Άλγεβρα Ι

Πράξεις - Σχέσεις

Βαγγέλης Ψύχας

Κυριότερα Αριθμοσύνολα Ι

✧ Το σύνολο των **Φυσικών** Αριθμών

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \qquad \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

✧ Το σύνολο των **Ακεραίων** Αριθμών

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}, \qquad \mathbb{Z}^* = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

Κυριότερα Αριθμοσύνολα ΙΙ

✧ Το σύνολο των Ρητών Αριθμών

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\right\}, \qquad \mathbb{Q}^* = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$$

✧ Ρητοί είναι οι αριθμοί που είναι γραμμένοι ή μπορούν να γραφούν σαν κλάσματα.

✧ Οι ακέραιοι αριθμοί, μπορούν να θεωρηθούν ως ρητοί με παρονομαστή τη μονάδα.

Κυριότερα Αριθμοσύνολα ΙΙΙ

✧ Το σύνολο των Άρρητων Αριθμών

● Άρρητοι είναι οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν σαν κλάσματα.

- π.χ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, … (οι τετραγωνικές ρίζες αριθμών που δεν είναι τέλεια τετράγωνα).
- Το 350 π.Χ, ο Εύδοξος ο Κνίδιος , απέδειξε ότι ο $\sqrt{2}$, είναι άρρητος.

Κυριότερα Αριθμοσύνολα IV

- **Υπερβατικοί Αριθμοί**

- π.χ $\pi=3{,}14159\ldots$,

$e=2{,}71\ldots=$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

- π.χ $2^{\sqrt{3}},\ 3^{\sqrt{5}},\ \ldots$

$$\lim_{\nu\to+\infty}\rho_\nu=\sqrt{3}\Rightarrow 2^{\sqrt{3}}=2^{\lim\limits_{\nu\to+\infty}\rho_\nu}$$

Κυριότερα Αριθμοσύνολα V

- **Πραγματικοί Αριθμοί: $\mathbb{R}$**
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

- **Μιγαδικοί Αριθμοί**
- $\mathbb{C} = \left\{\alpha + \beta i : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \& \ i^2 = -1\right\}$
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$

Ιδιότητες Ισότητας

- $\boldsymbol{\alpha = \alpha}$ (ανακλαστική ιδιότητα)

- $\boldsymbol{\alpha = \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha}$ (συμμετρική ιδιότητα)

- $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha = \beta} \\ \boldsymbol{\beta = \gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = \gamma}$ (μεταβατική ιδιότητα)

Πρόσθεση (+) Πολλαπλασιασμός (·)

✧ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

✧ (προσεταιριστική ιδιότητα)

- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
- $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

✧ (ουδέτερα στοιχεία)

- $\alpha + 0 = \alpha$ (μηδέν)
- $\alpha \cdot 1 = \alpha$ (μονάδα)

Πρόσθεση (+) Πολλαπλασιασμός (·)

✧ (συμμετρικά στοιχεία)

▪ $\alpha + (-\alpha) = 0$ (αντίθετο) ▪ $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1, \alpha \neq 0$ (αντίστροφο)

✧ (επιμεριστική ιδιότητα)

✧ $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

✧ $(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) = \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma + \beta \cdot \delta$

Αφαίρεση (-) και Διαίρεση (:)

✧ $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

✧ $\alpha : \beta = \alpha \cdot \beta^{-1} = \dfrac{\alpha}{\beta}, \beta \neq 0$

✧ $\alpha + \beta$ (άθροισμα) ✧ $\alpha \cdot \beta$ (γινόμενο)

✧ $\alpha - \beta$ (διαφορά) ✧ $\alpha : \beta$ (ακριβές πηλίκο)

$$\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}$$

Πρόσθεση Κλασμάτων

- $$\frac{\alpha}{\gamma} \pm \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \pm \beta}{\gamma}$$

- $$\frac{\alpha}{\delta} \pm \frac{\beta}{\delta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \pm \beta \pm \gamma}{\delta}$$

- $$\frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \delta \pm \beta \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

- $$\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\beta} = \frac{\beta \pm \alpha}{\alpha \cdot \beta}$$

Πρόσθεση κατά Μέλη

- $$\left.\begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = \beta + \delta \\ \alpha + \delta = \beta + \gamma \end{cases}$$

Πολλαπλασιασμός κατά Μέλη

- $$\left.\begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta \\ \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \end{cases}$$

Αφαίρεση κατά Μέλη

- $$\left.\begin{matrix}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\gamma=\beta-\delta\\ \alpha-\delta=\beta-\gamma\end{cases}$$

Διαίρεση κατά Μέλη

- $$\left.\begin{matrix}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\delta}\\[2ex] \dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\delta}{\beta}\end{cases}$$

$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\neq o$

Δυνάμεις Ι

- $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\nu-\pi\alpha\rho\alpha\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$

- $\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$
- $\alpha^{\nu} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}, \alpha \neq 0$
- $(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu \cdot \mu}$
- $(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$

Δυνάμεις ΙΙ

- $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}, \beta \neq 0$
- $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}, \alpha \neq 0$
- $\alpha^{0} = 1, \alpha \neq 0$
- $\alpha^{1} = \alpha$

Αναλογίες Ι

- Ονομάζουμε **Αναλογία**, την ισότητα δύο ή περισσότερων λόγων (κλασμάτων).
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

Αναλογίες ΙΙ

- $$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta}=\frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$$

- $$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta \pm \alpha}=\frac{\gamma}{\delta \pm \gamma}$$

- $$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}$$

Αναλογίες ΙΙΙ

Αν μας δοθεί η αναλογία: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} \ldots$

… θέτουμε: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = m \ldots$

…και χρησιμοποιούμε τις ισότητες:

$\alpha = m \cdot \beta$ $\qquad$ $\gamma = m \cdot \delta$ $\qquad$ $\varepsilon = m \cdot \zeta$