ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Σημείο διακλάδωσης (δύο διαφορετικοί τύποι, δεξιά και αριστερά του $\boldsymbol{x_o}$)

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, x < x_o \\ \\ 5x - 3, x \geq x_o \end{cases}$$

Να βρείτε το x_o ώστε η f να είναι συνεχής στο x_o

Απάντηση

Την παρακάτω φράση την γράφουμε αμέσως για να πάρουμε μονάδες έστω και αν δεν συνεχίσουμε καθόλου την επίλυση.

Η $\boldsymbol{f}$ είναι συνεχής στο $\boldsymbol{x_o}$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{f(x_o) = \lim_{x \to x_o} f(x)}$

• $f(x_o) = \boldsymbol{5x_o - 3}$ **(1)**

• Όταν $x < x_o$, τότε το

$\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o}(x^2 + x) = \boldsymbol{x_o^2 + x_o}$ **(2)**

• Όταν $x > x_o$, τότε το

$\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o}(5x - 3) = \boldsymbol{5x_o - 3}$ **(3)**

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o όταν οι παραστάσεις (1), (2), (3) είναι ίσες.

Δηλαδή: $5x_o - 3 = x_o^2 + x_o$

$-x_o^2 - 1x_o + 5x_o - 3 = 0 \Leftrightarrow -x_o^2 + 4x_o - 3 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{1}_{a} \cdot x_o^2 \underbrace{-4}_{\beta} \cdot x_o \underbrace{+3}_{\gamma} = 0$

Υπολογίζω την Διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = +16 - 12 = 4$$

Βρήκα θετική Διακρίνουσα άρα η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές λύσεις

$$x_o = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha}$$

$$\sqrt{\Delta} = 4 \qquad 2 \cdot a = 2 \cdot 1 = 2$$

Αντικαθιστώ

$$x_o = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \text{ή} \\ \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_o όταν $x_o = 3$ ή $x_o = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 2. Παρόμοια

Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} 3x_o x + 1, αν\ x \le x_o \\ 4x,\ \ αν\ x > x_o \end{cases}$$

Να βρείτε το x_o ώστε η g να είναι συνεχής στο x_o.

Απάντηση

Η g είναι συνεχής στο x_o $\Leftrightarrow$ $g(x_o) = \lim_{x \to x_o} g(x)$

• $g(x_o) = 3x_o \cdot x_o + 1 = 3x_o^2 + 1$ **(1)**

• όταν $x < x_o$, τότε

$\lim_{x \to x_o} g(x) = \lim_{x \to x_o}(3x_o x + 1) = 3x_o \cdot x_o + 1 = 3x_o^2 + 1$ **(2)**

• όταν $x > x_o$, τότε

$\lim_{x \to x_o} g(x) = \lim_{x \to x_o} 4x = 4x_o$ **(3)**

Άρα η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_o όταν οι παραστάσεις (1), (2), (3) είναι ίσες.

Δηλαδή:

$$3x_o^2 + 1 = 4x_o$$

$\Leftrightarrow -4x_o + 3x_o^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot x_o^2 - 4 \cdot x_o + 1 = 0$

$\alpha = 3 \quad \beta = -4 \quad \gamma = 1$

$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4 > 0$

$\sqrt{\Delta} = 2 \quad 2\alpha = 2 \cdot 3 = 6$

$$x_o = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{4+2}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ \text{ή} \\ \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Δηλαδή η g είναι συνεχής στο x_o όταν $x_o = \frac{1}{3}$ ή $x_o = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 3.

Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-7x+4}{x^3-1}, \alpha\nu\ x\neq 1\\ a, \qquad \alpha\nu\ \ x=1\end{cases}$$

Να βρείτε το α ώστε η h να είναι συνεχής στο $x_o=1$

Απάντηση

Εδώ δεν έχω δύο τύπους για δεξιά και αριστερά του σημείου, αλλά έχω έναν τύπο να ισχύει για $x\neq x_o$ άρα έχω να υπολογίσω ένα μόνο όριο.

