαδρομές χωρίς τόξα είναι $\binom{2n}{n}$, με τμήματα και τόξα είναι $3^n\cdot\binom{2n}{n}$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τις τριάδες μη αρνητικών ακεραίων (x, y, z) με $x \le y$, που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77$$

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν $z = 0$, τότε έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 = 80$.

Τότε πρέπει οι x, y να είναι πολλαπλάσια του 4, δηλαδή $x = 4a, y = 4b$, $0 \le a \le b$, και η εξίσωση γίνεται $a^2 + b^2 = 5$ οπότε $(a,b) = (1,2)$, δηλαδή $(x, y) = \mathbf{(4,8)}$.

Αν $z > 0$, τότε $7 \mid 2016^z$ (επειδή $7 \mid 2016$) και $7 \mid 77$, επομένως το 7 πρέπει να διαιρεί και το αριστερό μέλος, δηλαδή $7 \mid x^2 + y^2$. Τα πιθανά υπόλοιπα ενός τετραγώνου με το 7 είναι τα ίδια με τα υπόλοιπα των $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ που είναι $0,1,2,4$. Οπότε, για να ισχύει $7 \mid x^2 + y^2$ πρέπει $7 \mid x, 7 \mid y$ και γράφουμε $x = 7x_1$ και $y = 7y_1$, με $0 \le x_1 \le y_1$.

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $49(x_1^2 + y_1^2) = 3 \cdot 2016^z + 77$.

Αν $z \ge 2$, τότε $49 \mid 2016^z$, οπότε αφού διαιρεί και το αριστερό μέλος, θα πρέπει $49 \mid 77$, που είναι άτοπο.

Αν $z = 1$, τότε $49(x_1^2 + y_1^2) = 3 \cdot 7 \cdot 288 + 77 = 7(3 \cdot 288 + 11) = 7 \cdot 7 \cdot 125$. Δηλαδή πρέπει $x_1^2 + y_1^2 = 125$. Αφού $x_1 \le y_1$, έχουμε ότι $2y_1^2 \ge 125 \Rightarrow y_1 \ge 8$. Για $y_1 = 8,9,10,11$, βρίσκουμε τις λύσεις $(x_1, y_1) \in \{(5,10),(2,11)\}$

Τελικά οι λύσεις είναι:

$$(x, y) \in \{\mathbf{(4,8), (35, 70), (14,77)}\}.$$

Πρόβλημα 2

Τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές είναι μη σταθερά, έχουν συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1 και επιπλέον ικανοποιούν τις ισότητες:

$$2P(x) = Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right) - Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \ P(1) = 1,$$

Να βρείτε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$.

Λύση

Έστω $Q(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$. Τότε ο μεγιστοβάθμιος όρος του πολυωνύμου $Q\left(\dfrac{(x+1)^2}{2}\right)-Q\left(\dfrac{(x-1)^2}{2}\right)$ προέρχεται από το ανάπτυγμα των μεγιστοβάθμιων όρων $\left(\dfrac{(x+1)^2}{2}\right)^n-\left(\dfrac{(x-1)^2}{2}\right)^n$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του τελευταίου ισούται με

$$\frac{2nx^{2n-1}}{2^n}+\frac{2nx^{2n-1}}{2^n}=\frac{4n}{2^n}x^{2n-1} \qquad (1).$$

Όμως ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου στο αριστερό μέλος ισούται με 2, οπότε πρέπει $\dfrac{4n}{2^n}=2 \Leftrightarrow 2^{n+1}=4n$. Όμως $2^{n+1}>4n$ για $n\geq 3$, οπότε $n=1$ ή $n=2$ και από την (1) ο βαθμούς του P είναι $2-1=1$ ή $2\cdot 2-1=3$.

Για $x=0$ στην αρχική σχέση παίρνουμε $2P(0)=Q(1/2)-Q(1/2)=0$, άρα $P(0)=0$.

- Αν τώρα $n=1$, τότε $P(x)=ax$ και αφού $P(1)=1$, θα είναι
$$P(x)=x \text{ και } Q(x)=x+a_0,\ a_0\in\mathbb{R}.$$
- Αν $n=2$, τότε αν $Q(x)=x^2+bx+c$, έχουμε:

$$2P(x)=Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)-Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)=\frac{1}{4}\left((x+1)^4-(x-1)^4\right)+\frac{b}{2}\left((x+1)^2-(x-1)^2\right)=$$
$$=\frac{1}{4}(8x^3+8x)+\frac{b}{2}(4x)=2x^3+2(1+b)x.$$

Επομένως, $P(x)=x^3+(1+b)x$. Επειδή επιπλέον $P(1)=1$, πρέπει $b=-1$, οπότε
$$P(x)=x^3 \text{και } Q(x)=x^2-x+c,\ c\in\mathbb{R}\ .$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$) και το ύψος του ΓΔ. Ο κύκλος $c_2(\Gamma,\Gamma\Delta)$ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ , την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ζ και τον κύκλο $c_1(B,B\Delta)$ στο σημείο Ε. Η ΔΖ τέλος τέμνει τον κύκλο $\boldsymbol{c_1}$ στο σημείο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{Z}\hat{\Delta}\mathrm{E}=45^0$, **(β)** Τα σημεία Ε, Μ και Κ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία,

(γ) Η ευθεία ΒΜ είναι παράλληλη με την ευθεία ΕΓ.

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε: $\hat{\Gamma}_1=90^0-\hat{\mathrm{B}}$.

Η διάκεντρος ΒΓ των κύκλων c_1 και c_2 είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους ΔΕ.

Αν λοιπόν Τ είναι το σημείο τομής των ΒΓ και ΔΕ,

τότε (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΤΔ) έχουμε: $\hat{\Gamma}_1+\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_2=90^0$, δηλαδή

$$\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_2=\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}. \qquad (1)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΓΔΖ έχουμε: $\hat{\Delta}_1=\hat{\mathrm{Z}}_1$ και $\hat{\Gamma}_2=2\hat{\Delta}_1=90^0-\hat{\mathrm{A}}$, οπότε

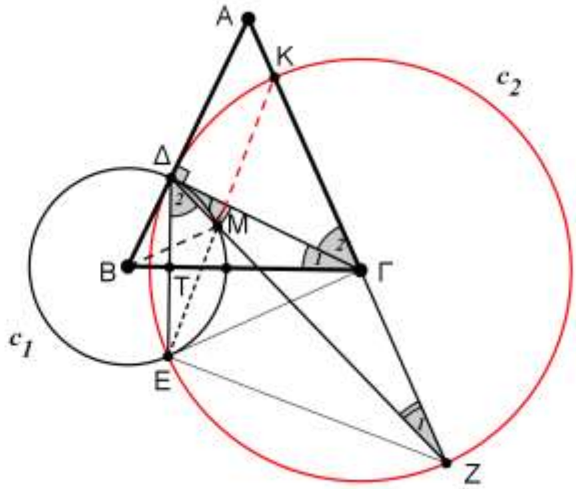
$$\hat{\Delta}_1=45^0-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}. \qquad (2)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{B} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Delta}_2 = \hat{B} - \hat{\Delta}_1 \overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \hat{\Delta}_2 = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} - \left(45^0 - \frac{\hat{A}}{2}\right) = 45^0.$$



Σχήμα 1

(β) Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ σχηματίζεται από την χορδή ΔM και την εφαπτομένη $\Delta\Gamma$ του κύκλου c_1, άρα $\Delta\hat{E}M = \hat{\Delta}_1$. Ισχύει επίσης $\Delta\hat{E}K = \Delta\hat{Z}K = \hat{Z}_1$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο c_2 και βαίνουν στο τόξο ΔK). Επειδή όμως $\hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1$, θα ισχύει $\Delta\hat{E}M = \Delta\hat{E}K$, οπότε τα σημεία E, M, K είναι συνευθειακά.

(γ) Θα αποδείξουμε ότι $\Delta\hat{B}M = 90^0 - \hat{A}$.
Ισχύει: $\Delta\hat{B}M = 2\Delta\hat{E}M = 2\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2 = 90 - \hat{A}$, οπότε $BM \perp A\Gamma$.
Επιπλέον, ισχύει $E\hat{K}Z = E\hat{\Delta}Z = \hat{\Delta}_2 = 45^0$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο EZK είναι ισοσκελές και η διάμεσός του $E\Gamma$ είναι και ύψος, δηλαδή $E\Gamma \perp KZ$.
Άρα $BM // E\Gamma$ (ως κάθετες στην ευθεία AZ).

Πρόβλημα 4

Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Τις κορυφές των στοιχειωδών τετραγώνων τις ονομάζουμε σημεία του πλέγματος. Ένα ρόμβο θα τον ονομάζουμε "*καλό*", όταν:

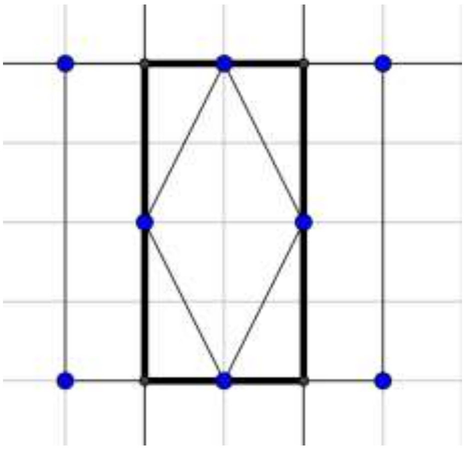
- δεν είναι τετράγωνο
- οι κορυφές του είναι σημεία του πλέγματος,
- οι διαγώνιές του είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου $ABCD$.

Να βρεθεί συναρτήσει του n (με κλειστό τύπο) το πλήθος των "*καλών*" ρόμβων, όπου n ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 2.

Λύση

Από τις κορυφές του ρόμβου φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τις πλευρές τους πλέγματος, οπότε βρίσκουμε το ελάχιστο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που περιέχει το ρόμβο. Λόγω της συμμετρίας ως προς κέντρο του ρόμβου, θα πρέπει το ορθογώνιο αυτό να έχει άρτια μήκη πλευρών.

Επομένως αρκεί να μετρήσουμε τα ορθογώνια με άρτια μήκη πλευρών $2s\times 2t$ για τα οποία ισχύει $s\neq t$. Για το σκοπό αυτό θα μετρήσουμε όλα τα ορθογώνια $2s\times 2t$ και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s\times 2s$.



Σχήμα 2

- Έστω ότι $n=2k$

Αριθμούμε τις κάθετες ευθείες του πλέγματος από αριστερά προς τα δεξιά $1,2,3,\ldots,2k+1$ και τις γραμμές του πλέγματος, από κάτω προς τα πάνω $1,2,3,\ldots,2k+1$. Ένα ορθογώνιο $2s\times 2t$ προσδιορίζεται από δύο κάθετες γραμμές του πλέγματος και δύο οριζόντιες που έχουν άρτια απόσταση. Για να έχουν άρτια απόσταση πρέπει και οι δύο να έχουν άρτιο αριθμό ή και οι δύο περιττό αριθμό. Για να διαλέξουμε δύο κάθετες γραμμές με άρτιο αριθμό έχουμε $\binom{k}{2}$ επιλογές, ενώ για να διαλέξουμε δύο κάθετες γραμμές με περιττό αριθμό έχουμε $\binom{k+1}{2}$ επιλογές. Οπότε για να επιλέξουμε δύο κάθετες γραμμές με άρτια απόσταση έχουμε $\binom{k}{2}+\binom{k+1}{2}=k^2$ επιλογές.

