ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΤΟΥΣ ΤΥΠΟΥΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1. Η δυναμοσυνάρτηση

$$f(x) = x^{\rho}$$

όπου ο εκθέτης ρ είναι **ρητός,** δηλαδή είναι αριθμός ακέραιος ή κλάσμα ακεραίων αριθμών.

Ο γενικός τύπος της παραγώγου είναι

$$(x^{\rho})' = \rho \cdot x^{\rho-1}$$

Αυτό που αλλάζει είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και της παραγώγου της, ανάλογα με τον εκθέτη.

i. Μια **φυσική** δύναμη του x στον παρονομαστή γράφεται πρώτα ως εξής

$$\frac{1}{x^{\nu}} = x^{-\nu}, x \neq 0 \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Οπότε

$$\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = (x^{-\nu})' = -\nu \cdot x^{-\nu-1}, x \neq 0$$

Παραδείγματα:

- $(x^3)' = 3 \cdot x^{3-1} = \mathbf{3 \cdot x^2}\ , \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$
- $(x^5)' = 5 \cdot x^{5-1} = \mathbf{5 \cdot x^4}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\boldsymbol{\frac{1}{x^2}}\ , \boldsymbol{x \neq 0}$
- $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = -\boldsymbol{\frac{2}{x^3}}\ , \boldsymbol{x \neq 0}$
- $\left(\frac{x^2}{x^5}\right)' = \left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3 \cdot (x^{-3-1})' = -3x^{-4} = -\boldsymbol{\frac{3}{x^4}}\ , \boldsymbol{x \neq 0}$

ii. Μια ρίζα του x, όχι μόνο τετραγωνική αλλά οποιασδήποτε τάξης, γράφεται ως εξής

$$\sqrt[\nu]{x} = x^{\frac{1}{\nu}}\ , x \geq 0$$

Οπότε

$$\left(\sqrt[\nu]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)' = \frac{1}{\nu} \cdot x^{\frac{1}{\nu}-1}\ ,\ \ x > 0$$

Προσέξετε ότι **δεν ορίζεται η παράγωγος αυτή ούτε στο 0**, παρόλο που ανήκει στο πεδίο ορισμού της αρχικής συνάρτησης.

Εξήγηση :

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη και στο 0 και

$f'(0) = a \in \mathbb{R}$

Τότε αν υψώσω και τα δύο μέλη στο τετράγωνο έχω

$$f^2(x) = x$$

Άρα

$\left(f^2(x)\right)' = (x)' \Leftrightarrow$ $\quad$ $(\varepsilon\varphi\alpha\rho\mu\acute{o}\zeta\omega\ \tau o\nu\ \kappa\alpha\nu\acute{o}\nu\alpha\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\gamma\iota\sigma\eta\varsigma\ \sigma\acute{\upsilon}\nu\theta\varepsilon\tau\eta\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma)$

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

$2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = 1 \qquad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \geq 0$

Θέτω όπου x το 0 και η παραπάνω ισότητα γίνεται:

$2 \cdot f(0) \cdot f'(0) = 1 \ \Rightarrow \ 2 \cdot \sqrt{0} \cdot a = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$,άτοπο

Παραδείγματα:

Εδώ θα χρησιμοποιήσω και τον τύπο:

$$x^{\frac{\lambda}{\nu}} = \sqrt[\nu]{x}^{\,\lambda}, \qquad \alpha\nu\ \ x \geq 0$$

- $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$, $\boldsymbol{x} > 0$
- $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}^2} = \boldsymbol{\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x}^2}}$, $\boldsymbol{x} > 0$
- $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)' = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}-1} = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{5}{4}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$

$= \boldsymbol{-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}^5}}$, $\boldsymbol{x} > 0$

Βασικές ασκήσεις

$\boldsymbol{A1}$ Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης f στο $x_o = -1$

iii. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της καμπύλης της f στο σημείο της $A\big(-1, f(-1)\big)$

Απάντηση

i. Η παράσταση $f(x)$ ορίζεται όταν το υπόρριζο είναι ≥ 0

Δηλαδή: $x^2 \geq 0,\ \textit{που ισχύει για κάθε}\ x \in \mathbb{R}$

Άρα πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R}$

ii. Προσοχή στο σημείο αυτό. Μου ζητάει την παράγωγο σε **αρνητικό** αριθμό του πεδίου ορισμού. Στην περίπτωση θα γράψω ως δύναμη την συνάρτηση **μόνο** με τον παρακάτω τρόπο:

$f(x) = (x^2)^{\frac{1}{3}}, \acute{o}\tau\alpha\nu\ x < 0$

Άρα σύμφωνα με τον κανόνα της παραγώγου σύνθετης συνάρτησης έχω:

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^2)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (x^2)' = \frac{1}{3} \cdot (x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x \Rightarrow$

