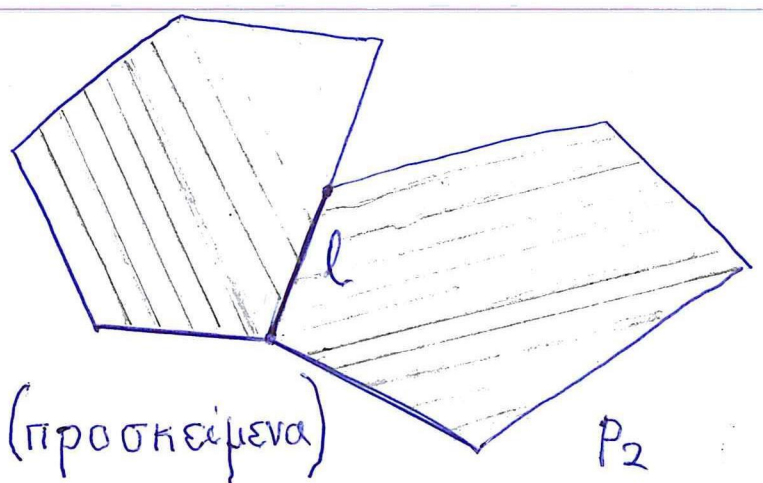


# Εμβαδό ευθύγραμμον σχήματος

$P_1, P_2$  :

απλά πολύγωνα

Συνορεύουν μόνο  
κατά μία πλευρά  $\ell$   
ή τμήμα πλευράς (προσκειμένα)



$P_1 + P_2$  : το πολύγωνο που προκύπτει  
αν αφαιρέσω το κοινό σύνορο

• Σε κάθε απλό πολύγωνο  $P$  αντιστοικώ  
έναν και μόνο αριθμό  $E$  που το  
ονομάζω εμβαδό  $[E(P)]$

• Ίσα πολύγωνα έχουν ίσα εμβαδά.

• Προσθετικός νόμος

$$E(P_1 + P_2) = E(P_1) + E(P_2)$$

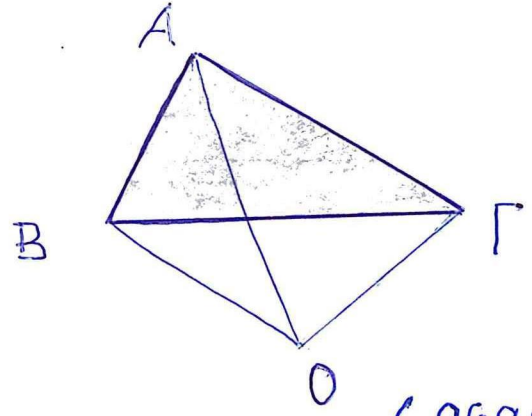
→ Άσκηση 1

$$\triangle AB\Gamma = T$$

$$\triangle A\text{B}\text{O} = T_1$$

$$\triangle A\text{O}\text{O} = T_2$$

$$\triangle \text{O}\text{B}\text{O} = S$$



Να δείξετε ότι : (αφαιρετικός νόμος)

$$E(T) = E(T_1) + E(T_2) - E(S) \quad (1)$$

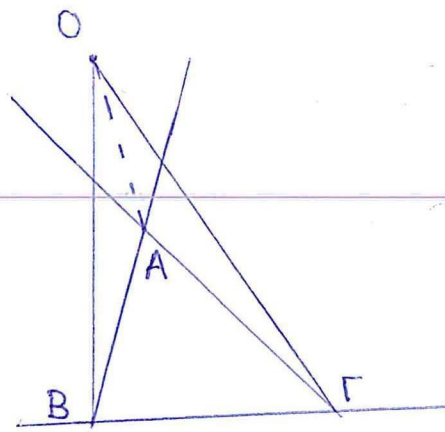
### Άσκηση 1β

Να γράψετε το

εμβαδόν  $E(T)$  ως  
 συνάρτηση των

$E(S_1)$ ,  $E(S_2)$  και  $E(S_3)$

Απάντηση



$$\triangle AB\Gamma : T$$

$$\triangle OAB : S_1$$

$$\triangle OAG : S_2$$

$$\triangle OBG : S_3$$

### Άσκηση 1γ

ΑΒΓΔ είναι παραλληλό-  
 γραμμο.