Όμοια, έχουμε k^2 επιλογές για τις στήλες. Οπότε συνολικά έχουμε $k^2\cdot k^2=k^4$ ορθογώνια $2s\times 2t$. Μένει τώρα να αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s\times 2s$. Τα 2×2 τετράγωνα είναι $(n-2+1)^2=(2k-2+1)^2$. Τα 4×4 είναι $(n-4+1)^2=(2k-4+1)^2$. Γενικά τα $2s\times 2s$ είναι $(n-2s+1)^2=(2k-2s+1)^2$. Άρα όλα μαζί είναι

$$\sum_{s=1}^{k}(2k-2s+1)^2=\sum_{s=1}^{k}(2k+1)^2-4s(2k+1)+4s^2=$$

$$k(2k+1)^2-2(2k+1)k(k+1)+4\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

Επομένως οι ρόμβοι είναι: $k^4-\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}=\frac{k(k-1)(3k^2-k-1)}{3}$.

- Όταν $n=2k+1$, εντελώς όμοια με παραπάνω έχουμε $\binom{k+1}{2}+\binom{k+1}{2}=k(k+1)$

επιλογές για την επιλογή των δύο κάθετων γραμμών και $k(k+1)$ επιλογές για την επιλογή των οριζόντιων. Επομένως έχουμε συνολικά $(k(k+1))^2$ ορθογώνια $2s\times 2t$ και πρέπει να αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s\times 2s$ που είναι $(n-2s+1)^2=(2k+1-2s+1)^2=(2k+2-2s)^2$. Δηλαδή συνολικά

$$\sum_{s=1}^{k}(2k+2-2s)^2=\sum_{s=1}^{k}(2k+2)^2-4(2k+2)s+4s^2$$

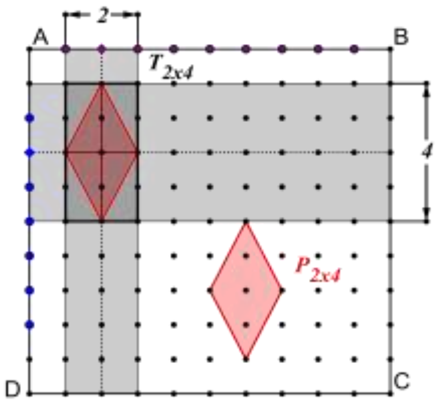
$$=k(2k+2)^2-2(2k+2)k(k+1)+4\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}$$

Επομένως, οι ρόμβοι είναι συνολικά:

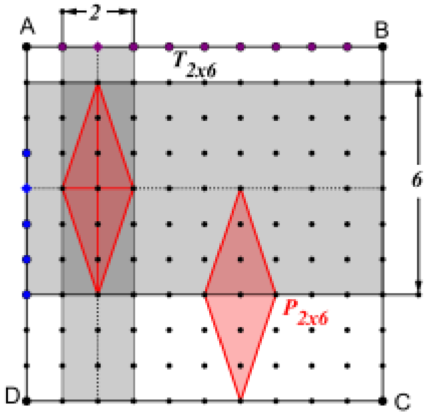
$$(k(k+1))^2-\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}=\frac{k(k+1)(3k^2-k-2)}{3}$$

2[ος] τρόπος

Υποθέτουμε ότι το μήκος των πλευρών των στοιχειωδών τετραγώνων είναι 1.
Αν οι διαγώνιες του ρόμβου είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου, τότε οι κορυφές του θα είναι τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου του οποίου οι πλευρές έχουν μήκη πολλαπλάσια του 2 και είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τετραγώνου.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Στα δύο παραπάνω σχήματα βλέπουμε ορθογώνια παραλληλόγραμμα (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου $ABCD$).

Σε κάθε ορθογώνιο τύπου T_{2x4} αντιστοιχεί ένας και μόνο ρόμβος τύπου P_{2x4}.

Σε κάθε ορθογώνιο τύπου T_{2x6} αντιστοιχεί ένας και μόνο ρόμβος τύπου P_{2x6} …

Για να προσδιορίσουμε λοιπόν το πλήθος των ρόμβων, αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος των ορθογωνίων τύπου $T_{(2m)x(2k)}$, όπου m,k ακέραιοι με $1 \le m < k \le l$, όταν $n = 2l$.

Για $m = 1$ και $k = 2$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{2x4} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x2}) είναι $(n-1)(n-3)$.

Για $m = 1$ και $k = 3$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους 6, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-5$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{2x6} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{6x2}) είναι $(n-1)(n-5)$.

…………

Για $m = 1$ και $k = l$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους $2l$, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-2l+1 = 1$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{2x(2l)}$ (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{(2l)x2}$) είναι $(n-1)(n-2l+1) = (n-1)\cdot 1$.

Τελικά το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων των οποίων η μία πλευρά, έχει μήκος 2, είναι: $S_2 = 2\big((n-1)(n-3) + (n-1)(n-5) + \cdots + (n-1)\cdot 1\big) =$

$$= 2(n-1)\big((n-3) + (n-5) + \cdots + 1\big) =$$

$$=2(n-1)\frac{1+(n-3)}{2}\cdot\frac{n-2}{2}=\frac{(n-1)(n-2)^2}{2}.$$

Για $m=2$ και $k=3$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους 6, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-5$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x6} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{6x4}) είναι $(n-3)(n-5)$.
Για $m=2$ και $k=4$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους 8, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-7$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x8} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{8x4}) είναι $(n-3)(n-7)$.
…………
Για $m=2$ και $k=l$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους $2l$, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-2l+1=1$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{4x(2l)}$ (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{(2l)x4}$) είναι $(n-3)(n-2l+1)=(n-3)\cdot 1$.
Τελικά το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων των οποίων η μία πλευρά, έχει μήκος 4, είναι: $S_4=2\big((n-3)(n-5)+(n-3)(n-7)+\cdots+(n-3)\cdot 1\big)=$

$$=2(n-3)\big((n-5)+(n-7)+\cdots+1\big)=$$

$$=\frac{(n-3)(n-4)^2}{2}.$$

Ανακεφαλαιώνοντας και επεκτείνοντας τη διαδικασία έχουμε:

$$S_2=2(n-1)(n-l-1)(l-1)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-2)^2}{2}, & n=2l\\[2mm] \dfrac{(n-3)(n-1)^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$

$$S_4=2(n-3)(n-l-2)(l-2)=\begin{cases}\dfrac{(n-3)(n-4)^2}{2}, & n=2l\\[2mm] \dfrac{(n-5)(n-3)^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$

$$S_6=2(n-5)(n-l-3)(l-3)=\begin{cases}\dfrac{(n-5)(n-6)^2}{2}, & n=2l\\[2mm] \dfrac{(n-7)(n-5)^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$

………………………………………………

$$S_{2l-4}=\begin{cases}\dfrac{5\cdot 4^2}{2}, & n=2l\\ \dfrac{6\cdot 8^2}{2}, & n=2l+1,\end{cases}\quad S_{2l-2}=\begin{cases}\dfrac{3\cdot 2^2}{2}, & n=2l\\ \dfrac{4\cdot 6^2}{2}, & n=2l+1,\end{cases}\quad S_{2l}=\begin{cases}0, & n=2l\\ \dfrac{2\cdot 4^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων (για $n=2l$) δίνεται από το άθροισμα:

$$S=S_2+S_4+\cdots+S_{2l-2}=\frac{(n-1)(n-2)^2}{2}+\frac{(n-3)(n-4)^2}{2}+\cdots+\frac{5\cdot 4^2}{2}+\frac{3\cdot 2^2}{2}.$$

$$=\frac{(n-2)^3+(n-2)^2}{2}+\frac{(n-4)^3+(n-4)^2}{2}+\ldots+\frac{4^3+4^2}{2}+\frac{2^3+2^2}{2}$$

Γράφοντας $n=2l$ το παραπάνω άθροισμα, γίνεται:

$$S=\frac{8(l-1)^3+4(l-1)^2}{2}+\frac{8(l-2)^3+4(l-2)^2}{2}+\ldots+\frac{8\cdot 2^3+4\cdot 2^2}{2}+\frac{8+4}{2}=$$

$$=4((l-1)^3+(l-2)^3+\ldots+1)+2((l-1)^2+\ldots+1)=$$

$$=\left(l(l-1)\right)^2+2\cdot\frac{(l-1)l(2l-1)}{6}=l(l-1)\left(l(l-1)+\frac{2l-1}{3}\right)=\frac{l(l-1)(3l^2-l-1)}{3}$$

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων (για $n=2l+1$) δίνεται από το άθροισμα:

$$S'=S_2+S_4+\cdots+S_{2l-2}+S_{2l}=\frac{(n-3)(n-1)^2}{2}+\frac{(n-5)(n-3)^2}{2}+\cdots+\frac{4\cdot 6^2}{2}+\frac{2\cdot 4^2}{2}$$

Γράφοντας $n=2l+1$ το παραπάνω άθροισμα, γίνεται:

$$S'=\frac{(2l-2)(2l)^2}{2}+\frac{(2l-4)(2l-2)^2}{2}+\ldots+\frac{4\cdot 6^2}{2}+\frac{2\cdot 4^2}{2}=$$

$$=4(l^3-l^2)+4((l-1)^3-(l-1)^2)+\ldots+4(3^3-2^3)+4(2^3-2^2)+4(1^3-1^2)=$$

$$=4((l^3+(l-1)^3+\ldots+1)-(l^2+(l-1)^2+\ldots+1))=$$

$$=(l(l+1))^2-2\frac{l(l+1)(2l+1)}{3}=\frac{l(l+1)(3l^2-l-2)}{3}.$$

Τους δύο τύπους μπορούμε να τους συνοψίσουμε με τη βοήθεια του ακεραίου μέρους ως:

$$\frac{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\cdot\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\left(3\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2-\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor\right)}{3}.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

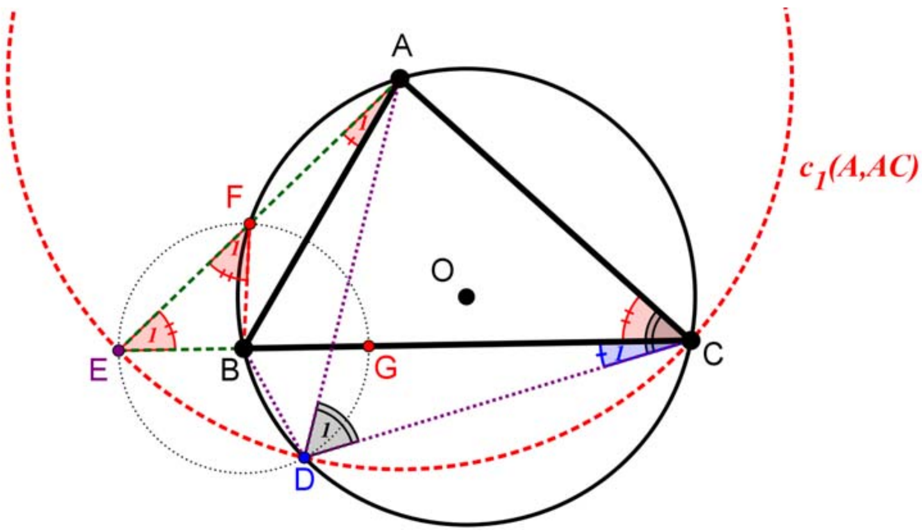
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
34η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
4 Μαρτίου 2017

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με AB < AC < BC, εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R). Ο κύκλος $c_1(\mathrm{A}, \mathrm{AC})$ τέμνει τον κύκλο c(O,R) στο σημείο D και την προέκταση της πλευράς CB στο σημείο E. Αν η ευθεία AE τέμνει τον κύκλο c(O,R) στο σημείο F και G είναι το συμμετρικό του E ως προς το B, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο FEDG είναι εγγράψιμο.

