1. ΛΟΓΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ

f είναι μια **συνεχής** συνάρτηση και x_o ένα ορισμένο σημείο σε διάστημα του πεδίου ορισμού της.

Έστω $h \neq 0$, ώστε το $x_o + h$ να είναι στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού με το x_o.

Το h ονομάζεται «αύξηση του x».

Το κλάσμα

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

ονομάζεται «λόγος μεταβολής» (ή αλλιώς μέση μεταβολή)της συνάρτησης στο σημείο x_o για το διάστημα που ορίζουν οι αριθμοί x_o και $x_o + h$.

Εάν επιχειρήσω να υπολογίσω το όριο του λόγου μεταβολής όταν $h \to 0$, θα διαπιστώσω ότι έχει την μορφή:

$$\frac{f(x_o) - f(x_o)}{0} = \frac{0}{0}$$

2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ ΣΕ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ _ ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της όταν το όριο του λόγου μεταβολής

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Αυτό το όριο ονομάζεται παράγωγος της f στο x_o και συμβολίζεται με $f'(x_o)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1

Στην θέση της αύξησης h μπορώ να έχω <u>οποιαδήποτε άλλη παράσταση του h</u> αρκεί

- **κι αυτή να τείνει στο 0, όταν $h \to 0$**

και

- **όπως εμφανίζεται δίπλα στο x_o να εμφανίζεται και στον παρονομαστή**

Δηλαδή , για παράδειγμα

1. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+\boldsymbol{2h})-f(x_o)}{\boldsymbol{2h}}=f'(x_o)$

2. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+\boldsymbol{5h})-f(x_o)}{\boldsymbol{5h}}=f'(x_o)$ $\quad αλλά$

3. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-\boldsymbol{3h})-f(x_o)}{\boldsymbol{-3h}}=f'(x_o)$

4. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+4h)-f(x_o)}{h}\neq f'(x_o)$

5. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{h}\neq f'(x_o)$

Στο 4 κάνουμε το εξής για να εμφανίσουμε την ίδια αύξηση

$$\frac{f(x_o+4h)-f(x_o)}{h}=4\cdot\frac{f(x_o+4h)-f(x_o)}{4h}$$

Το

$$\lim_{h\to 0}\left(4\cdot\frac{f(x_o+4h)-f(x_o)}{4h}\right)=4\cdot f'(x_o)$$

Στο 5 κάνουμε το εξής για να εμφανίσουμε την ίδια αύξηση

$$\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{h}=(-1)\cdot\frac{f\big(x_o+(-h)\big)-f(x_o)}{(-h)}$$

Το

$$\lim_{h\to 0}\left((-1)\cdot\frac{f(x_o+(-h))-f(x_o)}{(-h)}\right)=(-1)\cdot f'(x_o)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2

Η παράγωγος γράφεται και αλλιώς ως όριο ως εξής , το οποίο μπορούμε να το χρησιμοποιούμε (παρακάτω λυμένα παραδείγματα 4.4 και 4.5)

$$\boldsymbol{f'(x_o)=lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3

Η συνάρτηση

$$y_A=f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)$$

είναι πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού. Η γραφική παράστασή της είναι η ευθεία ε_A που περνά από το σημείο $A\big(x_o,f(x_o)\big)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ ίσο με την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_o.

Η διαφορά των δύο τύπων

$f(x)-\{f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)\}$

μας δείχνει την υψομετρική διαφορά των δύο γραφικών παραστάσεων.

- Για $x=x_o$ οι γραφικές παραστάσεις συμπίπτουν

- Για $x\neq x_o$

$f(x)-f(x_o)-f'(x_o)(x-x_o)=$ $\quad$ *θα βγάλω κοινό παράγοντα το x_o*

$(x-x_o)\left\{\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}-f'(x_o)\right\}=$ $\quad$ *θα θέσω $h=x-x_o$ άρα $x=x_o+h$ όταν $x\to x_o$, το $h\to 0$*

$$h\cdot\left\{\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}-f'(x_o)\right\}\to 0\cdot\big(f'(x_o)-f'(x_o)\big)=0\cdot 0=0$$

Δηλαδή όταν περιοριστώ πολύ κοντά στο x_o, οι γραφικές παραστάσεις βρίσκονται πολύ κοντά η μία στην άλλη.
Για αυτό τον λόγο ονομάζω την ευθεία αυτή

«εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\big(x_o,f(x_o)\big)$»

Συνοπτικά:
Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης συνάρτησης f στο σημείο της $A\big(x_o,f(x_o)\big)$, **εάν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o** είναι :

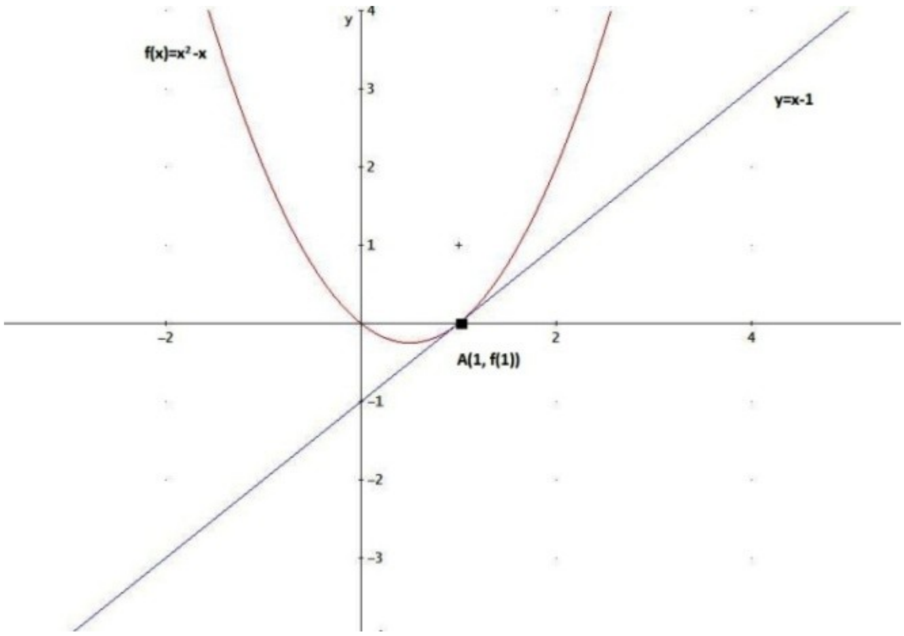
$$y=f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)$$

Χαρακτηριστικό γνώρισμα σε γραφική παράσταση:

- **Λεία** γραφική παράσταση σε ένα σημείο, σημαίνει ότι εκεί η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη.

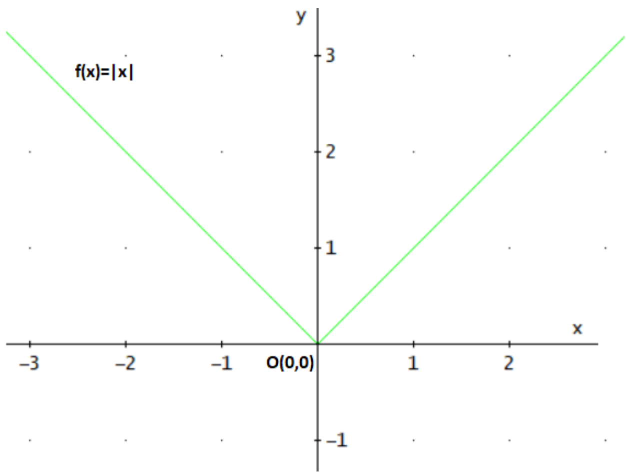
Για παράδειγμα στο $x_o = 1$ η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x$ έχει παράγωγο. Η τιμή της παραγώγου στο 1, ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της $y = \underbrace{1}_{\lambda} x - 1$

Δηλαδή: $f'(x_o) = \lambda = 1$



- **Γωνία** σε σημείο γραφικής παράστασης, σημαίνει ότι εκεί η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη

Για παράδειγμα στο $x_o = 0$ η συνάρτηση $f(x) = |x|$ δεν έχει παράγωγο και στο σημείο αυτό σχηματίζεται γωνία.



3. ΣΧΕΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΥΠΑΡΞΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

- **ΘΕΩΡΙΑ _ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΑΛΛΑ ΥΠΟΝΟΕΙΤΑΙ**

Εάν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o τότε στο σημείο αυτό είναι και συνεχής.

