1. ΛΟΓΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ

f είναι μια **συνεχής** συνάρτηση και x_o ένα ορισμένο σημείο σε διάστημα του πεδίου ορισμού της.
Έστω $h \neq 0$, ώστε το $x_o + h$ να είναι στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού με το x_o.
Το h ονομάζεται «αύξηση του x».
Το κλάσμα

$$\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

ονομάζεται «λόγος μεταβολής» (ή αλλιώς μέση μεταβολή)της συνάρτησης στο σημείο x_o για το διάστημα που ορίζουν οι αριθμοί x_o και $x_o + h$.
Εάν επιχειρήσω να υπολογίσω το όριο του λόγου μεταβολής όταν $h \to 0$, θα διαπιστώσω ότι έχει την μορφή:

$$\frac{f(x_o)-f(x_o)}{0} = \frac{0}{0}$$

2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ ΣΕ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ _ ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της όταν το όριο του λόγου μεταβολής

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.
Αυτό το όριο ονομάζεται παράγωγος της f στο x_o και συμβολίζεται με $f'(x_o)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην θέση της αύξησης h μπορώ να έχω <u>οποιαδήποτε άλλη παράσταση του h</u> αρκεί

- **κι αυτή να τείνει στο 0, όταν $h \to 0$**

και

- **όπως εμφανίζεται δίπλα στο x_o να εμφανίζεται και στον παρονομαστή**

3. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η συνάρτηση $y_A = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$ έχει γραφική παράσταση την ευθεία ε_A που περνάει από το σημείο $A\big(x_o, f(x_o)\big)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ ίσο με την παράγωγος της συνάρτησης f στο x_o.

Η διαφορά των δύο τύπων

$f(x) - \{f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)\}$

μας δείχνει την υψομετρική διαφορά των δύο γραφικών παραστάσεων.

- Για $x = x_o$ οι γραφικές παραστάσεις συμπίπτουν
- Για $x \neq x_o$

$f(x) - f(x_o) - f'(x_o)(x - x_o) =$ $\quad \color{red}{\theta\alpha\ \beta\gamma\acute{\alpha}\lambda\omega\ \kappa o\iota\nu\acute{o}\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\alpha\ \tau o\ x_o}$

$$(x - x_o)\left\{\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} - f'(x_o)\right\} = \quad \begin{array}{c}\color{red}{\theta\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\omega\ \ h = x - x_o\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ x = x_o + h} \\ \color{red}{\acute{o}\tau\alpha\nu\ x \to x_o, \tau o\ h \to 0}\end{array}$$

$$h \cdot \left\{\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} - f'(x_o)\right\} \to 0 \cdot \left(f'(x_o) - f'(x_o)\right) = 0 \cdot 0 = 0$$

Δηλαδή όταν περιοριστώ πολύ κοντά στο x_o, οι γραφικές παραστάσεις βρίσκονται πολύ κοντά η μία στην άλλη.
Για αυτό τον λόγο ονομάζω την ευθεία αυτή

«εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\big(x_o, f(x_o)\big)$»

Συνοπτικά:
Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης συνάρτησης f στο σημείο της $A\big(x_o, f(x_o)\big)$, **εάν η $\boldsymbol{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\boldsymbol{x_o}$** είναι :

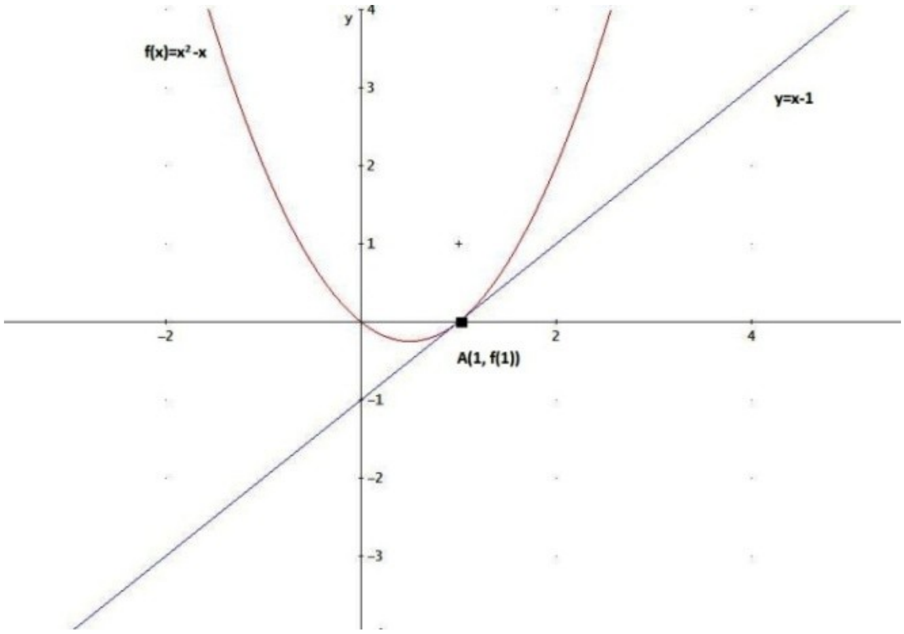
$$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