Λύση (1ος τρόπος)



Σχήμα 1

Το τετράπλευρο AFBC είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (c), άρα: $\hat{\mathrm{F}}_1 = \mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{C}}$.

Το τρίγωνο AEC είναι ισοσκελές (οι AE και AC είναι ακτίνες του κύκλου (c_1)) άρα:

$$\hat{\mathrm{E}}_1 = \mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{C}} \quad .$$

Από τις ισότητες των γωνιών προκύπτει ότι $\hat{\mathrm{F}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1$, οπότε το τρίγωνο BEF είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια:

$$\mathrm{BE}=\mathrm{BF} \qquad (1).$$

Ονομάζουμε $\hat{\mathrm{C}}_1 = x$ και από τον κύκλο (c_1) θα έχουμε ότι $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{D} = 2x$, (ως επίκεντρη), οπότε

$$\mathrm{E\hat{A}B} + \mathrm{B\hat{A}D} = 2x \qquad (2)$$

Επιπλέον, από τον κύκλο (c) έχουμε ότι:

$$\mathrm{B\hat{A}D} = \hat{\mathrm{C}}_1 = x \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) έχουμε ότι $\mathrm{E\hat{A}B} = \mathrm{B\hat{A}D} = x$, οπότε η AB είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο EAD. Συνεπώς είναι μεσοκάθετος της ED, άρα

$$\mathrm{BE=BD}. \qquad (4)$$

Από τις ισότητες (1) και (4), καθώς και από την προφανή (λόγω συμμετρίας) ισότητα BE=BG , συμπεραίνουμε ότι BE = BF = BG = BD, οπότε το τετράπλευρο DEFG είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο το B.

2$^{\text{ος}}$ τρόπος. Το τετράπλευρο AFBC είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (c), άρα:

$$\hat{\mathrm{F}}_1 = \mathrm{A\hat{C}B} = \hat{\mathrm{C}}.$$

Το τρίγωνο AEC είναι ισοσκελές (οι AE και AC είναι ακτίνες του κύκλου (c_2)) άρα:

$$\hat{\mathrm{E}}_1 = \mathrm{A\hat{C}B} = \hat{\mathrm{C}}.$$

Από τις ισότητες των γωνιών προκύπτει ότι $\hat{\mathrm{F}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1$, οπότε το τρίγωνο BEF είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια:

$$\mathrm{BE = BF} \qquad (5).$$

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABDC έχουμε: $\hat{\mathrm{D}}_1 = \mathrm{A\hat{B}C} = \hat{\mathrm{B}}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ADC έχουμε: $\hat{\mathrm{D}}_1 = \mathrm{A\hat{C}D}$ Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών, έχουμε ότι $\mathrm{A\hat{C}D} = \hat{\mathrm{B}}$ και κατά συνέπεια

$$\hat{\mathrm{C}}_1 = \hat{\mathrm{B}} - \hat{\mathrm{C}} \quad .$$

Από το τρίγωνο ABE έχουμε: $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{B}} - \hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\mathrm{B}} - \hat{\mathrm{C}}$, οπότε: $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{C}}_1 = \hat{\mathrm{B}} - \hat{\mathrm{C}}$ και επειδή οι γωνίες $\hat{\mathrm{A}}_1, \hat{\mathrm{C}}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c), θα ισχύει:

$$\mathrm{BD = BF} \qquad (6).$$

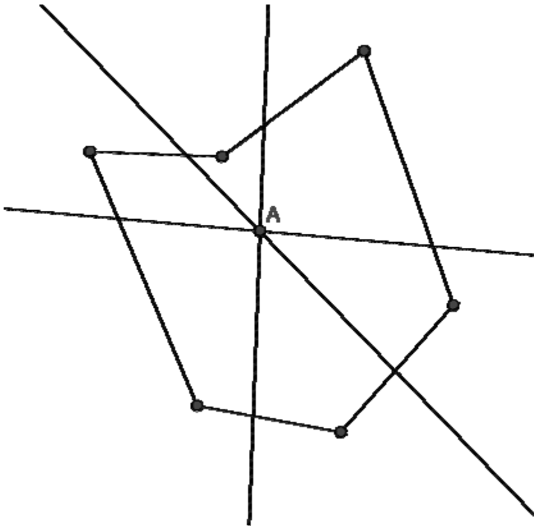
Από τις ισότητες (5) και (6), καθώς και από την προφανή (λόγω συμμετρίας) ισότητα BE=BG , συμπεραίνουμε ότι BE = BF = BG = BD, οπότε το τετράπλευρο DEFG είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο το B.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε σημείο A του επιπέδου και τρεις ευθείες που περνούν από αυτό και χωρίζουν το επίπεδο σε 6 τομείς. Σε κάθε τομέα υπάρχουν στο εσωτερικό του 5 σημεία. Υποθέτουμε ότι τα 30 σημεία που βρίσκονται στους 6 τομείς είναι ανά τρία μη συνευθειακά. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 1000 τρίγωνα με κορυφές τα σημεία αυτά (των 6 τομέων) το οποία περιέχουν το A είτε στο εσωτερικό τους είτε στις πλευρές τους.

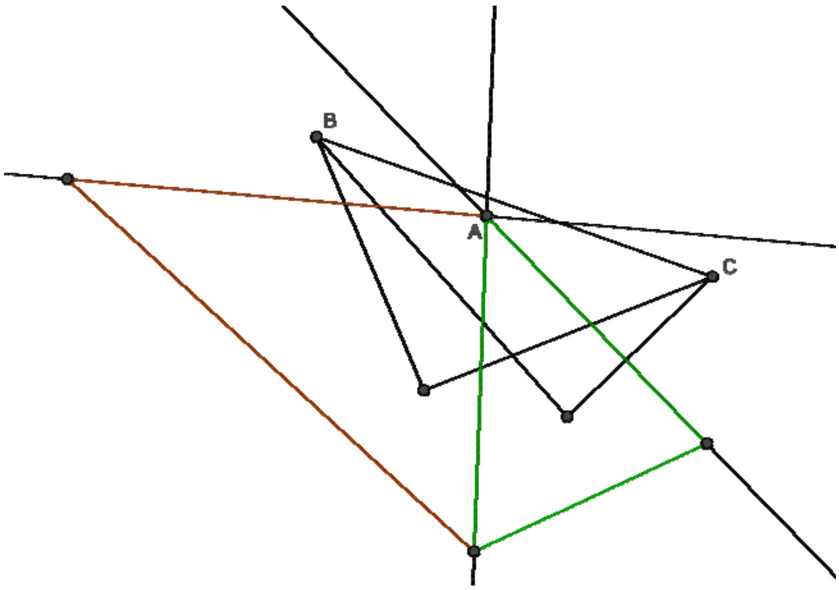
Λύση

Παρατηρούμε αρχικά ότι οποιαδήποτε για οποιαδήποτε επιλογή 6 σημείων, ένα από κάθε τομέα, δημιουργείται ένα εξάγωνο (κυρτό ή μη κυρτό) το οποίο περιέχει το σημείο A.



Σχήμα 2

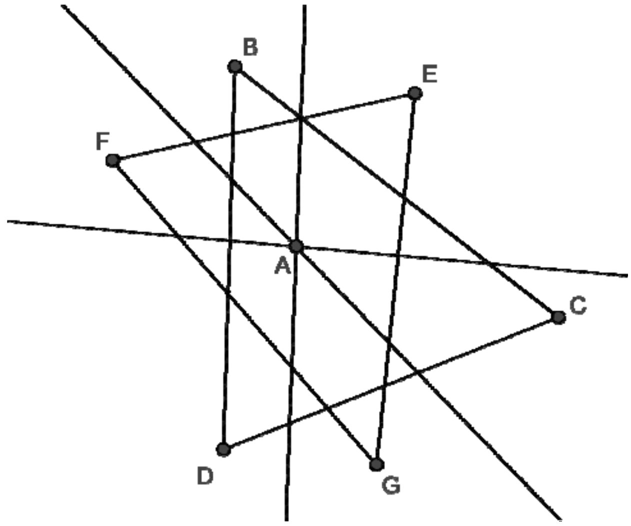
Από τα 6 αυτά σημεία δημιουργούνται $\binom{6}{3}=20$ τρίγωνα σε σύνολο. Θα υπολογίσουμε πόσα τουλάχιστον από αυτά περιέχουν το σημείο Α. Αν έχω δύο σημεία από κατά κορυφή τομείς, τότε παρατηρώ ότι έχω επιλογή για την τρίτη κορυφή του τριγώνου από δύο τομείς. Για παράδειγμα, για τα σημεία B, C του παρακάτω σχήματος, όποιο σημείο και πάρουμε από τον κόκκινο ή τον πράσινο τομέα έχουμε τρίγωνο που περιέχει το σημείο A.



Σχήμα 3

Υπάρχουν 3 ζεύγη κατά κορυφή τομέων, επομένως και έχουμε $5\cdot 5$ επιλογές για τη βάση BC και η τρίτη κορυφή επιλέγεται με $2\cdot 5$ τρόπους. Επομένως έχουμε συνολικά τουλάχιστον $3\cdot 2\cdot 5^3 = 6\cdot 5^3$ τέτοια τρίγωνα που περιέχουν το A .

Αν τώρα έχω κορυφές σε εναλλάξ τομείς (όπως φαίνεται παρακάτω), τότε πάλι έχω τρίγωνο που περιέχει το σημείο A. Αυτά μπορεί να είναι είτε σαν το CBD είτε σαν το EFG.



Σχήμα 4

Σαν το CBD υπάρχουν $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο A και σαν το EFG υπάρχουν επίσης $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο A. Συνολικά σε αυτή την περίπτωση έχουμε $2 \cdot 5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο A.