- **ΘΕΩΡΙΑ**

Εάν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ x_o

4.1. Η επόμενη είναι <u>και</u> Θέμα Θεωρίας

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$

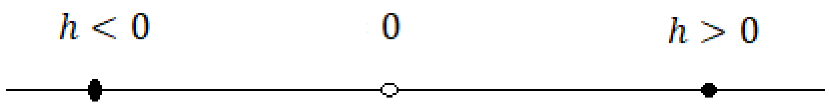
Απάντηση

$$f(0) = |0| = 0 \qquad f(0+h) = f(h) = |h|$$

Για $h \neq 0$ ο λόγος μεταβολής είναι:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Για να απλοποιηθεί η παράσταση πρέπει να γίνει απαλοιφή του απολύτου. Για το λόγο αυτό θα διακρίνουμε τι θέση έχει το h σε σχέση με το 0 στο οποίο τείνει



- Εάν $h < 0$, το κλάσμα γράφεται $\frac{-h}{h} = -1$

Και το $\lim_{h \to 0}(-1) = -1$

- Εάν $h > 0$, το κλάσμα γράφεται $\frac{h}{h} = 1$

Και το $\lim_{h\to 0} 1 = 1$

Τα δύο όρια **δεν** είναι ίσα, άρα δεν υπάρχει το όριο του λόγου μεταβολής, επομένως δεν είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 0.

Παρατήρηση για ερωτήσεις Σ-Λ του 1[ου] Θέματος

Μια συνάρτηση συνεχής σε ένα σημείο x_o <u>δεν</u> είναι αναγκαστικά παραγωγίσιμη στο x_o

Παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ στο $x_o = 0$

4.2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x-1}$$

i. Βρείτε το πεδίο ορισμού της f

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$

Απάντηση

i. $f(x) \in \mathbb{R}$ όταν: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι $A = [1, +\infty)$

ii. $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x-1}$

$f(1) = (1-1)\cdot\sqrt[3]{1-1} = 0\cdot\sqrt[3]{0} = 0\cdot 0 = 0$

Λόγος μεταβολής

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h\sqrt[3]{h}-0}{h} = \frac{h\sqrt[3]{h}}{h} = \sqrt[3]{h}, όπου\ πρέπει\ h > 0$$

$$\lim_{h\to 0}\sqrt[3]{h} = \sqrt[3]{0} = \mathbf{0}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ και $f'(1) = 0$

4.3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\geq 1 \\ \\ 2x, x<1 \end{cases}$$

i. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ με $f'(1)=2$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-2}{\sqrt{h+1}-1}$$

Απάντηση

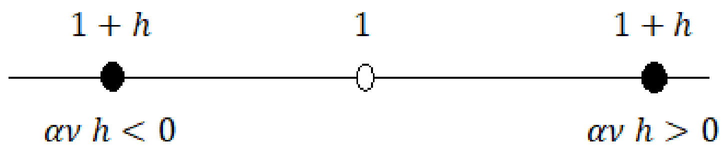
i. $f(1)=1^2+1=1+1=2$

Έστω $h\neq 0$

Θα υπολογίσω πρώτα το λόγο μεταβολής

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

Βοηθητικό σχήμα στις περιπτώσεις όπου στο σημείο που μελετάμε αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης



- Αν $h<0$, είναι $1+h<1$ άρα ο λόγος μεταβολής από τον κάτω κλάδο γράφεται

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{2(1+h)-2}{h}=\frac{2+2h-2}{h}=\frac{2h}{h}=2$$

Και το $\lim_{h\to 0}2=2$.

- Αν $h>0$, είναι $1+h>1$ άρα ο λόγος μεταβολής από τον άνω κλάδο γράφεται

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\{(1+h)^2+1\}-2}{h}$$

$$=\frac{1+2h+h^2+1-2}{h}=\frac{2h+h^2}{h}=\frac{h(2+h)}{h}=2+h$$

Και το $\lim_{h\to 0}(2+h) = 2+0 = 2$.

