

## ΒΑΣΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

### Κανόνες παραγώγισης

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $(cf(x))' = cf'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
- $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

### Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων

α) Αν  $f(x) = c$ , τότε  $f'(x) = 0$

β) Αν  $f(x) = x$ , τότε  $f'(x) = 1$

γ) Αν  $f(x) = x^v$ , με  $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ , τότε  
 $f'(x) = vx^{v-1}$

δ) Αν  $f(x) = \frac{1}{x}$ , τότε  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, x \neq 0$

ε) Αν  $f(x) = \sqrt{x}$ , τότε  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$

στ) Αν  $f(x) = \eta\mu x$ , τότε  $f'(x) = \sigma\nu x$

ζ) Αν  $f(x) = \sigma\nu x$ , τότε  $f'(x) = -\eta\mu x$

η) Αν  $f(x) = \varepsilon\varphi x$ , τότε  $f'(x) = \frac{1}{\sigma\nu v^2 x}$

θ) Αν  $f(x) = \sigma\varphi x$ , τότε  $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

ι) Αν  $f(x) = \alpha^x$ , τότε  $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha, \alpha > 0$

ια) Αν  $f(x) = e^x$ , τότε  $f'(x) = e^x$

ιβ) Αν  $f(x) = \ln|x|$ , τότε  $f'(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

**Παράγωγοι της Σύνθεσης της  $f(x)$  με Βασικές Συναρτήσεις**

γ) Αν  $g(x)=[f(x)]^a$ , τότε  $g'(x)=a \cdot [f(x)]^{a-1} \cdot f'(x)$

δ) Αν  $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ , τότε  $g'(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

ε) Αν  $g(x)=\sqrt{f(x)}$ , τότε  $g'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

στ) Αν  $g(x)=\eta\mu f(x)$ , τότε  $g'(x)=\sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$

ζ) Αν  $g(x)=\sigma\upsilon\nu f(x)$ , τότε  $g'(x)=-\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$

η) Αν  $g(x)=\varepsilon\varphi f(x)$ , τότε  $g'(x)=\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$

θ) Αν  $g(x)=\sigma\varphi f(x)$ , τότε  $g'(x)=-\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$

ι) Αν  $g(x)=\alpha^{f(x)}$ , τότε  $g'(x)=\alpha^{f(x)} \cdot \ln \alpha \cdot f'(x)$

ια) Αν  $g(x)=e^{f(x)}$ , τότε  $g'(x)=e^{f(x)} \cdot f'(x)$

ιβ) Αν  $g(x)=\ln|f(x)|$ , τότε  $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0$ , όταν

i.  $f(x)=x^2+1$ ,  $x_0=0$

ii.  $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ,  $x_0=1$

iii.  $f(x)=\eta\mu^2 x$ ,  $x_0=0$ .

2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f'$  στο σημείο  $x_0$  όταν:

i)  $f(x)=x^4$ ,  $x_0=-1$                       ii)  $f(x)=\sqrt{x}$ ,  $x_0=9$

iii)  $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ ,  $x_0=\frac{\pi}{6}$                       iv)  $f(x)=\ln x$ ,  $x_0=e$

v)  $f(x)=e^x$ ,  $x_0=\ln 2$ .

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων

i)  $f(x)=x^7-x^4+6x-1$                       ii)  $f(x)=2x^3+\ln x-\sqrt{3}$

iii)  $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x$                       iv)  $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{3}\eta\mu x+\ln 3$ .

v)  $f(x) = (x^2 - 1)(x - 3)$

vi)  $f(x) = e^x \eta \mu x$

vii)  $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$

ix)  $f(x) = \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{1 + \sigma \upsilon \nu x}$

x)  $f(x) = x^2 \eta \mu x \sigma \upsilon \nu x$ .

4. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων στο  $x_0$

α)  $f(x) = x^5 - x^3$  στο  $x_0 = 2$

β)  $f(x) = \sigma \upsilon \nu x + \sigma \upsilon \nu \pi$  στο  $x_0 = -\pi$

γ)  $f(x) = \ln x - \ln e^2$  στο  $x_0 = e$ .