Αθροίζοντας, έχουμε τουλάχιστον $6 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^3 = 8 \cdot 5^3 = 1000$ τρίγωνα τα οποία περιέχουν το A είτε στο εσωτερικό τους είτε πάνω στις πλευρές τους.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν όλες οι τριάδες ακεραίων (a,b,c) με $a > 0 > b > c,$ που έχουν άθροισμα ίσο με μηδέν και ο αριθμός $\mathrm{N} = 2017 - a^3b - b^3c - c^3a$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

Αφού $a+b+c=0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a^3b+b^3c+c^3a &= a^3b+b^3(-a-b)+(-a-b)^3a = -b^4-2b^3a-3a^2b^2-2a^3b-a^4 = \\ &= -(a^2+ab+b^2)^2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Επομένως, αν $2017-a^3b-b^3c-c^3a=k^2$, τότε

$$2017+(a^2+ab+b^2)^2 = k^2 \Leftrightarrow (k-a^2-ab-b^2)(k+a^2+ab+b^2) = 2017 \qquad (2)$$

Αφού ο 2017 είναι πρώτος, θα πρέπει

$$\begin{cases} k-a^2-ab-b^2=1 \\ k+a^2+ab+b^2=2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k-a^2-ab-b^2=1 \\ 2k=2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ab+b^2=1008 \\ k=1009 \end{cases} \qquad (3)$$

Για να ισχύει

$$a^2+ab+b^2=1008 \qquad (4)$$

πρέπει οι a,b να είναι και οι δύο άρτιοι, διαφορετικά, το αριστερό μέλος είναι περιττός. Επιπλέον, έχουμε ότι $9|1008$, άρα $9|a^2+ab+b^2$, οπότε πρέπει $3|a$ και $3|b$. Επομένως. οι a,b διαιρούνται από 6, οπότε γράφουμε $a=6m$ και $b=6n$, οπότε η (1) γίνεται

$$m^2+mn+n^2=28 \qquad (5)$$

Ομοίως, οι m,n πρέπει να είναι άρτιοι, οπότε $m=2x$ και $n=2y$. Τότε η (7) γίνεται

$$x^2+xy+y^2=7 \qquad (6)$$

Για να έχει ακέραιες λύσεις η τελευταία πρέπει η διακρίνουσα ως προς y να είναι μη αρνητική και τέλειο τετράγωνο. Όμως $\Delta=x^2-4(x^2-7)=28-3x^2$, οπότε:

$$x^2=1 \text{ ή } x^2=4 \text{ ή } x^2=9.$$

Επειδή, $a>0$ θα έχουμε $x>0$, οπότε $x\in\{1,2,3\}$. Επειδή $y<0$, παίρνουμε τα ζεύγη $(x,y)\in\{(1,-3),(2,-3),(3,-2),(3,-1)\}$, οπότε, αφού $a=12x,\ b=12y$ έχουμε ότι

$$(a,b)\in\{(12,-36),\ (24,-36,\ ),\ (36,-24),(36,-12)\}$$

Λόγω του ότι $a+b+c=0$ και του περιορισμού $a>0>b>c$, έχουμε τη μοναδική λύση

$$(a,b,c)=(36,-12,-24).$$

Πρόβλημα 4. Έστω ξ η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2+x-4=0$. Το πολυώνυμο $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, όπου n θετικός ακέραιος, έχει συντελεστές μη αρνητικούς ακέραιους και αριθμητική τιμή $P(\xi)=2017$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $a_0+a_1+...+a_n\equiv 1(\bmod 2)$

(ii) Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος: $a_0+a_1+...+a_n$.

Λύση

(i) Επειδή ο αριθμός $\xi=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ είναι άρρητος και το πολυώνυμο $F(x)=P(x)-2017$ έχει ρητούς συντελεστές και ρίζα τον αριθμό ξ, θα έχει ρίζα και τον συζυγή του $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$, οπότε θα διαιρείται με το πολυώνυμο $\varphi(x)=x^2+x-4$.

Αυτό προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα της διαίρεσης

$$F(x)=P(x)-2017=(x^2+x-4)Q(x)+\kappa x+\lambda,$$

Από την οποία για $x=\xi$ λαμβάνουμε $\kappa\xi+\lambda=0$, από την οποία προκύπτει ότι $\kappa=\lambda=0,$ αφού ο αριθμός ξ είναι άρρητος.

Άρα υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο ώστε:

$$F(x)=P(x)-2017=(x^2+x-4)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0-2017=(x^2+x-4)Q(x) \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1) για $x=1$ λαμβάνουμε:

$$a_0 + a_1 + ... + a_n - 2017 = -2Q(1)$$
$$\Rightarrow a_0 + a_1 + ... + a_n = 2017 - 2Q(1) \equiv 1 \pmod 2$$

(ii) Θεωρούμε το σύνολο $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ με στοιχεία μη αρνητικούς ακέραιους που ικανοποιούν τα παρακάτω:

(α) $a_n \xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + ... + a_1 \xi + a_0 = 2017$

(β) το άθροισμα $a_0 + a_1 + ... + a_n$ είναι το ελάχιστο δυνατό.

Παρατηρούμε πρώτα ότι αληθεύει η σχέση:

$$0 \le a_i \le 3, \text{ για κάθε } i = 1, 2, ..., n-2.$$

Πράγματι, αν ήταν διαφορετικά για κάποιο $i = 1, 2, ..., n-2$, τότε το σύνολο

$$\{a_0, ..., a_{i-1}, a_i - 4, a_{i+1} + 1, a_{i+2} + 1, a_{i+3}, ... a_n\}$$

θα είχε στοιχεία μη αρνητικούς ακέραιους, θα ικανοποιούσε τη σχέση (α), ενώ θα είχε άθροισμα στοιχείων μικρότερο από αυτό του συνόλου $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$, που είναι άτοπο.

Έστω τώρα $Q(x) = b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$. Τότε από την ταυτότητα

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 - 2017 = (x^2 + x - 4)(b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + ... + b_1 x + b_0)$$

προκύπτουν οι ισότητες:

$$\left\{\begin{array}{ll} a_0 - 2017 & = -4b_0 \\ a_1 & = -4b_1 + b_0 \\ a_2 & = -4b_2 + b_1 + b_0 \\ a_3 & = -4b_3 + b_2 + b_1 \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n-2} & = -4b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4} \\ a_{n-1} & = b_{n-2} + b_{n-3} \\ a_n & = b_{n-2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a_0 - 2017 & = -4b_0 \\ a_1 - b_0 & = -4b_1 \\ a_2 - b_1 - b_0 & = -4b_2 \\ a_3 - b_2 - b_1 & = -4b_3 \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n-2} - b_{n-3} - b_{n-4} & = -4b_{n-2} \\ a_{n-1} - b_{n-2} & = b_{n-3} \\ a_n & = b_{n-2} \end{array}\right\}$$

Γενικά ισχύει ότι: $a_{i+2} - b_{i+1} - b_i = -4b_{i+2}$, για κάθε $i = 0, 1, ..., n-4$

Επειδή είναι $0 \le a_i \le 3$, για κάθε $i = 1, 2, ..., n-2$, από την πρώτη εξίσωση από τις παραπάνω προκύπτει ότι $a_0 = 1$ και $b_0 = 504$. Από τη δεύτερη εξίσωση λαμβάνουμε $a_1 = 0$ και $b_1 = 126$. Από την τρίτη εξίσωση λαμβάνουμε $a_2 = 2$ και $b_2 = 157$. Συνεχίζοντας ομοίως λαμβάνουμε τα σύνολα

$$\{b_0, b_1, b_2, ... b_{14}\} = \{504, 126, 157, 70, 56, 31, 21, 13, 8, 5, 3, 2, 1, 0, 0\}$$
$$\{a_0, a_1, a_2, ... a_{14}\} = \{1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 3,\ 0,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 1\}$$

Επομένως η ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $a_0 + a_1 + ... + a_n$ είναι **23.**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μεγάλων τάξεων

Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n),\, n \in \mathbb{N}^*$, που ορίζεται αναδρομικά από τη σχέση $x_{n+1} = 3x_n^3 + x_n$, με $x_1 = \frac{a}{b}$, όπου a, b είναι θετικοί ακέραιοι και ο 3 δεν διαιρεί τον ακέραιο b. Αν για κάποιο θετικό ακέραιο m ο x_m είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού, να αποδείξετε ότι και ο x_1 είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Θα δείξουμε ότι αν ο x_{n+1} είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, τότε και ο x_n είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, οπότε επαγωγικά θα πάρουμε το ζητούμενο.
Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι αφού ο 3 δεν διαιρεί τον b, δεν θα διαιρεί κανέναν παρονομαστή όρου της ακολουθίας.

Από την αναδρομική σχέση έχουμε $x_m = 3x_{m-1}^3 + x_{m-1}$. Θέτουμε $x_{m-1} = \frac{p}{q}$ όπου ο q δεν διαιρείται με 3 (*) και $(p, q) = 1$. Τότε

$$x_m = 3x_{m-1}^3 + x_{m-1} = \frac{3p^3 + pq^2}{q^3} = \frac{p(3p^2 + q^2)}{q^3}.$$

Αφού $(p, q) = 1$, αυτή είναι η ανάγωγη μορφή του x_m. Πράγματι, οι αριθμοί $p(3p^2 + q^2)$, q^3 είναι πρώτοι μεταξύ τους, αφού αν ένας πρώτος s διαιρεί και τους δύο, τότε $s \mid q^3 \Rightarrow s \mid q$ και $s \mid 3p^2 + q^2$ τότε $s \mid 3p^2$. Αφού όμως s δεν διαιρεί τον p, θα έχουμε $s \mid 3 \Rightarrow s = 3$, $3 \mid q$, άτοπο από την (*).
Από την εκφώνηση ο x_m είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, οπότε θα πρέπει ο αριθμητής και ο παρονομαστής να είναι τέλεια τετράγωνα.
Για να είναι ο παρονομαστής τέλειο τετράγωνο, πρέπει ο q να είναι τέλειο τετράγωνο, έστω $q = a^2$. Για να είναι ο αριθμητής τέλειο τετράγωνο, έστω $p(3p^2 + q^2) = \kappa^2$, πρέπει και οι δύο παράγοντες να είναι τέλεια τετράγωνα αφού είναι σχετικά πρώτοι.
Πράγματι, αν ένας πρώτος t διαιρεί τον p και τον $3p^2 + q^2$, τότε $t \mid q$, που είναι άτοπο αφού $(p, q) = 1$.

Έτσι $p = b^2$, $2p^2 + q^2 = c^2$. Επομένως $x_{m-1} = \frac{p}{q} = \frac{b^2}{a^2}$, άρα ο x_{m-1} είναι τέλειο τετράγωνο ρητού.

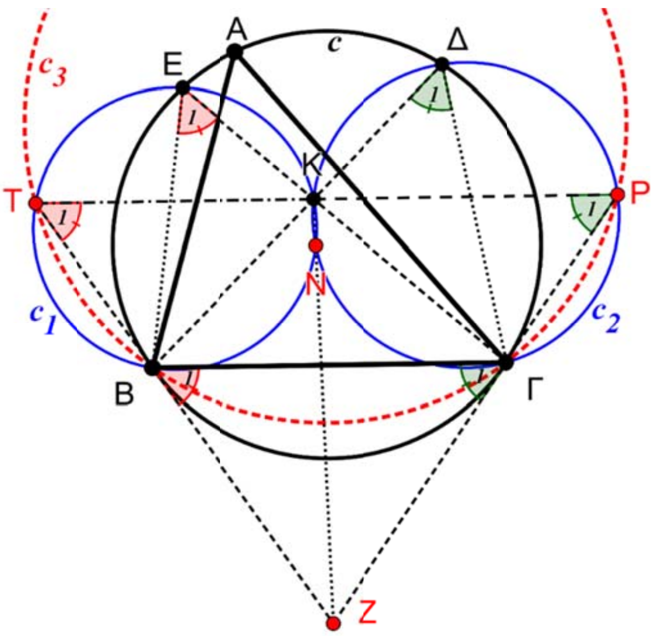
Όμοια τώρα, πηγαίνοντας προς τα πίσω δείχνουμε ότι ο x_{m-2} είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, κ.ο.κ μέχρι να φτάσουμε στον x_1.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του c με κέντρο O και ακτίνα R. Στα μικρά τόξα $\mathrm{A\Gamma}$ και AB θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Έστω K είναι το σημείο τομής των $\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Gamma E}$ και N είναι το δεύτερο κοινό σημείο των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων BKE, έστω c_1, και $\mathrm{\Gamma K\Delta}$ (έστω c_2). Να αποδείξετε ότι: τα σημεία $\mathrm{A, K, N}$ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν, το σημείο K ανήκει στη συμμετροδιάμεσο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, που αντιστοιχεί στην κορυφή A.