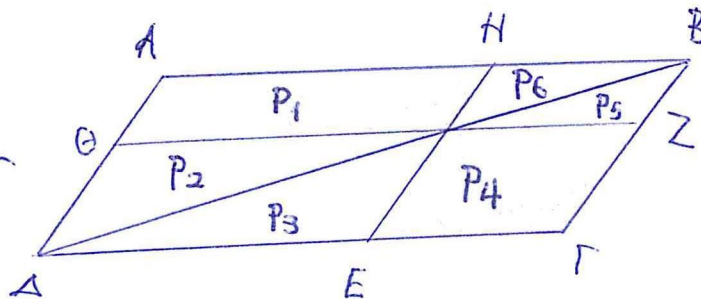
$EH \parallel AD, BG$

$\theta Z \parallel AB, \Delta\Gamma$

$E(P_1) = 10$

Βρείτε το  $E(P_4)$ .

Απάντηση



## Άσκηση 1δ

Οι (ε) και (ς)

είναι παράλληλες

Να κατασκευάσετε

πάνω στο σχήμα

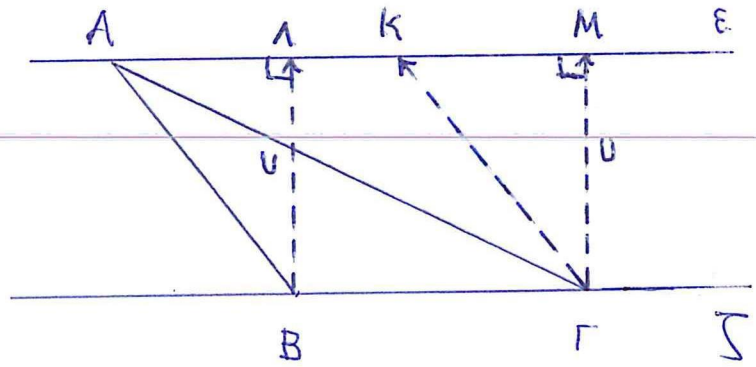
που σας δίνεται

ένα ορθογώνιο

παραλληλόγραμμο

με εμβαδό διπλάσιο

από το  $\epsilon(AB\Gamma)$



Βοηθητικά στοιχεία

- $\Gamma\text{Κ} \parallel \text{ΑΒ}$
- $\text{ΒΛ} \perp \epsilon$
- $\text{ΓΜ} \perp \epsilon$

### Απάντηση

- Το  $\text{ΑΒΓΚ}$  έχει γίνει παραλληλόγραμμο, αφού έχει απέναντι πλευρές παράλληλες.

$$\text{Άρα } (\text{ΑΒΓΚ}) = 2(\text{ΑΒΓ}) \quad (1)$$

- Το  $\triangle \text{ΑΛΒ} = \triangle \text{ΚΜΓ}$  από το  $\pi-\pi-90^\circ$  ( $\text{ΑΒ} = \text{ΚΓ}$ ,  $\text{ΛΒ} = \text{ΜΓ} = \upsilon$ ) (2)

$$\begin{aligned} (\text{ΑΒΓΚ}) &= (\text{ΑΒΛ}) + (\text{ΛΒΓΚ}) \stackrel{(2)}{=} (\text{ΚΓΜ}) + (\text{ΛΒΚΓ}) \\ &= (\text{ΛΒΓΜ}) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} (\text{ΛΒΓΜ}) = 2(\text{ΑΒΓ})$$

