Άλγεβρα VI

Πρόοδοι

Βαγγέλης Ψύχας

Αριθμητική Πρόοδος

- Ονομάζουμε **αριθμητική πρόοδο** με πρώτο όρο τον πραγματικό αριθμό a_1 και **διαφορά** τον πραγματικό αριθμό $\omega \neq 0$, την αναδρομική ακολουθία πρώτης τάξης $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ της οποίας οι όροι ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$a_{\nu+1} = a_\nu + \omega, \qquad \nu \in \mathbb{N}^*$$

Αριθμητική Πρόοδος Ι

✧ $a_1 = a$ και $a_{\nu+1} = a_\nu + \omega, \ \nu \in \mathbb{N}^*$

✧ Κάθε όρος προκύπτει από το προηγούμενο με τη πρόσθεση ενός σταθερού πραγματικού αριθμού.

✧ Για να είναι καλά ορισμένη μία αριθμητική πρόοδος, θα πρέπει να δίνεται ο πρώτος όρος και η διαφορά.

Αριθμητική Πρόοδος ΙΙ

- Έκφραση του ν-οστού όρου συναρτήσει του ν.

$$a_1 = a \text{ και } a_{\nu+1} = a_\nu + \omega,\ \nu \in \mathbb{N}^*$$

- $a_\nu = a + (\nu - 1)\omega,\ \nu \in \mathbb{N}^*$

Αριθμητική Πρόοδος ΙΙΙ

✧ Οι αριθμοί a, b, c (με τη σειρά που δίνονται) είναι διαδοχικοί όροι σε αριθμητική πρόοδο, αν και μόνο αν

$$2b = a + c \Leftrightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

b: αριθμητικός μέσος των a, c .

Αριθμητική Πρόοδος IV

- Άθροισμα των όρων αριθμητικής προόδου.

$$S_\nu = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu =$$

$$= \frac{a_1 + a_\nu}{2} \cdot \nu =$$

$$= \frac{2a_1 + (\nu - 1)\omega}{2} \cdot \nu$$

Βασικά Αθροίσματα Ι

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$S' = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

$$S'' = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \nu^3 = \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2$$

Βασικά Αθροίσματα ΙΙ

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + \nu(\nu + 1)$$

$$x(x+1) = x^2 + x$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow 1 \cdot 2 = 1^2 + 1 \\ x = 2 \Rightarrow 2 \cdot 3 = 2^2 + 2 \\ x = 3 \Rightarrow 3 \cdot 4 = 3^2 + 3 \\ \quad\quad\quad \vdots \\ x = \nu \Rightarrow (\nu + 1)\nu = \nu^2 + \nu \end{array}\right\} \Rightarrow S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2) +$$

$$+(1 + 2 + 3 + \cdots + \nu) = S' + S = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$$

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu = \\ = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$S' = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2 = \\ = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

Γεωμετρική Πρόοδος

✧ Ονομάζουμε **γεωμετρική πρόοδο** με πρώτο όρο τον πραγματικό αριθμό $a_1 \neq 0$ και **λόγο** τον πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 0$, την αναδρομική ακολουθία πρώτης τάξης $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ της οποίας οι όροι ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$a_{\nu+1} = \lambda \cdot a_\nu, \qquad \nu \in \mathbb{N}^*$$

Γεωμετρική Πρόοδος Ι

- $a_1 = a$ και $a_{\nu+1} = \lambda \cdot a_\nu \quad \alpha, \lambda \in \mathbb{R}^*$

- Κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό ενός σταθερού πραγματικού (μη μηδενικού) αριθμού.

- Για να είναι καλά ορισμένη μία γεωμετρική πρόοδος, θα πρέπει να δίνεται ο πρώτος όρος και ο λόγος.

Γεωμετρική Πρόοδος ΙΙ

✧ Έκφραση του ν-οστού όρου συναρτήσει του ν.

$$a_1 = a \quad \text{και} \quad a_{\nu+1} = \lambda \cdot a_\nu, \ \nu \in \mathbb{N}^*$$

✧ $a_\nu = a \cdot \lambda^{\nu-1}, \ \nu \in \mathbb{N}^*$

Γεωμετρική Πρόοδος ΙΙΙ

- Οι αριθμοί a, b, c (με τη σειρά που δίνονται) είναι διαδοχικοί όροι σε γεωμετρική πρόοδο, αν και μόνο αν

$$b^2 = a \cdot c \Leftrightarrow b = \sqrt{a \cdot c}$$

b: **γεωμετρικός μέσος** των a, c .

Γεωμετρική Πρόοδος IV

- Άθροισμα των όρων γεωμετρικής προόδου.

$$S_\nu = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu =$$

$$= a + \lambda a + \lambda^2 a + \cdots + \lambda^{\nu-1} a =$$

$$= a\left(1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{\nu-1}\right) =$$

$$= \frac{a(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}$$

Αρμονική Πρόοδος

- Ονομάζουμε **αρμονική πρόοδο** με πρώτο όρο τον πραγματικό αριθμό $a_1 \neq 0$ και με **διαφορά** τον πραγματικό αριθμό $\omega \neq 0$, την αναδρομική ακολουθία $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ της οποίας οι μη μηδενικοί όροι ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$\frac{1}{a_{\nu+1}} = \frac{1}{a_\nu} + \omega, \qquad \nu \in \mathbb{N}^*$$

Αρμονική Πρόοδος Ι

- Έκφραση του ν-οστού όρου συναρτήσει του ν.

$$a_1 = a \ \text{και} \ \frac{1}{a_{\nu+1}} = \frac{1}{a_\nu} + \omega, \qquad \nu \in \mathbb{N}^*$$

- $$a_\nu = \frac{1}{\frac{1}{a} + (\nu - 1)\omega}, \qquad \nu \in \mathbb{N}^*$$

Αρμονική Πρόοδος ΙΙ

✧ Οι αριθμοί a, b, c (με τη σειρά που δίνονται) είναι διαδοχικοί όροι σε αρμονική πρόοδο, αν και μόνο αν οι αριθμοί $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow b = \frac{2ac}{a+c}$$

b: αρμονικός μέσος των a, c .