Σημείωση: *Συμμετροδιάμεσος τριγώνου είναι η συμμετρική ευθεία της διαμέσου ως προς τη διχοτόμο που περνάει από την ίδια κορυφή με τη διάμεσο*

Λύση



Σχήμα 1

1ος Τρόπος

Έστω K το σημείο τομής των $\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Gamma E}$ και N το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων c_1, c_2. Έστω ακόμη Z το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία $\mathrm{B, \Gamma}$ του κύκλου c. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $\mathrm{K, N, Z}$ είναι συνευθειακά.

Σημειώνουμε με T τη τομή της BZ με τον c_1 και P τη τομή της $\mathrm{Z\Gamma}$ με τον c_2, τότε θα ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$\hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\mathrm{T}}_1$: (εγγεγραμμένες στο κύκλο c_1 και βαίνουν στο ίδιο τόξο BK)

$\hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1$: (η $\hat{\mathrm{B}}_1$ δημιουργείτε από τη χορδή $\mathrm{B\Gamma}$ και την εφαπτομένη BZ στο κύκλο c)

$\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{P}}_1$: (εγγεγραμμένες στο κύκλο c_2 και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\mathrm{\Gamma K}$)

$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1$: (η $\hat{\Gamma}_1$ είναι γωνία της χορδής $\mathrm{B\Gamma}$ και την εφαπτομένης ΓZ στο κύκλο c)

$$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 : \text{ (οι } ZB \text{ και } Z\Gamma \text{ είναι εφαπτόμενες στο κύκλο } c\text{)}$$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτουν τα εξής:

$$\hat{B}_1 = \hat{T}_1 \text{ , άρα } KT//B\Gamma \text{ και } \hat{\Gamma}_1 = \hat{P}_1 \text{, άρα } KP//B\Gamma .$$

Επομένως το τετράπλευρο $B\Gamma PT$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια εγγράψιμο σε κύκλο (έστω c_3).

Άρα η κοινή χορδή KN των κύκλων c_1 και c_2 θα διέρχεται από το ριζικό κέντρο Z των κύκλων c_1, c_2, c_3.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα σημεία A, K, N είναι συνευθειακά, τότε (επειδή και τα σημεία K, N, T είναι συνευθειακά) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, K, N, T είναι συνευθειακά , δηλαδή τα σημεία A, K, N θα ανήκουν στη συμμετροδιάμεσο AT.

Αντίστροφα τώρα, αν υποθέσουμε ότι το σημείο K ανήκει στη συμμετροδιάμεσο AT, τότε τα σημεία A, K, T θα είναι συνευθειακά. Οπότε (επειδή και τα σημεία K, N, T είναι συνευθειακά) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, K, N είναι συνευθειακά.

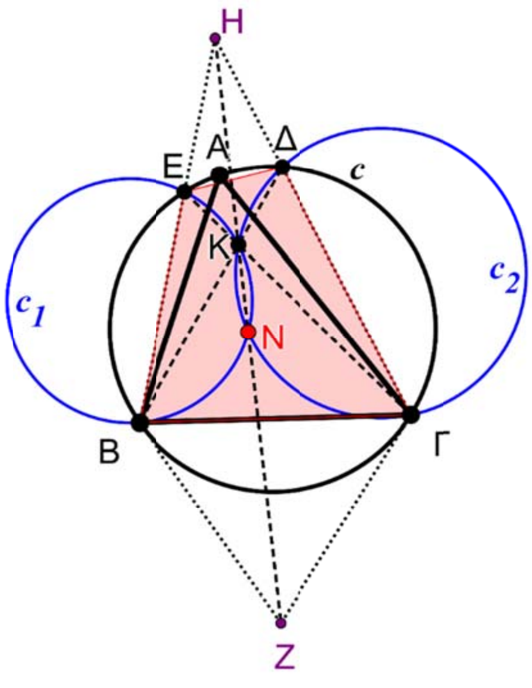
2ος Τρόπος

Έστω K το σημείο τομής των $B\Delta$, ΓE και N το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων c_1, c_2. Έστω ακόμη Z το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία B, Γ του κύκλου c. Αν H είναι το σημείο τομής των EB και $\Delta\Gamma$, θα αποδείξουμε ότι τα σημεία K, N, Z, H είναι συνευθειακά.

Από την εφαρμογή του θεωρήματος Pascal στο εκφυλισμένο εξάγωνο $BB\Gamma\Gamma\Delta E$, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία H, K, Z είναι συνευθειακά.

Το σημείο H έχει την ίδια δύναμη ως προς το κύκλο c. Δηλ. $HE \cdot HB = H\Delta \cdot H\Gamma$.

Άρα τα σημεία K, N, H είναι συνευθειακά. Οπότε τα σημεία K, N, Z, H είναι συνευθειακά.



Σχήμα 2

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{K}, \mathrm{N}$ είναι συνευθειακά, το σημείο K θα ανήκει στην συμμετροδιάμεσο AZ.

Αντίστροφα, αν το K ανήκει στην συμμετροδιάμεσο AZ τότε τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{K}, \mathrm{N}$ είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3
(α) Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί n, m με $n < m$ και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα P με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού το πολύ n, για τα οποία ισχύει η ισότητα

$$|P(a_i) - P(a_j)| = |a_i - a_j|, \ (1)$$

για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq m$.
(β) Δίνονται φυσικοί αριθμοί $m, n \geq 2$ με $n < m$. Να εξετάσετε αν υπάρχει πολυώνυμο Q με πραγματικούς συντελεστές βαθμού n καθώς και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$, τέτοιοι ώστε

$$|Q(a_i) - Q(a_j)| < |a_i - a_j|,$$

για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq m$.

Λύση

(α) Θα ασχοληθούμε πρώτα με το ερώτημα (α). Λόγω της συμμετρίας υποθέτουμε ότι $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$ και για ευκολία θέτουμε $d_i = P(a_i) - P(a_{i+1})$. Τότε λόγω της (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
&|d_1| + |d_2| + \ldots + |d_{m-1}| = \\
&= |P(a_1) - P(a_2)| + |P(a_2) - P(a_3)| + \ldots + |P(a_{m-1}) - P(a_m)| \\
&= |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{m-1} - a_m| \\
&= a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{m-1} - a_m \\
&= a_1 - a_m = |a_1 - a_m| \\
&= |P(a_1) - P(a_m)| = |P(a_1) - P(a_2) + P(a_2) - P(a_3) + \ldots + P(a_{m-1}) - P(a_m)| \\
&= |d_1 + d_2 + \ldots + d_{m-1}|
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ είναι ομόσημοι. Οπότε έχουμε δύο περιπτώσεις.
1η περίπτωση: Όλοι οι $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ είναι θετικοί. Είναι Τότε από την (1) έχουμε ότι $P(a_1) - P(a_2) = a_1 - a_2 \Rightarrow P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2$. Όμοια $P(a_2) - a_2 = P(a_3) - a_3, \ldots, P(a_{m-1}) - a_{m-1} = P(a_m) - a_m$. Έπεται ότι

$$P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2 = \ldots = P(a_m) - a_m = k \ (2)$$

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) - x - k$ που είναι βαθμού το πολύ n, έχει $m > n$ διακεκριμένες ρίζες (τα $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$). Έπεται ότι το $Q(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $P(x) = x + k$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

2η περίπτωση: Όλοι οι $d_1, d_2, ..., d_{m-1}$ είναι αρνητικοί. Τότε από την (1) έχουμε ότι $-P(a_1) + P(a_2) = a_1 - a_2 \Rightarrow P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2$. Επομένως

$$P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2 = ... = P(a_m) + a_m = \lambda \quad (3)$$

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $R(x) = P(x) + x - \lambda$ που είναι βαθμού το πολύ n, έχει $m > n$ διακεκριμένες ρίζες (τα $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$). Έπεται ότι το $R(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $P(x) = -x + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επομένως δύο πολυώνυμα, το $P(x) = x + k$ και το $P(x) = -x + \lambda$ είναι τα μόνα που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος.

2ος τρόπος: Ας υποθέσουμε ότι $m \geq 3$ και ότι υπάρχουν $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$ ώστε να ισχύει:

$$P(p) - P(q) = p - q, \; P(p) - P(r) = r - p \; .$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των παραπάνω παίρνουμε ότι

$$P(r) - P(q) = 2p - q - r \; . \; (4)$$

Όμως από την συνθήκη της εκφώνησης έχουμε ότι $P(r) - P(q) = r - q$ ή $P(r) - P(q) = q - r$. Στην πρώτη περίπτωση η (4) γίνεται $2r = 2p \Rightarrow r = p$, άτοπο αφού οι $p, r \in \{a_1, ..., a_m\}$ που είναι διακεκριμένοι. Όμοια, αν $P(r) - P(q) = q - r$ τότε η (4) δίνει $q = p$, πάλι άτοπο.

Αυτό σημαίνει ότι είτε $m < 3$, είτε ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$.

1η περίπτωση: Αν $m < 3$, τότε $n = 1$ ή $n = 0$. Προφανώς η $n = 0$ απορρίπτεται αφού κανένα σταθερό πολυώνυμο δεν ικανοποιεί. Η $n = 1$ δίνει $P(x) = ax + b$, οπότε πρέπει

$$| a \cdot a_i + b - a \cdot a_j - b | = | a_i - a_j | \Leftrightarrow | a | = 1$$

οπότε $P(x) = x + b,$ ή $P(x) = -x + b$.

2η περίπτωση: Αν δεν υπάρχουν τέτοιοι $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$, τότε είτε $P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2 = ... = P(a_m) - a_m = k$, οπότε οδηγούμαστε στην 1η περίπτωση που είδαμε στον 1ο τρόπο, είτε $P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2 = ... = P(a_m) + a_m = \lambda$, οπότε οδηγούμαστε στην 2η περίπτωση που είδαμε στον 1ο τρόπο.