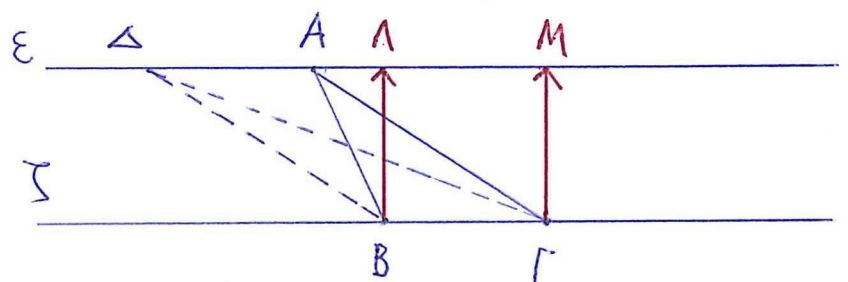
## Άσκηση 1ε

Αν  $\epsilon \parallel \varsigma$  γιατί

$$(\text{ΑΒΓ}) = (\text{ΔΒΓ}) ;$$

Απάντηση

Γιατί και τα δύο έχουν το ίδιο ορθογώνιο διπλάσιον εμβαδόν



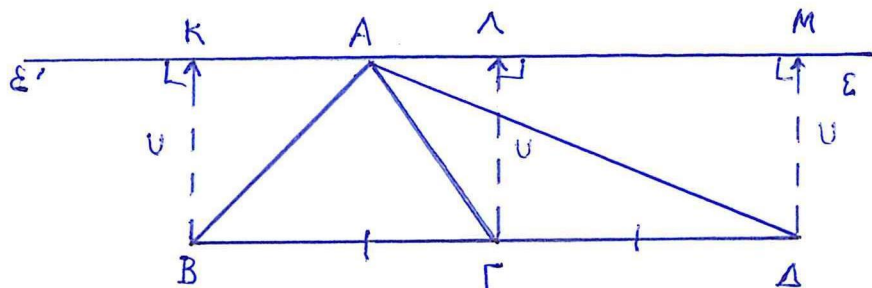


# Άσκηση 1στ.

Διπλασιάζω την πλευρά ΒΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ του επόμενου σχήματος.

Ναδεικθεί ότι και το εμβαδό διπλασιάζεται.

$\epsilon' A \epsilon \parallel B \Gamma$



Απάντηση και συμπέρασμα γενικό

Το ΑΒΓ έχει ορθογώνιο διπλάσιον εμβαδού το ΚΒΓΛ  
 το ΑΒΔ έχει ορθογώνιο διπλάσιον εμβαδού το ΚΒΔΜ

$$(ΚΒΔΜ) = 2(ΚΒΓΛ) \quad \left\{ \text{γιατί } \Lambda \Gamma \Delta \text{M} = \text{ΚΒΓΛ} \right\}$$

$$\Rightarrow (ΑΒΔ) = 2 \cdot 2(ΑΒΓ) \stackrel{=2}{\Rightarrow} (ΑΒΔ) = 2(ΑΒΓ)$$

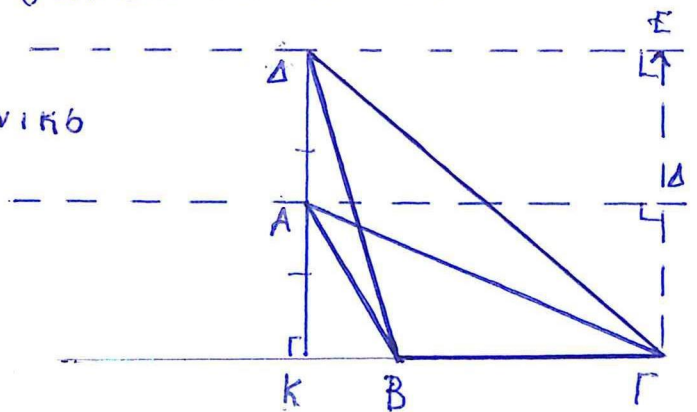
« Το εμβαδό τριγώνου είναι ανάλογο »

15 Αφήνω στο τρίγωνο ΑΒΓ την ίδια βάση ΒΓ

και διπλασιάζω το ύψος. Ναδεικθεί ότι και το εμβαδό διπλασιάζεται

Απάντηση και συμπέρασμα γενικό

$$\begin{aligned} (ΔΒΓ) &= (ΔΚΓ) - (ΔΚΒ) \\ &= 2(ΑΚΓ) - 2(ΑΚΒ) \\ &= 2 \{ (ΑΚΓ) - (ΑΚΒ) \} \\ &= 2 \cdot (ΑΒΓ) \end{aligned}$$



« Το εμβαδό τριγώνου είναι ανάλογο του ύψους προς την βάση »

## Θεμελιώδης τύπος εμβαδού τριγώνου

Αφού το εμβαδό τριγώνου είναι ανάλογο  
προς την βάση και προς το ύψος προς  
τη βάση αυτή, ο τύπος είναι

$$E(AB\Gamma) = \lambda \cdot (B\Gamma) \cdot (A\Delta)$$

Ο συντελεστής αναλογίας

$\lambda$  μπορεί να είναι  
οποιοσδήποτε θετικός.