$\boldsymbol{f'(x)} = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \cdot \boldsymbol{(x^2)^{-\frac{2}{3}}} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} < 0$

Θέτω όπου x το -1 και βρίσκω:

$f'(-1) = \frac{2}{3} \cdot ((-1)^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-1) = \frac{2}{3} \cdot 1^{-\frac{2}{3}} \cdot (-1) = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot (-1) = -\frac{2}{3}$

iii. Η εφαπτομένη (ε) της καμπύλης της f στο σημείο $A\big(-1, f(-1)\big)$ έχει εξίσωση:

$$y = \alpha x + \beta\ (1)$$

- $\alpha = f'(-1) = -\frac{2}{3}$
- $f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2} = \sqrt[3]{1} = 1$

Άρα το σημείο $A = (-1,1)$

Για $x = -1, y = 1$ η (1) γίνεται

$1 = -\frac{2}{3} \cdot (-1) + \beta \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{3} + \beta \Leftrightarrow \beta = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Επομένως η εξίσωση της (ε) είναι :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

$\boldsymbol{A2}$ Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{x-1} \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt{x-1}}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

ii. Να αποδείξετε ότι

$$g(x) = \frac{1}{x-1} \ \ , \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x > 1$$

iii. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} \ \ , \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x > 1$$

Απάντηση

i. Η παράσταση $g(x)$ ορίζεται όταν ισχύει:

$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Δηλαδή πεδίο ορισμού είναι το $A = (1, +\infty)$

ii. Για $x > 1$, έχω:

$$g(x) = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{6}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{3}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}}} =$$

$$\frac{1}{(x-1)^{\frac{6}{6}}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{g(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x-1}} \ \ , \boldsymbol{x} > 1$$

iii. Το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{g'(x+h) - g'(x)}{h}$$

ισούται με την $g''(x)$.

Θα βρω πρώτα την $g'(x)$ και μετά την $g''(x)$ με τους κανόνες παραγώγισης.

$$g(x) = \frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1} \, , x > 1$$

$g'(x) = -1 \cdot (x-1)^{-1-1} \cdot (x-1)' = -(x-1)^{-2} \cdot (1-0) = \boldsymbol{-(x-1)^{-2}}$

Άρα

$g''(x) = \left(g'(x)\right)' =$

$[-(x-1)^{-2}]' =$

$-(-2) \cdot (x-1)^{-2-1} \cdot (x-1)' =$

$2 \cdot (x-1)^{-3} \cdot (1-0) =$

$2 \cdot (x-1)^{-3}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{g''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}}, \qquad \boldsymbol{x} > 1$

$\boldsymbol{A3}$ Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x}{|x|} \ , x \neq 0$$

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g

Απάντηση

Στην περίπτωση που υπάρχει απόλυτο, πρώτα διακρίνω περιπτώσεις για να εξαφανιστεί το απόλυτο.

- Αν $x > 0$, το $|x| = x$, οπότε

$g(x) = \frac{x}{x} = 1$

Και άρα

$g'(x) = (1)' = 0$

- Αν $x < 0$, το $|x| = -x$, οπότε

$g(x) = \frac{x}{-x} = -1$

Και άρα

$g'(x) = (-1)' = 0.$

$\boldsymbol{A4}$ Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x^2}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

ii. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f

Απάντηση

i. Η παράσταση $f(x)$ ορίζεται όταν:

$x^2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x

Άρα πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$.

ii. Απλοποιώ πρώτα τον τύπο και έχω:

$f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, $x \in \mathbb{R}$

- Στο $x = 0$ η συνάρτηση δεν παραγωγίζεται (από την θεωρία)
- Αν $x > 0$, τότε $f(x) = x$ οπότε $f'(x) = (x)' = 1$
- Αν $x < 0$, τότε $f(x) = |x| = -x$ οπότε $f'(x) = (-x)' = -1$

Δηλαδή

$$f'(x) = \begin{cases} 1, αν\ x > 0 \\ -1, αν\ x < 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{A5}$ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 6x + |x| - 2,\ x \leq 0$

i. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης h.

ii. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) + 2}{h}$$

Απάντηση

i. Για $x \leq 0$ ο τύπος γράφεται

$f(x) = 6x + (-x) - 2 = 5x - 2$

Οπότε

$f'(x) = (5x - 2)' = (5x)' - (2)' = 5 \cdot 1 - 0 = 5, για\ κάθε\ x \geq 0$

ii. Πάντα στην περίπτωση αυτή κοιτώ μήπως το κλάσμα που δίνεται είναι ο λόγος μεταβολής. Βλέπω το h μόνο του μέσα στην f και σκέφτομαι τον λόγο μεταβολής στο 0.

$f(0) = 5 \cdot 0 - 2 = -2$

Άρα το όριο γράφεται

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - (-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

Το οποίο ισούται με το $\boldsymbol{f'(0) = 5}$ από το πρώτο ερώτημα