

**ΠΩΣ ΑΠΑΝΤΩ ΣΕ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ**

1. Χρειάζομαι να θυμάμαι τους παρακάτω πίνακες προσήμου για να καθορίσω το πρόσημο της παραγώγου

**Πολυώνυμο 1<sup>ου</sup> βαθμού  $ax + \beta$  που έχει ρίζα  $\rho$**

$x$	$-\infty$	$\rho$	$+\infty$
$ax + \beta$	ετερόσημο του $a$	0	ομόσημο του $a$

**Πολυώνυμο 2<sup>ου</sup> βαθμού  $ax^2 + \beta x + \gamma$**

**Θα θυμάμαι ότι έχω τρεις περιπτώσεις**

<b>Διακρίνουσα <math>\Delta &lt; 0</math></b>			
$x$	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του $a$		

<b>Διακρίνουσα <math>\Delta = 0</math> και ρίζα διπλή <math>\rho</math></b>			
$x$	$-\infty$	$\rho$	$+\infty$
$ax^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του $a$	0	ομόσημο του $a$

<b>Διακρίνουσα <math>\Delta &gt; 0</math> και ρίζες <math>\rho_1 &lt; \rho_2</math></b>				
$x$	$-\infty$	$\rho_1$	$\rho_2$	$+\infty$
$ax^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του $a$	0	ετερόσημο του $a$	0 ομόσημο του $a$

**Πολυώνυμο 3<sup>ου</sup> βαθμού  $ax^3 + \beta$  που έχει ρίζα  $\rho$**

$x$	$-\infty$	$\rho$	$+\infty$
$ax^3 + \beta$	ετερόσημο του $a$	0	ομόσημο του $a$

2. Εάν **δεν** θυμάμαι τους κανόνες αυτούς:

- Εκλέγω **στην τύχη** σε κάθε διάστημα από έναν αριθμό.
- Βρίσκω το πρόσημο της παραγώγου στον αριθμό αυτό.
- Το πρόσημο που βρίσκω μου δείχνει το πρόσημο σε όλο το διάστημα.

**Υπάρχει και ο τρόπος της 2<sup>ης</sup> παραγώγου:**

- Βρίσκω την  $f''(x)$  και το πρόσημό της.
- Από το πρόσημο αυτό καταλαβαίνω την μονοτονία της  $f'$
- Το κάνω αυτό για να δω τη σειρά του προσήμου της  $f'$

3. Μου ζητάει να αποδείξω ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνήσια μονότονη στο διάστημα  $\Delta$

- Βρίσκω την  $f'$
- Αποδεικνύω ότι  $f'(x) \geq 0$  για κάθε  $x$  στο  $\Delta$ , ή ότι  $f'(x) \leq 0$  για κάθε  $x$  στο  $\Delta$

4. Μου ζητάει να βρω μια παράμετρο  $\alpha$  στον τύπο συνάρτησης  $3^{\text{ου}}$  βαθμού ώστε αυτή να είναι γνήσια μονότονη στο διάστημα  $\Delta$

- Βρίσκω την  $f'$  που είναι 2ου βαθμού
- Πρέπει η  $f'$  να μην αλλάζει πρόσημο. Άρα πρέπει η διακρίνουσα  $\Delta \leq 0$ . Από την τελευταία ανίσωση βρίσκω το  $\alpha$ .

5. Μου ζητάει να εξετάσω τη μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$

- Βρίσκω την  $f'$
- Λύνω την εξίσωση  $f'(x) = 0$  και βρίσκω ρίζες ας πούμε  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$
- Κάνω τον πίνακα μονοτονίας της  $f$  που έχει την εξής γενική μορφή και συμπληρώνω το πρόσημο της  $f'$  στα διαστήματα. Το πρόσημο μου δείχνει τη μονοτονία της  $f$  και στην τελευταία γραμμή που της δίνω πάντα μεγαλύτερο βάθος αποτυπώνω τη μεταβολή της  $f$

$x$	$\alpha$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\beta$			
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$								

- Υπολογίζω τις τιμές της συνάρτησης στις ρίζες της παραγώγου αλλά και στα άκρα του όταν αυτά ανήκουν στο  $\Delta$ .
- Αυτές οι τιμές μου δείχνουν τα ακρότατα τοπικά και ολικά αν υπάρχουν.

### Ο ΣΩΣΤΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΑΠΑΝΤΑ ΣΕ ΠΟΛΛΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

- Εάν το πρόβλημα ζητά να αποδείξω ότι  $f(x) \geq m$ , για κάθε  $x$  ελέγχω μήπως το  $m$  είναι το ολικό ελάχιστο όπως φαίνεται από τον πίνακα μεταβολών
- Εάν το πρόβλημα ζητά να βρω το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $f(x) = m$  βλέπω πόσες φορές η οριζόντια ευθεία  $y = m$  τέμνει τον πίνακα μεταβολών.
- Εάν το πρόβλημα ζητά να αποδείξω ότι  $f(x) \geq M$ , για κάθε  $x$  ελέγχω μήπως το  $M$  είναι το ολικό μέγιστο όπως φαίνεται από τον πίνακα μεταβολών

- Εάν το πρόβλημα ζητά να αποδείξω μια ανισότητα μεταξύ δύο ή περισσότερων τιμών της συνάρτησης θα ελέγξω σε ποιο διάστημα μονοτονίας βρίσκονται οι αντίστοιχες τιμές του  $x$  και από την μονοτονία θα αποδείξω την ανισότητα
- Εάν το πρόβλημα ζητά να λύσω μια ανίσωση που περιέχει την  $f(x)$ , θα λύσω την αντίστοιχη εξίσωση και μετά η ανίσωση λύνεται από τον πίνακα μεταβολών γιατί αυτός δείχνει τις αυξομειώσεις της .
- Εάν το πρόβλημα ζητά να αποδείξω ότι το τοπικό ακρότατο δεν είναι ολικό σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς, τότε δοκιμάζω τις τιμές  $f(10), f(20), \dots$  ή  $-f(10), -f(20), \dots$  για να βρω μία να διαψεύδει την ανισότητα.

6. Μου δίνεται μια συνάρτηση  $f$  η οποία έχει στον τύπο της άγνωστες παραμέτρους  $\lambda, \mu$  και μου δίνει δεδομένο ότι στο **εσωτερικό σημείο**  $x = a$  η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο τον αριθμό  $\beta$ .

Για να βρω τα  $\lambda$  και  $\mu$  χρειάζομαι δύο εξισώσεις για να λύσω ένα απλό σύστημα.

Γράφω πρώτα την εξής πρόταση:

- Η  $f$  έχει ακρότατο στο  $x = a$  τον αριθμό  $\beta$  σημαίνει

$$f(a) = \beta \quad \text{και} \quad f'(a) = 0$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις θα μου δώσουν τα  $\lambda, \mu$ .

- Ελέγχω αν για τις τιμές που βρήκα αν αλλάζει η μονοτονία στο  $x_0$ . Μόνο αν αλλάζει δέχομαι τις τιμές που βρήκα.