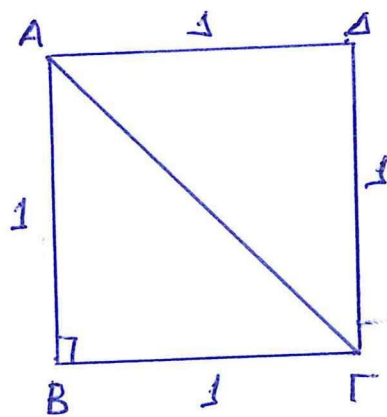
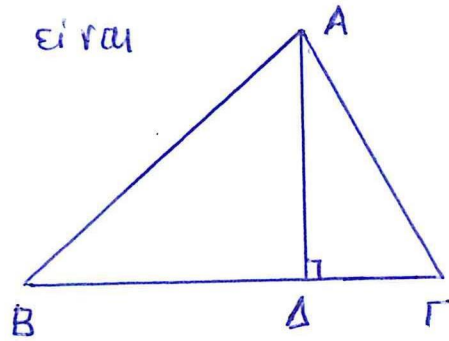
Εκλέχουμε όμως επίτηδες  $\lambda = \frac{1}{2}$

ώστε το τετράγωνο πλευράς 1 να  
αποκτήσει εμβαδόν 1

$$\begin{aligned} E(AB\Gamma\Delta) &= 2 \cdot (AB\Gamma) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Άρα

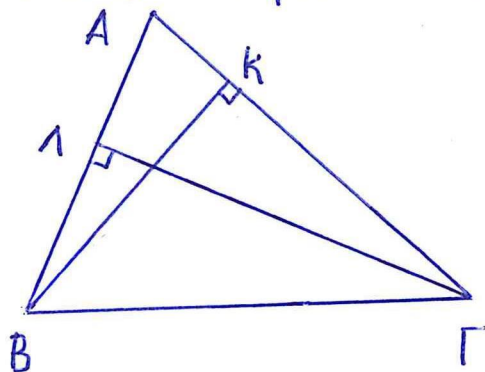
$$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot A\Delta$$



Το ίδιο αποτέλεσμα παίρνουμε αν πολλαπλασιάσουμε οποιαδήποτε πλευρά του τριγώνου επί το αντίστοιχο ύψος της.

Εξήχθη με ομοιότητα τριγώνων.

$$\triangle ALG \approx \triangle KVB \left\{ \begin{array}{l} \hat{A} \text{ κοινή} \\ \hat{L} = \hat{K} = 90^\circ \end{array} \right.$$



$$\Rightarrow \left( \frac{AL}{AK} = \right) \frac{LG}{KB} = \frac{AG}{AB}$$

$$\Rightarrow LG \cdot AB = KB \cdot AG$$

$$\Rightarrow \frac{LG \cdot AB}{2} = \frac{KB \cdot AG}{2}$$

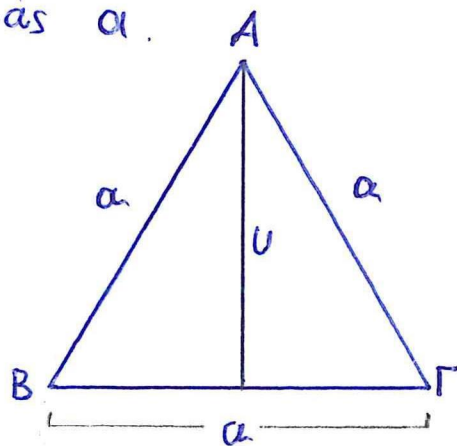
$$\text{Άρα } (ABG) = \frac{1}{2} a \cdot U_a$$

$$= \frac{1}{2} b \cdot U_b$$

$$= \frac{1}{2} \gamma \cdot U_\gamma$$

→ Ειδικός τύπος εμβαδού για το ισοπλευρο τρίγωνο πλευράς  $a$ .