(β) Θα δείξουμε ότι αν $Q(x) = x^n$ και $| a_i | < \frac{1}{n}$ για κάθε $1 \leq i \leq m$ τότε ισχύει η ζητούμενη ανισότητα. Πράγματι,

$$|Q(a_i)-Q(a_j)|=|a_i^n-a_j^n|=|a_i-a_j|\cdot|a_i^{n-1}+a_i^{n-2}a_j+\ldots+a_j^{n-1}|\,(1)$$

και

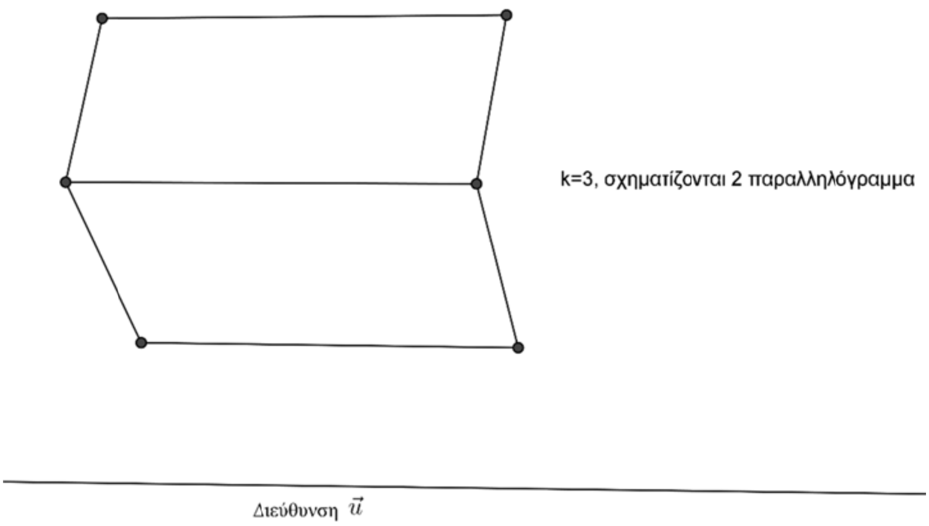
$$|a_i^{n-1}+a_i^{n-2}a_j+\ldots+a_j^{n-1}|\le|a_i^{n-1}|+|a_i^{n-2}a_j|+\ldots+|a_j^{n-1}|<\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{1}{n^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{n^{n-1}}=\frac{n}{n^{n-1}}<1$$

οπότε από την (1) έχουμε $|P(a_i)-P(a_j)|<|a_i-a_j|$.

Σημείωση: Στο δεύτερο ερώτημα υπάρχουν και άλλες πιθανές κατασκευές που μπορεί να γίνουν.

Πρόβλημα 4.
Θεωρούμε n σημεία στο επίπεδο, $n\ge 4$, ανά τρία μη συνευθειακά. Ονομάζουμε $\mathrm{A}(n)$ το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 που σχηματίζονται με κορυφές αυτά τα σημεία. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}(n)\le\dfrac{n^2-3n}{4}$, για κάθε $n\ge 4$.

Λύση
Σταθεροποιούμε μία διεύθυνση $\vec{u}$ στο επίπεδο. Σε κάθε ευθεία παράλληλη σε αυτή τη διεύθυνση μπορεί να έχουμε το πολύ δύο σημεία. Ας υποθέσουμε ότι σε ότι υπάρχουν k ζεύγη σημείων για αυτή τη διεύθυνση. Τότε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (για $k=3$), σχηματίζονται το πολύ $k-1$ παραλληλόγραμμα εμβαδού 1 με αυτά τα k ζεύγη σημείων.



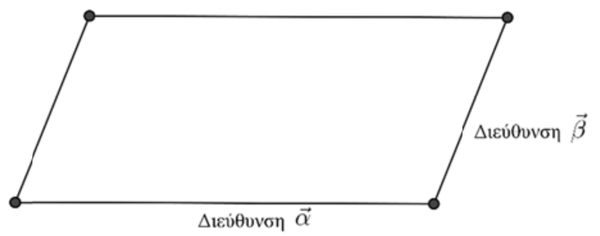
Σχήμα 3

Επομένως σε μία διεύθυνση με k ζεύγη σημείων, σχηματίζονται πολύ $k-1$ παραλληλόγραμμα εμβαδού 1. Επομένως, αν αθροίσουμε τα παραλληλόγραμμα σε όλες τις διευθύνσεις, θα πάρουμε

$$\sum(k-1)=\left(\sum k\right)-s\ ,$$

όπου s είναι το συνολικό πλήθος των διευθύνσεων στις οποίες βρίσκονται σημεία. Το άθροισμα όμως $\left(\sum k\right)$ είναι το άθροισμα όλων των τμημάτων, που είναι $\dbinom{n}{2}$.

Επομένως, το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 είναι το $\binom{n}{2} - s$. Αλλά με αυτό τον τρόπο μετρήσαμε κάθε παραλληλόγραμμο δύο φορές. Μία φορά για την διεύθυνση $\vec{\alpha}$ και μία φορά για τη διεύθυνση $\vec{\beta}$, όπως φαίνεται στο σχήμα:

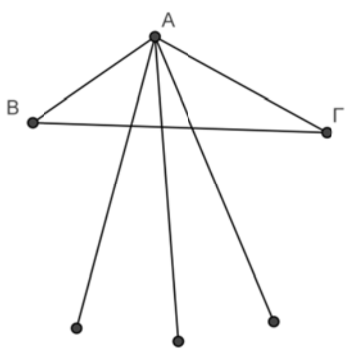


Σχήμα 4

Επομένως το συνολικό πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 είναι το πολύ

$$\frac{\binom{n}{2} - s}{2}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι αν έχουμε $n \geq 4$ σημεία στο επίπεδο, ανά τρία μη συνευθειακά, τότε το πλήθος των διευθύνσεων είναι $s \geq n$. Πράγματι ας πάρουμε τρία γειτονικά σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ (σε κυρτή θέση) όπως στο σχήμα:



Σχήμα 5

Το σημείο Α συνδέεται με $n-1$ τμήματα με τα υπόλοιπα σημεία. Όλα αυτά τα τμήμα έχουν κοινό σημείο το Α, οπότε ορίζουν $n-1$ διαφορετικές διευθύνσεις. Επιπλέον το τμήμα ΒΓ δεν είναι παράλληλο σε κανένα από αυτά τα τμήματα, αφού τα τέμνει όλα, άρα ορίζει μία ακόμη διεύθυνση. Επομένως έχουμε τουλάχιστον $n-1+1=n$ διαφορετικές διευθύνσεις, οπότε το πλήθος των παραλληλογράμμων είναι το πολύ

$$\frac{\binom{n}{2} - n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{4}.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
36η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα « Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
23 Φεβρουαρίου 2019
Θέματα και ενδεικτικές λύσεις μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία α_ν έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$\alpha_\nu = 5\alpha_{\nu-1} + 3^{\nu-1},\ \nu \geq 2.$$

Να υπολογίσετε το γενικό όρο α_ν και να βρείτε τη μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον όρο a_k, όπου $k = 2^{2019}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Σύμφωνα με τον ορισμό της ακολουθίας έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 5\alpha_1 + 3 \\ \alpha_3 = 5\alpha_2 + 3^2 \\ \alpha_4 = 5\alpha_3 + 3^3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{\nu-1} = 5\alpha_{\nu-2} + 3^{\nu-2} \\ \alpha_\nu = 5\alpha_{\nu-1} + 3^{\nu-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5^{\nu-1}\alpha_1 = 5^{\nu-1} \\ 5^{\nu-2}\alpha_2 = 5^{\nu-1}\alpha_1 + 5^{\nu-2}\cdot 3 \\ 5^{\nu-3}\alpha_3 = 5^{\nu-2}\alpha_2 + 5^{\nu-3}\cdot 3^2 \\ 5^{\nu-4}\alpha_4 = 5^{\nu-3}\alpha_3 + 5^{\nu-4}\cdot 3^3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 5\alpha_{\nu-1} = 5^2\alpha_{\nu-2} + 5\cdot 3^{\nu-2} \\ \alpha_\nu = 5\alpha_{\nu-1} + 3^{\nu-1} \end{array}\right\} \overset{\substack{\text{πρόσθεση} \\ \text{κατά μέλη}}}{\Rightarrow}$$

$$\alpha_\nu = 5^{\nu-1} + 5^{\nu-2}\cdot 3 + 5^{\nu-3}\cdot 3^2 + 5^{\nu-4}\cdot 3^3 + \dots + 5\cdot 3^{\nu-2} + 3^{\nu-1} = \frac{5^\nu - 3^\nu}{5-3} = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right),$$

για κάθε $\nu = 1, 2, 3, \dots$.

Διαφορετικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\alpha_\nu = 5^{\nu-1}\cdot\left[1 + \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{5}\right)^{\nu-1}\right] = 5^{\nu-1}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^\nu}{1-\frac{3}{5}}$$

$$= 5^{\nu-1}\cdot\frac{5}{2\cdot 5^\nu}\left(5^\nu - 3^\nu\right) = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right),\ \text{για κάθε } \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Επομένως έχουμε: $\alpha_\nu = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right)$, για κάθε $\nu = 1, 2, 3, \dots$

Για την εύρεση του γενικού όρου, εναλλακτικά μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:
Από τον ορισμό της ακολουθίας διαπιστώνουμε ότι:

$$\alpha_1 = 1 = \frac{1}{2}\left(5-3\right),\ \alpha_2 = 5\cdot 1 + 3 = 8 = \frac{1}{2}\left(5^2 - 3^2\right),\ \alpha_3 = 5\cdot 8 + 3^2 = 49 = \frac{1}{2}\left(5^3 - 3^3\right), ..$$

Ισχυριζόμαστε ότι πρέπει να ισχύει $\alpha_\nu = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right)$, για κάθε $\nu = 1,2,3,\ldots$, το οποίο αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή.

Τώρα για $k = 2^{2019}$, χρησιμοποιώντας διαδοχικά την ταυτότητα διαφοράς τετραγώνων, έχουμε

$$2a_k = 5^{2^{2019}} - 3^{2^{2019}} = 2\cdot(5+3)(5^2+3^2)...(5^{2^{2018}} + 3^{2^{2018}}),$$

οπότε

$$a_k = (5+3)(5^2+3^2)...(5^{2^{2018}} + 3^{2^{2018}}).$$

Παρατηρούμε τώρα, ότι εκτός από την πρώτη παρένθεση που διαιρείται από 8, όλες οι άλλες παρενθέσεις διαιρούνται από το 2 αλλά όχι από το 4.

Πράγματι, ισχύει ότι: $5^{2^\nu} \equiv 1\left(\bmod 4\right)$ και $3^{2^\nu} \equiv 1\left(\bmod 4\right) \Rightarrow 5^{2^\nu} + 3^{2^\nu} \equiv 2\left(\bmod 4\right)$, για κάθε $\nu \geq 1$.

Οι παρενθέσεις από το $5^2 + 3^2$ μέχρι το $(5^{2^{2018}} + 3^{2^{2018}})$, είναι συνολικά 2018, οπότε η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον αριθμό είναι $2^3 \cdot \underbrace{2^1 \cdot \ldots \cdot 2^1}_{2018\ \text{το πλήθος}} = 2^{2021}$.

Εναλλακτικά θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει μία ειδική μορφή του λήμματος ανύψωσης του εκθέτη (Lifting the Exponent Lemma) το οποίο αφορά το μέγιστο εκθέτη της δύναμης του 2 που διαιρεί μία διαφορά δυνάμεων με βάσεις ακέραιους. Σημειώνουμε με $\upsilon_p\left(\alpha\right)$ το μέγιστο εκθέτη της δύναμης του πρώτου θετικού ακέραιου p που διαιρεί τον ακέραιο α, δηλαδή ισχύει ότι: $p^{\upsilon_p(a)} \mid \alpha$ *και* $p^{\upsilon_p(a)+1}$ δεν διαιρεί το α.