δ)  $f(x) = x^4 + 5x^3 + 2x^2$  στο  $x_0 = -2$

ε)  $f(x) = e^x + e^2$  στο  $x_0 = 0$

στ)  $f(x) = e^x + \ln x - \sigma \upsilon \nu \gamma$  στο  $x_0 = 2$

5. Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α)  $f(x) = (x^2 + 7x) \eta \mu x$     β)  $f(x) = x \sqrt{x}$     γ)  $f(x) = x^2 \ln x$     δ)  $f(x) = \eta \mu x \sigma \upsilon \nu x$

ε)  $f(x) = x^3 e^x$     στ)  $f(x) = x^3 \ln x \cdot \eta \mu x$     ζ)  $f(x) = (x^2 + 5x) e^x \sigma \upsilon \nu x$     η)  $f(x) = x \ln x$

6. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α.  $f(x) = x + \frac{5}{x}$     β.  $f(x) = \frac{1}{x-1}$     γ.  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$     δ.  $f(x) = \frac{(3x^2 + 7) \ln x}{x^4}$

ε.  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$     στ.  $f(x) = \frac{\sigma \upsilon \nu x}{1 + \eta \mu x}$     ζ.  $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$     η.  $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$

θ.  $f(x) = x^{-5}$     ι.  $f(x) = 7x^{-4}$     ια.  $f(x) = x^{-5} + 3x^{-3} - 6x^{-1}$     ιβ.  $f(x) = \frac{7}{x^3}$

**ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΣΗΣ**

1. Να δείξετε τις παρακάτω ισότητες:

α)  $(\eta\mu 4x)' = 4\eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu x$     β)  $(\eta\mu 4x)' = 4\sigma\upsilon\nu 4x$     γ)  $(\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$

δ)  $(\ln(\eta\mu x))' = \sigma\phi x$     ε)  $(\sigma\upsilon\nu^3 5x)' = -15\sigma\upsilon\nu^2 5x \eta\mu 5x$

στ)  $(\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x))' = -\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x$     ζ)  $(x \cdot 2^x)' = 2^x + x \cdot 2^x \ln 2$

η)  $(\sqrt{x^2 + \eta\mu x})' = \frac{2x + \sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x^2 + \eta\mu x}}$     θ)  $(e^{x^2 + \sigma\upsilon\nu x})' = e^{x^2 + \sigma\upsilon\nu x} (2x - \eta\mu x)$ .

ι)  $(\eta\mu^2(3x+\pi))' = 6\eta\mu(3x+\pi)\sigma\upsilon\nu(3x+\pi)$ .

2. Να βρείτε τις παραγώγους για κάθε  $x \in \mathbb{A}$ : α)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$     β)  $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$     γ)  $f(x) = \sqrt{x^3}$

4. Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i)  $g(x) = f(\eta\mu x)$     ii)  $g(x) = \eta\mu(f(x))^2$     iii)  $g(x) = [f(\sigma\upsilon\nu x)]^2$     iv)  $g(x) = \sigma\upsilon\nu^2(f(x))$

v)  $g(x) = (f(x^2) - f(x))$ .

**ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i)  $f(x) = x^{-3}, x \neq 0$

ii)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, x > 0$

iii)  $f(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}, t > 0$

iv)  $f(x) = x^3 + \sigma\upsilon\nu x + \sqrt{x} + e^t, x > 0$

v)  $f(x) = 2x^4 - \frac{\eta\mu x}{3} + \frac{\alpha e^x}{5} - \ln 2$

2. Να υπολογίσετε τον παράγωγο αριθμό της συνάρτησης  $f$ , όταν:

i.  $f(x) = x^3 \ln x$ , στο σημείο  $x_0 = 1$

ii.  $f(x) = (x^2 + 3x - 2) \cdot (\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x)$  στο  $x_0 = 0$

3. Να βρείτε την παραγωγό, ως προς  $x$ , των συναρτήσεων:

i.  $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$

ii.  $f(x) = \frac{1+\eta\mu x}{e^y}$

iii.  $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+1}$

iv.  $f(x) = \frac{2}{3y \ln x}$

4. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i.  $f(x) = \sin(x^2 + 3x)$

ii.  $f(t) = \varepsilon\phi\omega t + e^{-\frac{t}{2}}$

iii.  $f(\theta) = \sin^2 3\theta$

iv.  $f(t) = \ln^3(e^{2t} + 1)$

v.  $f(x) = (x-1)^3(3x-2)^4$

vi.  $f(x) = 3x^2e^x - \eta\mu x \ln x$

5. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

i)  $f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$

ii)  $f(x) = (2x-1)\ln(2x-1)$