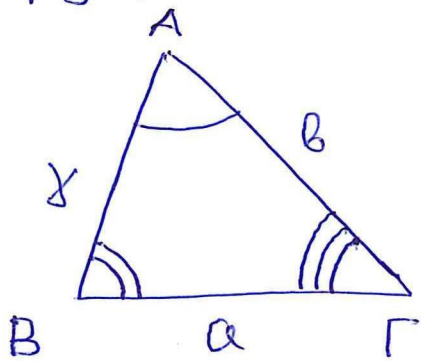
$$E = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \quad U = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



T2. Τύπος του Ήρωνος

$$E_{AB\Gamma} = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-\gamma)}$$

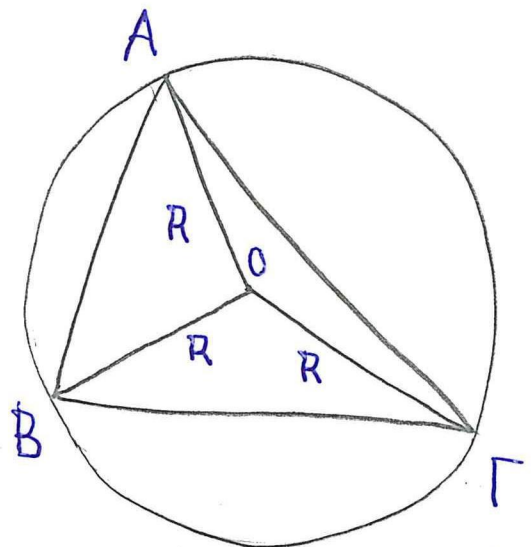
T3. Τύπος του ημιτόνου



$$\begin{aligned} E_{AB\Gamma} &= \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A \\ &= \frac{1}{2} \alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu B \\ &= \frac{1}{2} \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu \Gamma \end{aligned}$$

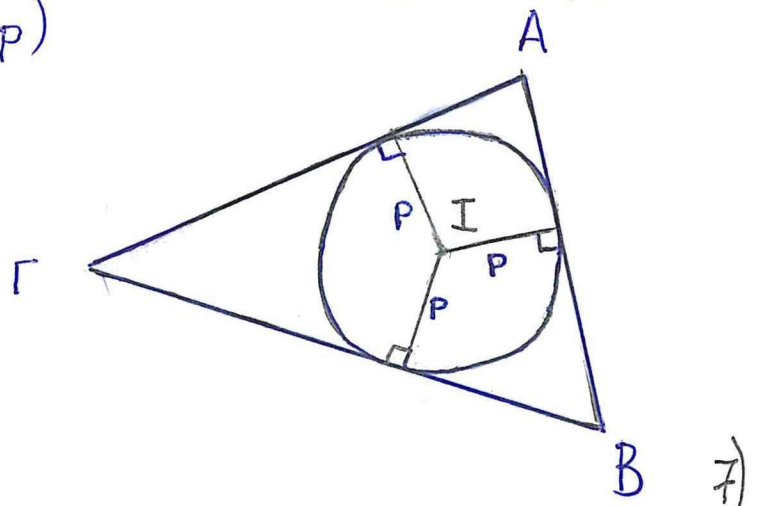
T4. Τύπος ακτίνας R περιγεγραμμένου κύκλου (O, R)

$$E_{AB\Gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R}$$



T5. Τύπος ακτίνας ρ εγγεγραμμένου κύκλου (I, ρ)

$$\begin{aligned} E_{AB\Gamma} &= \tau \cdot \rho \\ &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cdot \rho \end{aligned}$$





Ερωτήσεις κατανόησης

1)

Η  $\epsilon \parallel \beta\gamma$ ,  $A, Z$  στην  $(\epsilon)$

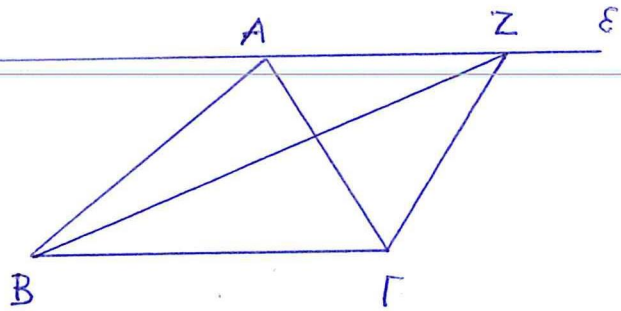
Εάν  $(\text{ΑΒΓ}) = 10 \text{ τμ}$

τότε :