Χαρακτηριστικό γνώρισμα σε γραφική παράσταση:

• **Λεία** γραφική παράσταση σε ένα σημείο, σημαίνει ότι εκεί η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη.

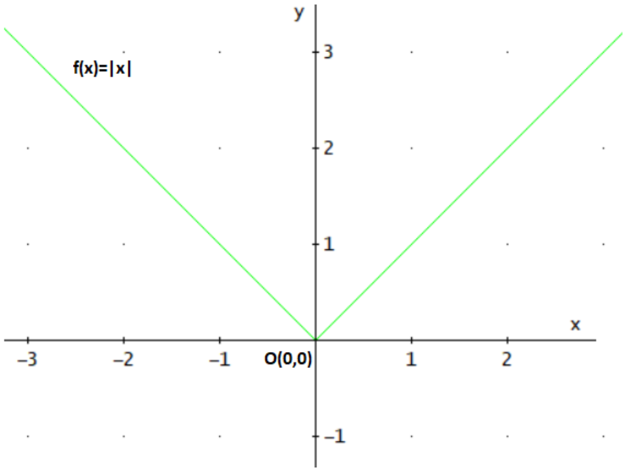
Για παράδειγμα στο $x_o = 1$ η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x$ έχει παράγωγο. Η τιμή της παραγώγου στο 1, ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της $y = \underbrace{1}_{\lambda} x - 1$

Δηλαδή: $f'(x_o) = \lambda = 1$



• **Γωνία** σε σημείο γραφικής παράστασης, σημαίνει ότι εκεί η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη

Για παράδειγμα στο $x_o = 0$ η συνάρτηση $f(x) = |x|$ δεν έχει παράγωγο και στο σημείο αυτό σχηματίζεται γωνία.



4. ΣΧΕΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΥΠΑΡΞΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

• **ΘΕΩΡΙΑ _ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΑΛΛΑ ΥΠΟΝΟΕΙΤΑΙ**

Εάν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o τότε στο σημείο αυτό είναι συνεχής.

• **ΘΕΩΡΙΑ**

Εάν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

5. Η επόμενη είναι και Θέμα Θεωρίας

Η συνάρτηση

$$f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$$

δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$

Παρατήρηση για ερωτήσεις Σ-Λ του 1ου Θέματος

Μια συνάρτηση συνεχής σε ένα σημείο x_o δεν είναι αναγκαστικά παραγωγίσιμη στο x_o

Παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ στο $x_o = 0$

6. ΠΡΩΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έχω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A.

Σε κάθε x του A στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη αντιστοιχώ το όριο του λόγου μεταβολής στο x. Δηλαδή το

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Με αυτήν την αντιστοίχιση ορίζεται μια νέα συνάρτηση που ονομάζεται παράγωγος της συνάρτησης f και την συμβολίζουμε με f'.

Συνοπτικά:

- Ο τύπος της 1ης παραγώγου είναι

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Το πεδίο ορισμού είναι εκείνα τα x στο πεδίο ορισμού A της f στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη.

7. ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Εάν f είναι και συνάρτηση και f' είναι η παράγωγος συνάρτηση της f, τότε δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f ονομάζουμε την παράγωγο της f' και την συμβολίζουμε με f''.

Δηλαδή:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$