Τα όρια είναι ίσα με τιμή 2, άρα ο λόγος μεταβολής έχει όριο τον αριθμό 2, δηλαδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ και $f'(1) = 2$.

ii. Θα πολλαπλασιάσω και θα διαιρέσω με την συζυγή παράσταση του παρονομαστή.

$$\frac{f(1+h)-2}{\sqrt{h+1}-1} = \frac{(f(1+h)-2)\cdot\left(\sqrt{h+1}+1\right)}{\left(\sqrt{h+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{h+1}+1\right)} =$$

$$\frac{(f(1+h)-2)\cdot\left(\sqrt{h+1}+1\right)}{\sqrt{h+1}^2-1^2} = \frac{(f(1+h)-2)\cdot\left(\sqrt{h+1}+1\right)}{h+1-1} =$$

$$\frac{(f(1+h)-2)\cdot\left(\sqrt{h+1}+1\right)}{h} = \qquad \text{θα διασπάσω το κλάσμα } \textit{σε γινόμενο}$$

$$\frac{f(1+h)-2}{h}\cdot\left(\sqrt{h+1}+1\right) = \qquad \textit{προσοχή } 2 = f(1)$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\cdot\left(\sqrt{h+1}+1\right) \quad (1)$$

Το

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1) = 2$$

Και το

$$\lim_{h\to 0}\left(\sqrt{1+h}+1\right) = \sqrt{1+0}+1 = 1+1 = 2$$

Επομένως το όριο του γινομένου (1) είναι:

$2\cdot 2 = \mathbf{4}$

4.4. Για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ και $f'(1) = 2$

Απάντηση

Έστω $h \neq 0$. Ο λόγος μεταβολής γράφεται

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}= \qquad \color{red}{\textit{προσοχή στο τέχνασμα στον παρονομαστή}}$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1}= \qquad \color{red}{\textit{θέτω } x=1+h}$$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Όταν $h \to 0$, το $x = 1 + h \to 1$

Σύμφωνα με την υπόθεση, το

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ και $f'(1) = 2$.

4.5. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 3$ με $f'(3) = 5$.

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

Απάντηση

Παρόμοιο ερώτημα υπήρχε στις Πανελλήνιες εξετάσεις ΕΠΑΛ του Ιουνίου 2024

Το κλάσμα γράφεται

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}= \qquad \color{red}{\textit{προσοχή στο τέχνασμα στον αριθμητή}}$$

$$\frac{f(x-3+3)-f(3)}{x-3}= \qquad \color{red}{\textit{θέτω } x-3=h}$$

$$\frac{f(h+3)-f(3)}{h}$$

Όταν $x \to 3$, το $h = x - 3 \to 3 - 3 = 0$

Σύμφωνα με την υπόθεση, το

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+3)-f(3)}{h}=f'(3)=5$$

Άρα $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=5$

4.6. Για μια συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$ ισχύει για κάθε $h\in\mathbb{R}$

$$(1)\quad g(-1+h)=h^2+2h-3$$

i. Να βρείτε την τιμή της g στο -1

ii. Εάν $g(-1)=-3$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο -1 και $g'(-1)=2$.

iii. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(-1+2h)+3}{h}$$

iv. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζουν οι άξονες και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $M\big(-1,g(-1)\big)$.

Απάντηση

i. **Συμφέρει η αντικατάσταση του h με το 0 στην (1)**

Η (1) για $h=0$ γίνεται

$$g(-1)=0^2+2\cdot 0-3=-3$$

ii. Θα εξετάσω το όριο του λόγου μεταβολής

Για $h\neq 0$, είναι

$$\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}=\frac{h^2+2h-3-(-3)}{h}=\frac{h^2+2h-3+3}{h}=\frac{h^2+2h}{h}=$$

$$\frac{h\cdot(h+2)}{h}=h+2$$

Και

$$\lim_{h\to 0}(h+2)=0+2=\mathbf{2}$$

Άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο -1 και $g'(-1)=2$

iii. Δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσω εξ αρχής το όριο. Πρώτα ελέγχω αν σχετίζεται με την τιμή της παραγώγου που έχω βρει.

$$\frac{g(-1+2h)+3}{h}=\frac{g(-1+2h)-(-3)}{h}=\frac{g(-1+2h)-g(-1)}{h}=$$

$$2\cdot\frac{g(-1+2h)-g(-1)}{2h}$$ *πολλαπλασίασα και διαίρεσα με το 2 για να υπάρχει η ίδια αύξηση*