Λήμμα: Έστω α, β δύο περιττοί ακέραιοι και ν ένας άρτιος θετικός ακέραιος. Τότε ισχύει ότι:

$$\upsilon_2\left(\alpha^\nu - \beta^\nu\right) = \upsilon_2\left(\alpha - \beta\right) + \upsilon_2\left(\alpha + \beta\right) + \upsilon_2\left(\nu\right) - 1$$

Απόδειξη.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι το τετράγωνο περιττού ακέραιου είναι της μορφής $4\kappa + 1$, οπότε ο ακέραιος 4 διαιρεί τη διαφορά $\alpha^2 - \beta^2$. Αν ο ν γράφεται στη μορφή $\nu = \mu \cdot 2^\kappa$, τότε:

$$\upsilon_2\left(\alpha^\nu - \beta^\nu\right) = \upsilon_2\left(\alpha^{\mu\cdot 2^\kappa} - \beta^{\mu\cdot 2^\kappa}\right) = \upsilon_2\left(\left(\alpha^2\right)^{2^\kappa} - \left(\beta^2\right)^{2^\kappa}\right) =$$

$$\ldots = \upsilon_2\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + \kappa - 1 = \upsilon_2\left(\alpha - \beta\right) + \upsilon_2\left(\alpha + \beta\right) + \upsilon_2\left(\nu\right) - 1.$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω λήμμα για τον ακέραιο $2a_{2^{2019}} = 5^{2^{2019}} - 3^{2^{2019}}$ λαμβάνουμε:

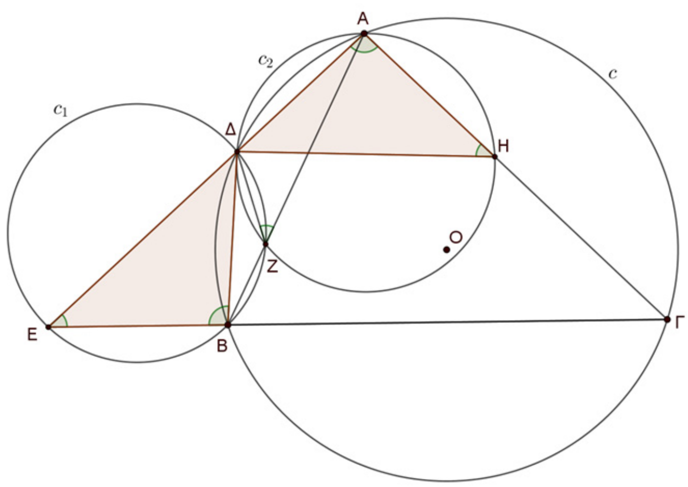
$$\upsilon_2\left(2a_{2^{2019}}\right) = \upsilon_2\left(5^{2^{2019}} - 3^{2^{2019}}\right) = \upsilon_2\left(5-3\right) + \upsilon_2\left(5+3\right) + \upsilon_2\left(2^{2019}\right) - 1 = 1 + 3 + 2019 - 1 = 2022,$$

οπότε τελικά έχουμε: $\upsilon_2\left(a_k\right) = 2021$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ και έστω Δ το μέσο του μικρού τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΔΕ (έστω c_1) τέμνει την ΑΒ (για δεύτερη φορά) στο σημείο Ζ. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΔΖ (έστω c_2) τέμνει (για δεύτερη φορά) την ΑΓ στο σημείο Η να αποδείξετε ότι $BE = AH$.

Λύση (1^ος^ τρόπος)



Σχήμα 1

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΔΒΓ έχουμε ότι:

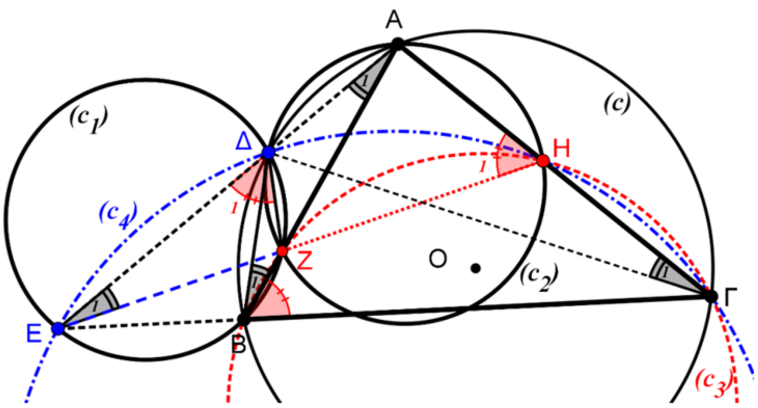
$$\Delta\hat{A}H = \Delta\hat{B}E \qquad (1)$$

Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα ΑΕΒΖ και ΑΔΖΗ προκύπτουν οι ισότητες γωνιών:

$$A\hat{E}B = \Delta\hat{Z}A = A\hat{H}\Delta \qquad (2)$$

Επειδή το Δ είναι το μέσο του μικρού τόξου ΑΒ, έπεται ότι: $A\Delta = \Delta B$. Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) και την ισότητα $A\Delta = \Delta B$ συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΔΕΒ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τις πλευρές ΒΕ και ΑΗ ίσες.

2^ος^ τρόπος



Σχήμα 2

Εφόσον το σημείο Δ είναι το μέσο του μικρού τόξου AB, θα ισχύουν οι ισότητες:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \frac{\widehat{\Gamma}}{2}.$$

Άρα οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους διότι η (κοινή) χορδή ΔZ φαίνεται υπό ίσες γωνίες $(\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1)$.

Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι τα τμήματα BE, AH (που είναι χορδές των ίσων κύκλων (c_1) και (c_2)) είναι ίσα μεταξύ τους, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες, δηλαδή ότι $\widehat{BZE} = \widehat{AZH}$ ή ότι τα σημεία E, Z, H είναι συνευθειακά.

Στο τρίγωνο ΑΕΓ, το σημείο Ζ είναι το σημείο Miquel του τριγώνου, ως σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων ΒΕΔ, ΑΗΔ. Επομένως το τετράπλευρο ΒΖΗΓ είναι και αυτό εγγεγραμμένο σε κύκλο έστω (c_3). Αυτό προκύπτει εύκολα και από ισότητες γωνιών.

Θεωρούμε τώρα τους κύκλους (c), (c_2) και (c_3). Οι κοινές χορδές τους συντρέχουν στο ριζικό τους κέντρο. Οι κοινές χορδές τους όμως είναι οι ΑΔ, ΖΗ, ΒΓ, οπότε αυτές συντρέχουν. Έπεται ότι η ΖΗ περνά από το σημείο Ε, που είναι το ζητούμενο.

Εναλλακτικά μπορούμε να αποφύγουμε τη χρήση του σημείου Miquel ως εξής. Έχουμε

$$\widehat{ZB\Gamma} \overset{\text{εξωτερική στο } BZ\Delta E}{=} \widehat{E\Delta Z} \overset{\text{εξωτερική στο } A\Delta ZH}{=} \widehat{AHZ},$$

οπότε το τετράπλευρο ΒΖΗΓ είναι και αυτό εγγεγραμμένο σε κύκλο έστω (c_3). Από το θεώρημα της δύναμης σημείου Ε ως προς κύκλο (c) έχουμε $EB \cdot E\Gamma = E\Delta \cdot EA$

Όμως το αριστερό μέλος είναι η δύναμη του Ε ως προς τον (c_3) και το δεξί μέλος είναι η δύναμη του Ε ως προς τον (c_2). Έπεται ότι το Ε ανήκει στον ριζικό άξονα αυτών των δύο κύκλων, που είναι η κοινή τους χορδή ΖΗ, δηλαδή το Ε ανήκει ΖΗ, που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλα τα ζεύγη (x, y) θετικών ρητών αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση

$$yx^y = y+1$$

Λύση

Θέτουμε $y = \frac{p}{q}$, σε ανάγωγη μορφή με $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p,q)=1$. Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$x^{\frac{p}{q}} = \frac{y+1}{y} = \frac{\frac{p}{q}+1}{\frac{p}{q}} = \frac{p+q}{p},$$

Και υψώνοντας και τα δύο μέλη στην $\frac{q}{p}$ παίρνουμε:

$$x = \sqrt[p]{\frac{(p+q)^q}{p^q}}.$$

Επειδή το αριστερό μέλος είναι ρητός, θα πρέπει το ίδιο να ισχύει και για το δεξί μέλος. Επιπλέον $(p+q,p)=1$, οπότε θα πρέπει ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι τέλειες p δυνάμεις. Άρα πρέπει

$$p+q=a^p \quad και \quad p=b^p\,, \quad a,b\in\mathbb{N}^*, a>1$$

Αν όμως $b\geq 2$, έχουμε ότι $b^p\geq 2^p>p$, οπότε πρέπει $b=1$, άρα $p=1$ και $q=a-1$. Επομένως τα ζεύγη λύσεων δίνονται παραμετρικά

$$(x,y)=\left(a^{a-1},\,\frac{1}{a-1}\right),\ a\in\mathbb{N}^*, a>1\ .$$

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε ορθογώνιο $\nu\times\mu$, με $\nu\leq\mu$, το οποίο υποδιαιρούμε με παράλληλες ευθείες προς τις πλευρές του σε $\nu\mu$ μοναδιαία τετράγωνα. Αρχικά τοποθετούμε από ένα μαύρο πιόνι σε N μοναδιαία τετράγωνα και στη συνέχεια προσπαθούμε να γεμίσουμε τον πίνακα με μαύρα πιόνια εκτελώντας την παρακάτω επιτρεπόμενη κίνηση:

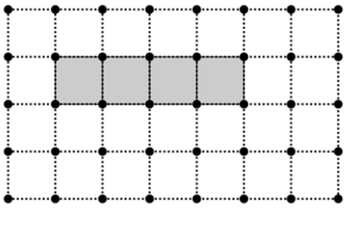
Αν ένα κενό μοναδιαίο τετράγωνο έχει κοινή πλευρά με δύο τουλάχιστον μοναδιαία τετράγωνα κατειλημμένα με μαύρο πιόνι, τότε τοποθετούμε και σε αυτό το μοναδιαίο τετράγωνο ένα μαύρο πιόνι.

Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού N των μαύρων πιονιών που πρέπει και αρκεί να υπάρχουν σε μία αρχική τοποθέτηση, έτσι ώστε μετά από πεπερασμένο πλήθος διαδοχικών εφαρμογών της επιτρεπόμενης κίνησης να γεμίσει το ορθογώνιο με μαύρα πιόνια.

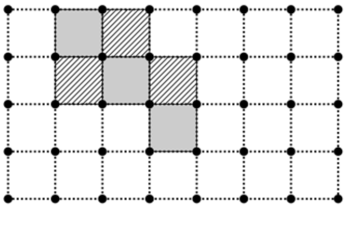
Λύση

Αριθμούμε τις γραμμές του ορθογωνίου από το 1 μέχρι το ν και τις στήλες από το 1 μέχρι το μ.