$(\text{ΖΒΓ}) < 10$

$(\text{ΖΒΓ}) > 10$

$(\text{ΖΒΓ}) = 10$

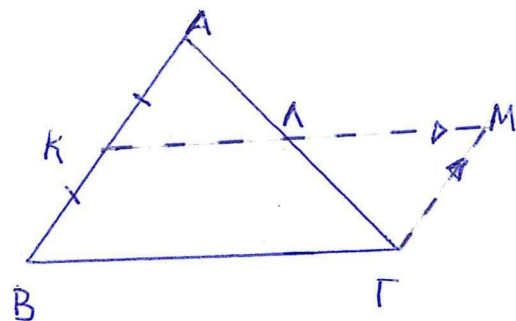


2)  $K$  : το μέσο της  $AB$

$KM \parallel \beta\gamma$  και  $\Gamma M \parallel AB$

Εάν  $(\text{ΚΒΓΜ}) = 12$  τότε

$(\text{ΑΒΓ}) = 12$      $\lambda$  ή  $\Lambda$



3) Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $a < b$ . Με ποια ανισοτική σχέση συνδέονται τα  $U_a$  και  $U_b$ ;

4) Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $b = 2a$ . Με ποια σχέση συνδέονται τα  $U_a$  και  $U_b$ ;

5) Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  να αποδείξετε ότι

$(\text{ΑΒΓ}) \leq \frac{1}{2} b \cdot \gamma$

Πότε ισχύει η ισότητα;

6) Το  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο με  $AB \parallel \Gamma\Delta$

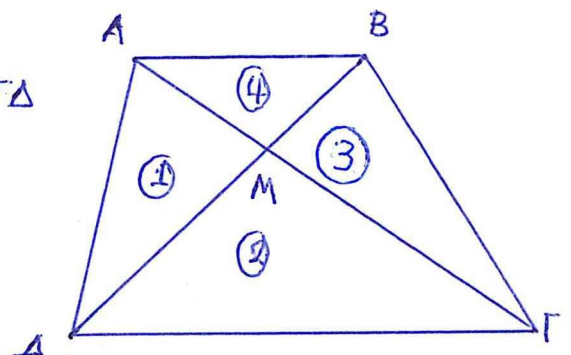
Το  $(\text{ΑΜΔ}) = 8$ .

Βρείτε το  $(\text{ΒΜΓ})$

$(\text{ΒΜΓ}) = 7$  ;  $(\text{ΒΜΓ}) = 9$  ;

$(\text{ΒΜΓ}) = 8$  ;

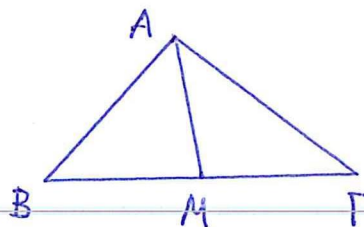
Κανένα από τα προηγούμενα ;





7) Εάν  $(ABM) = (AGM)$  τότε

η AM είναι



διχοτόμος

I

διάρεσος

II

ύψος

III

8) Να χωρίσετε ένα παραλληλόγραμμο σε τέσσερα ισοδύναμα τρίγωνα (ισοεμβαδικά) με ευθείες που διέρχονται από μια κορυφή του.

### Ασκήσεις

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  (με  $\hat{A} = 90^\circ$ )

Είναι  $AB = 6$  και  $B\Gamma = 10$

- I. Να βρείτε το εμβαδόν του
- II. Να βρείτε το ύψος  $h_a$

2. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$

Είναι  $AB = 5$  και  $A\Gamma = 12$

- I. Να βρείτε την υποτείνουσα  $B\Gamma$
- II. Να βρείτε το εμβαδόν του
- III. Να βρείτε το ύψος του

3. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές  $a=13, b=14, \gamma=15$

- I. Να υπολογίσετε το  $uy$  (με την βοήθεια του π.θ)
- II. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

4. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές  $a=9, b=17, \gamma=10$

- I. Να υπολογίσετε το  $h_b$
- II. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου

5. Ένα οικόπεδο έλα σχήμα τραπέζιου  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΔ // ΒΓ$ )  
με  $\hat{A}, \hat{B}$  ορθές,  $ΑΔ = 15$ ,  $ΒΓ = 20$  και  $ΑΒ = 12$

I Να υπολογίσετε την  $ΓΔ$

II Να υπολογίσετε το  $(ΑΒΓΔ)$

III Κόβεται από το οικόπεδο λωρίδα πλάτους 3  
παράλληλα στην  $ΓΔ$ .  
Τι έκταση έχει το απομείναν οικόπεδο;

6. Ένα οικόπεδο  $ΑΒΓΔ$  έχει πλευρές

$ΑΒ = 4$ ,  $ΑΔ = 3$ ,  $ΓΔ = 2\sqrt{10}$ ,  $ΑΓ = 7$  και  $ΒΔ = 5$ .

I Να αποδείξετε ότι έχει σχήμα ορθογώνιου  
τραπέζιου.

II Να βρείτε το εμβαδόν του οικόπεδου

7. Δίνεται τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΔ // ΒΓ$ ) με  $ΒΓ = 25$ ,  $ΑΔ = 11$

$ΑΒ = 13$  και  $ΔΓ = 15$ .

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

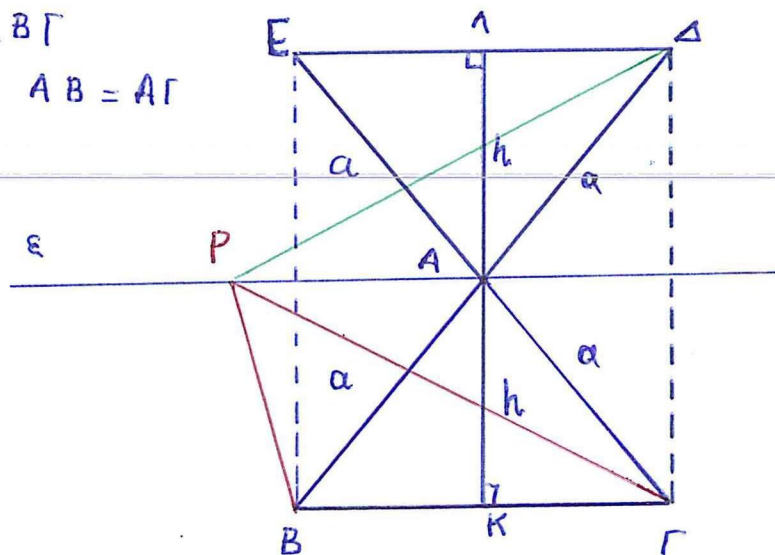
8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν τριγώνου  $ΑΒΓ$   
με  $a = 2$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$

9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν τριγώνου  $ΑΒΓ$   
με  $a = 2$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$

10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν τριγώνου  $ΑΒΓ$   
με  $ΑΒ = 6$ ,  $ΑΓ = 8$  και  $\hat{A} = 60^\circ$   
και κατόπιν να υπολογίσετε το  $U_B$ .

11. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$   
είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$   
και  $AK$  το ύψος.

Η ευθεία  $(\varepsilon)$   
είναι παράλληλη  
στην βάση  $B\Gamma$   
και  $P$  σημείο της  
διάφορο του  $A$ .



Οι  $AB, A\Gamma$  προεκτάθησαν κατά ίσα τμήματα.

I) Να συγκρίνετε τα εμβαδά  $(AB\Gamma)$  και  $(P\beta\Gamma)$

II) Τι είδους τετράηλεωρο είναι το  $EB\Gamma\Delta$ ;

Εξηγήστε.

III) Γιατί η  $(\varepsilon)$  είναι η μεσοκάθετος της  $\Delta\Gamma$ ;

IV) Να σχολιάσετε την εξής ισχυρισμό  
ενός πολ. μηχανικού.

« Το κόστος περιφράσης του  
τριγώνου  $P\beta\Gamma$  είναι μεγαλύτερο από  
το κόστος περιφράσης του  $AB\Gamma$  »