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(-1+2h)-g(-1)}{2h}=g'(-1)=2$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(-1+2h)+3}{h}=2\cdot 2=4$$

iv. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M\big(-1,g(-1)\big)$ είναι

$$y=g(-1)+g'(-1)\big(x-(-1)\big)\xRightarrow{\alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\theta\iota\sigma\tau\acute{\omega}}$$

$$y=-3+2(x+1)=-3+2x+2\Leftrightarrow$$

$$y=2x-1$$

- Για $x=0, y=2\cdot 0-1=-1$

  Άρα η τομή της εφαπτομένης με τον άξονα $y'y$ είναι το $B=(0,-1)$
- Για $y=0$, έχω:

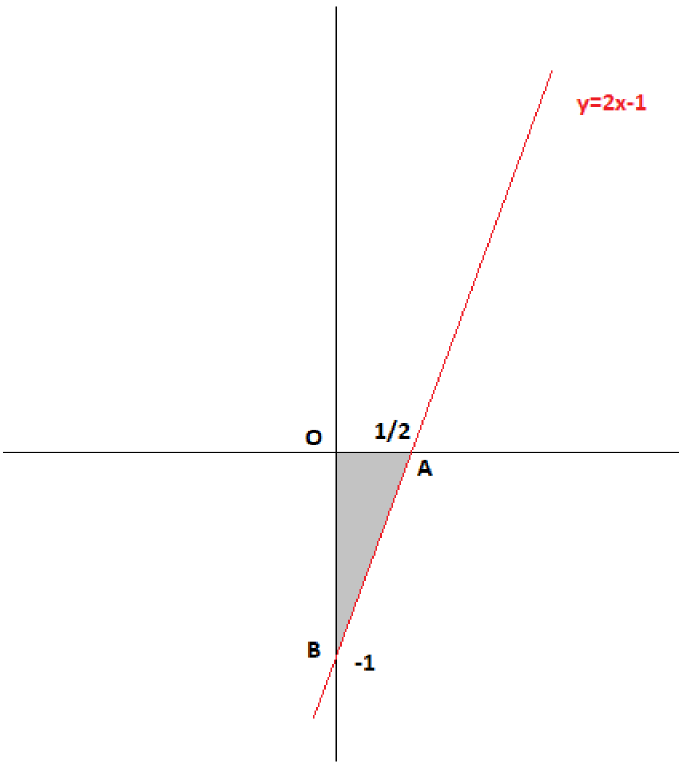
$$0=2x-1\Leftrightarrow 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

  Άρα η τομή της εφαπτομένης με τον άξονα $x'x$ είναι το $A=(\frac{1}{2},0)$
- Το εμβαδό του τριγώνου AOB είναι

$$(AOB)=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}\ \tau.\mu.$$

Προσοχή, στα μήκη βάζουμε την απόλυτη τιμή πάντα.



5. ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $h(x) = x|x-2|$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 2$

(Με το τέχνασμα της άσκησης 4.1 για το πηλίκο $\frac{|h|}{h}$)

Απάντηση:

Δεν είναι γιατί ο λόγος μεταβολής για $h < 0$ έχει όριο -3 αλλά για $h > 0$ έχει όριο 3

5.2. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, x < 2 \\ 3x - 3, x \geq 2 \end{cases}$$

v. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 2$, με $g'(2) = 3$

vi. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h+2) - 3}{\sqrt{h+9} - 3}$$

(Με το τέχνασμα της άσκησης 4.3)

5.3. Για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -4$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 2$ και $f'(2) = -4$

(Με το τέχνασμα της 4.4)

5.4. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 5$ με $f'(5) = 10$.

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$$

(Με το τέχνασμα της 4.5)

Απάντηση: 10

5.5. Για μια συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$ ισχύει για κάθε $h \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$(1) \quad g(1+h) = \sqrt{h^2 + h + 2}$$

i. Να βρείτε το

$$\lim_{h \to 0} g(1+h)$$

ii. Να βρείτε την τιμή της g στο 1.

iii. Εάν $g(1) = 2$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο -1 και $g'(1) = \frac{1}{4}$. (με το τέχνασμα της συζυγούς παράστασης)

iv. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(1-4h) - 2}{h}$$

Απάντηση στο i: $\lim_{h \to 0} g(1+h) = 2$

Απάντηση στο ii: $g(1) = \lim_{h \to 0} g(1+h) = 2$

Απάντηση στο iv: -1