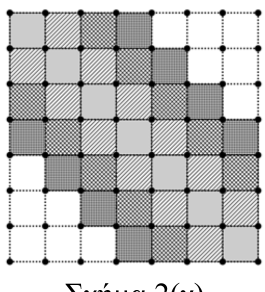
Για $\nu=\mu$ το ορθογώνιο είναι τετράγωνο $\nu\times\nu$, ενώ για $\nu<\mu$ το ορθογώνιο αποτελείται από ένα τετράγωνο $\nu\times\nu$ και από ένα ορθογώνιο $\nu\times(\mu-\nu)$. Παρατηρούμε ότι δύο διπλανά τετράγωνα της ίδιας γραμμής ή της ίδιας στήλης με μαύρα πιόνια δεν δίνουν την δυνατότητα πλήρωσης κάποιου άλλου μοναδιαίου τετραγώνου. Όταν όμως είναι διαδοχικά στην ίδια μεγάλη ή μικρή διαγώνιο τότε δίνουν τη δυνατότητα πλήρωσης δύο μοναδιαίων τετραγώνων, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 2(α)



Σχήμα 2(β)



Σχήμα 2(γ)

Έτσι για την περίπτωση με $\nu=\mu$, αν τοποθετήσουμε στη κύρια διαγώνιο του τετραγώνου ν μαύρα πιόνια, τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι με διαδοχικές κινήσεις μπορούμε να γεμίσουμε το τετράγωνο με μαύρα πιόνια.

Αν υποθέσουμε ότι $\nu < \mu$, τότε στο $\nu \times \nu$ τετράγωνο τοποθετούνε ξανά στη διαγώνιο τα ν μαύρα πιόνια, οπότε μπορούμε να γεμίσουμε το $\nu \times \nu$ τετράγωνο με μαύρα πιόνια. Στη συνέχεια διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\mu-\nu$ περιττός, δηλαδή αν οι μ, ν είναι ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός, τοποθετούμε στην τομή της $\nu+1-$στήλης με τη $\nu-$οστή γραμμή ένα μαύρο πιόνι. Με αυτό το τετράγωνο μπορούμε πλέον να γεμίσουμε τη $(\nu+1)-$στήλη με μαύρα πιόνια. Κάνουμε το ίδιο και για τα μοναδιαία τετράγωνα $(\nu, \nu+3), \dots, (\nu, \nu+2\kappa-1)$ και σταματάμε όταν: $\nu+2\kappa-1=\mu \Leftrightarrow \mu-\nu=2\kappa-1$. Έτσι έχουμε τοποθετήσει μαύρα πιόνια στα μοναδιαία τετράγωνα $(\nu, \nu+2\kappa-1)$, για $\kappa=1,2\dots,\frac{\mu-\nu+1}{2}$ Τότε είναι εύκολο να γεμίσουμε τα ενδιάμεσα τετράγωνα της $\nu-$οστής γραμμής με μαύρα πιόνια και στη συνέχεια όλες τις στήλες του ορθογωνίου. Παρατηρούμε ότι συνολικά στην περίπτωση αυτή ο **ικανός αριθμός** μαύρων πιονιών είναι
$$\nu+\frac{\mu-\nu+1}{2}=\frac{\mu+\nu+1}{2}.$$
- Αν $\mu-\nu$ άρτιος, τοποθετούμε στην τομή της $\nu+2\kappa-$στήλης με τη $\nu-$οστή γραμμή ένα μαύρο πιόνι, για $\kappa=1,2,\dots,\frac{\mu-\nu}{2}$. Με αυτά τα τετράγωνα μπορούμε πλέον να γεμίσουμε τη $(\nu+1)-$στήλη με μαύρα πιόνια και στη συνέχεια όλες τις στήλες του ορθογωνίου. Παρατηρούμε ότι συνολικά στην περίπτωση αυτή ο **ικανός αριθμός** μαύρων πιονιών είναι
$$\nu+\frac{\mu-\nu}{2}=\frac{\mu+\nu}{2}.$$

  Για τις δύο περιπτώσεις μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό των μαύρων πιονιών που χρησιμοποιήσαμε στην ενιαία μορφή
$$\left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor.$$
  Επομένως ο ελάχιστος δυνατός αριθμός Ν πιονιών που απαιτείται για το γέμισμα του πίνακα με μαύρα πιόνια είναι:
$$\mathrm{N} \leq \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor. \qquad (1)$$

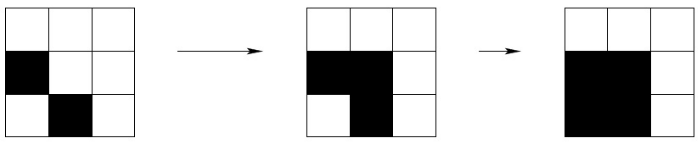
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο παραπάνω αριθμός Ν είναι και αναγκαίος για να ισχύει το ζητούμενο του προβλήματος. Ισοδύναμα, αρκεί να αποδείξουμε ότι
$$\mathrm{N} \geq \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor \qquad (2)$$
Ονομάζουμε μία πλευρά ενός μοναδιαίου τετραγώνου **ασπρόμαυρη**, αν είναι πλευρά ενός μόνο μοναδιαίου τετραγώνου που έχει μαύρο πιόνι. Για παράδειγμα ασπρόμαυρες είναι όλες οι πλευρές μοναδιαίων τετραγώνων που βρίσκονται πάνω στις πλευρές του δεδομένου ορθογωνίου. Υποθέτουμε ότι μία αρχική τοποθέτηση μαύρων πιονιών στα μοναδιαία τετράγωνα περιέχει Ν μαύρα πιόνια. Τότε ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ασπρόμαυρων πλευρών είναι 4Ν.

Σε κάθε κίνηση που εκτελούμε, αν το μοναδιαίο τετράγωνο έχει κοινή πλευρά με $\kappa \geq 2$ μοναδιαία τετράγωνα που έχουν μαύρα πιόνια, τότε στο τετράγωνο αυτό τοποθετείται μαύρο πιόνι και δημιουργούνται $4-\kappa$ ασπρόμαυρες πλευρές. Επειδή $4-\kappa \leq \kappa$, ο αριθμός των ασπρόμαυρων τετραγώνων δεν αυξάνει. Όμως σε κάθε περίπτωση πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τα ασπρόμαυρες πλευρές του ορθογωνίου που υπάρχουν στις πλευρές του ορθογωνίου, ακόμα και όταν όλα τα μοναδιαία τετράγωνα αποκτήσουν μαύρο πιόνι, και συνολικά είναι $2(\nu+\mu)$, δηλαδή πρέπει: $4\mathrm{N} \geq 2(\nu+\mu) \Rightarrow \mathrm{N} \geq \frac{\mu+\nu}{2}$. Επειδή ο N είναι ακέραιος, πρέπει $\mathrm{N} \geq \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$.

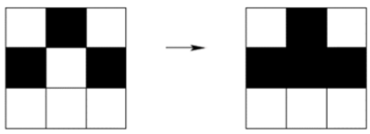
Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $\mathrm{N} = \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$.

2^{ος} τρόπος:

Θα ονομάζουμε το σύνολο όλων των μαύρων τετραγώνων «μαύρη περιοχή». Η βασική παρατήρηση είναι ότι αν ένα λευκό τετράγωνο έχει τουλάχιστον δύο μαύρα γειτονικά τετράγωνα, τότε μετά την επιτρεπόμενη κίνηση η περίμετρος της μαύρης περιοχής δεν μειώνεται, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Στο παραπάνω σχήμα αυτό η περίμετρος της μαύρης περιοχής παραμένει ίσο με 8 μετά τις δύο κινήσεις.



Στο παραπάνω σχήμα η περίμετρος στην αρχή είναι 12 και στη συνέχεια γίνεται 10, δηλαδή μειώνεται κατά 2.

Αν λοιπόν έχουμε στην αρχή N μαύρα τετράγωνα, τότε η αρχική περίμετρος της μαύρης περιοχής είναι το πολύ $4\mathrm{N}$. (Είναι ακριβώς $4\mathrm{N}$ όταν δεν υπάρχουν γειτονικά μαύρα τετράγωνα). Αν λοιπόν στο τέλος το ορθογώνιο έχει μόνο μαύρα τετράγωνα, η περίμετρος της μαύρης περιοχής είναι η περίμετρος του ορθογωνίου, δηλαδή $2\mu+2\nu$.

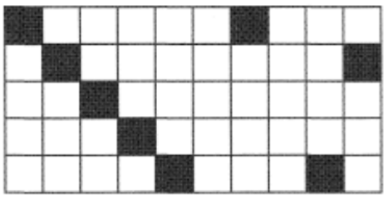
Οπότε από τη βασική παρατήρηση στην αρχική θα έχουμε:

$$4\mathrm{N} \geq \textit{αρχική περίμετρος} \geq \textit{τελική περίμετρος} = 2\mu+2\nu$$

Έπεται ότι, $\mathrm{N} \geq \dfrac{\mu+\nu}{2}$ και αφού ο N είναι ακέραιος, θα έχουμε $\mathrm{N} \geq \left\lceil \dfrac{\mu+\nu}{2} \right\rceil = \left\lfloor \dfrac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$. Θα αποδείξουμε ότι πάντα γίνεται με $\left\lfloor \dfrac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$ μαύρα τετράγωνα, οπότε αυτή θα είναι και η ελάχιστη τιμή.

Για το παράδειγμα, τοποθετούμε ν μαύρα τετράγωνα στην κύρια διαγώνιο του $\nu\times\nu$ τετραγώνου πάνω αριστερά. Στο ορθογώνιο που μένει αφήνουμε την πρώτη στήλη άδεια, στη δεύτερη βάζουμε κάπου ένα μαύρο τετράγωνο, αφήνουμε την επόμενη στήλη άδεια κοκ, μέχρι να φτάσουμε στην τελευταία στήλη όπου βάζουμε οπωσδήποτε ένα μαύρο τετράγωνο. Τοποθετούμε με αυτόν τον τρόπο άλλα $\left\lfloor \dfrac{\mu-\nu+1}{2} \right\rfloor$ μαύρα τετράγωνα, οπότε συνολικά $\nu + \left\lfloor \dfrac{\mu-\nu+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$, που είναι το ζητούμενο πλήθος.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το παράδειγμα σε ένα ορθογώνιο 5×10, όπου τοποθετήσαμε 5 μαύρα τετράγωνα στην κύρια διαγώνιο του 5×5 τετραγώνου, αφήσαμε μία στήλη κενή, στην επόμενη βάλαμε ένα μαύρο και στην συνέχεια τοποθετήσαμε και στην τελευταία.



Μένει να δικαιολογήσουμε ότι με την παραπάνω τοποθέτηση που προτείναμε, μετά από πεπερασμένες κινήσεις, όλο το ορθογώνιο θα έχει μαύρα τετράγωνα. Πράγματι, στην αρχή η κύρια διαγώνιος του $\nu\times\nu$, βήμα-βήμα κάνει μαύρα όλα τα τετράγωνα του $\nu\times\nu$ τετραγώνου και στη συνέχεια με τη βοήθεια των μαύρων που έχουμε τοποθετήσει σε στήλη παρά στήλη, κάνουν όλες τις υπόλοιπες στήλες μαύρες.