1. ΠΡΩΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έχω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A.

Σε κάθε x του A στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη αντιστοιχώ το όριο του λόγου μεταβολής στο x. Δηλαδή το

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Με αυτήν την αντιστοίχιση ορίζεται μια νέα συνάρτηση που ονομάζεται παράγωγος της συνάρτησης f και την συμβολίζουμε με f'.

Συνοπτικά:

- Ο τύπος της 1ης παραγώγου είναι

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Το πεδίο ορισμού είναι εκείνα τα x στο πεδίο ορισμού A της f στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη.

2. ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Εάν f είναι και συνάρτηση και f' είναι η παράγωγος συνάρτηση της f, τότε δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f ονομάζουμε την παράγωγο της f' και την συμβολίζουμε με f''.

Δηλαδή:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

3. Παραδείγματα

4.1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να βρείτε την συνάρτηση f' με τον ορισμό.

Απάντηση

i. $f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^3 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 \neq 1^3 \Leftrightarrow x \neq 1$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

ii. Πάντα το πρώτο που κοιτώ είναι η απλοποίηση που τυχόν γίνεται

Για κάθε $x \neq 1$ είναι

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3-1} = \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1}$$

• Έστω μια αύξηση $h \neq 0$.

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\overbrace{1}^{x-1}}{x+h-1} - \frac{\overbrace{1}^{x+h-1}}{x-1} = \frac{(x-1)-(x+h-1)}{(x+h-1)\cdot(x-1)} =$$

$$\frac{x-1-x-h+1}{(x+h-1)\cdot(x-1)} = \frac{-h}{(x+h-1)\cdot(x-1)}$$

• Ο λόγος μεταβολής είναι:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{-h}{h\cdot(x+h-1)\cdot(x-1)} = \frac{-1}{(x+h-1)\cdot(x-1)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)\cdot(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)(x-1)} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

Δηλαδή:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \ , \ \ x \neq 1 \quad \text{ή αλλιώς} \quad \left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2}, x \neq 1$$

4.2. Για μια συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

$$(1) \quad g(x+h) = x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h, \text{για κάθε } x, h \in \mathbb{R}$$

i. Να βρείτε τον τύπο της g.

ii. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της g.

Απάντηση

i. Στην (1) θέτω όπου h το 0 και γίνεται

$$g(x) = x^2 + 2x\cdot 0 + 0^2 - 2x - 2\cdot 0 = x^2 - 2x, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ii. Έστω μια αύξηση $h \neq 0$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$g(x+h) - g(x) =$$

$$(x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h) - (x^2 - 2x) =$$

$x^2+2xh+h^2-2x-2h-x^2+2x=$

$x^2-x^2-2x+2x+2xh+h^2-2h=$

$2xh+h^2-2h=$

$h(2x+h-2)$

Και ο λόγος μεταβολής είναι

$\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=$

$\dfrac{h(2x+h-2)}{h}=$

$2x+h-2$

$\lim\limits_{h\to 0}(2x+h-2)=2x+0-2=2x-2$

Επομένως έχω

$$g'(x)=2x-2, x\in\mathbb{R}$$

4.3. Για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ ισχύει:

$$(1)\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sqrt{x}\ , \text{για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Να προσδιορίσετε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f.

Απάντηση

Από την (1) έχω ότι:

$f'(x)=\sqrt{x}, \text{για κάθε } x\in(0,+\infty)$

Έστω $h\neq 0$.

Ο λόγος μεταβολής είναι

$\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=$

$\dfrac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$

$\dfrac{\sqrt{x+h}^2-\sqrt{x}^2}{h\cdot\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$

$\dfrac{x+h-x}{h\cdot\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{h}{h\cdot\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$

$\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Άρα

$$f''(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ , \text{για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

4. Παρόμοιες άλυτες

4.1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^3+1}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Απάντηση: $A=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

ii. Να βρείτε την συνάρτηση f' με τον ορισμό.

Απάντηση: $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}, x\neq -1$

4.2. Για μια συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

$$(1)\quad g(x+h)=x^2+2\cdot h\cdot x-4\cdot x+h^2-4\cdot h, \text{για κάθε } x,h\in\mathbb{R}$$

i. Να βρείτε τον τύπο της g.

Απάντηση: $g(x)=x^2-4x$

ii. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της g.

Απάντηση: $g'(x)=2x-4$

4.3. Για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ ισχύει:

$$(1)\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=x^3\ , \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να προσδιορίσετε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f.

Απάντηση: $f''(x)=3x^2$