Η $\boldsymbol{h}$ είναι συνεχής στο $\boldsymbol{x_o}$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{h(1)=\lim_{x\to 1} h(x)}$

- $h(1)=\boldsymbol{a}$
- Για το όριο θα χρησιμοποιήσω σχήματα Horner στο $\rho=1$

Αριθμητής: $3x^2-7x+4$

3	-7	4	$\rho=1$
	3	-4	
3	-4	$\mathbf{0}$	

Παρονομαστής: x^3-1

1	0	0	-1	$\rho=1$
	1	1	1	
1	1	1	$\mathbf{0}$	

Για $x\neq 1$, το κλάσμα γράφεται:

$$\frac{(x-1)(3x-4)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{3x-4}{x^2+x+1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x-4}{x^2+x+1}=\frac{3\cdot 1-4}{1^2+1+1}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Επομένως η h είναι συνεχής στο 1 όταν $a=-\frac{1}{3}$

ΑΣΚΗΣΗ 4.

ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΗΝ ΕΚΦΩΝΗΣΗ

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$ και για κάθε ισχύει

$$xf(x) = 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+4} \ \textbf{(1)}$$

Να βρείτε το $f(0)$

Απάντηση

Εάν δοκιμάσω να θέσω όπου $\boldsymbol{x}$ το 0, θα βρω:

$$\mathbf{0 \cdot f(0) = 2\sqrt{1} - \sqrt{4} \Leftrightarrow 0 \cdot f(0) = 0}$$

Αυτή τη ισότητα δεν μπορώ να λύσω για να βρω το $\boldsymbol{f(0)}$ γιατί δεν μπορώ να διαιρέσω με το 0

Αλλά :

Αφού η $\boldsymbol{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{0}$ ισχύει: $\boldsymbol{f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)}$

Άρα αρκεί να βρω το $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x)}$

Η (1) γίνεται για $x \neq 0$

$$\frac{xf(x)}{x} = \frac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+4}}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\overbrace{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+4}}^{\text{είναι } \frac{0}{0} \text{ άρα κάνω μέθοδο συζυγούς}}}{x} =$$

$$\frac{\left(2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+4}\right)\left(2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+4}\right)}{x\left(2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+4}\right)} = \frac{\left(2\sqrt{x^2+1}\right)^2 - \sqrt{x^2+4}^2}{x\left(2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+4}\right)} =$$

$$\frac{2^2\sqrt{x^2+1}^2 - \sqrt{x^2+4}^2}{x\left(2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+4}\right)} = \frac{4(x^2+1) - (x^2+4)}{x\left(2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+4}\right)} = \frac{4x^2 + 4 - x^2 - 4}{x\left(2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+4}\right)} =$$

$$\frac{4x^2 - x^2 + 4 - 4}{x\left(2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+4}\right)} = \frac{3x \cdot x}{\underbrace{x\left(2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+4}\right)}_{\text{το ένα από τα } x \text{ του αριθμητή απολοποιείται με εκείνο του παρονομαστή}}} = \frac{3x}{2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+4}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+4}} = \frac{3 \cdot 0}{2\sqrt{\underbrace{0^2+1}_{1}} + \sqrt{\underbrace{0^2+4}_{4}}} = \frac{0}{2 \cdot 1 + 2} = \frac{0}{4} = \mathbf{0}$$

Επομένως $f(0) = 0$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}2x^2, & \alpha\nu\ \ x<x_o\\ \\ x+1, \alpha\nu\ \ x\geq x_o\end{cases}$$

i. Να βρείτε τις τιμές του $x_o\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής.

ii. Εάν γνωρίζετε ότι $f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$, να αποδείξετε ότι

$$\boldsymbol{f(x)}=\begin{cases}2x^2, & \alpha\nu\ \ x<-\dfrac{1}{2}\\ \\ x+1, \alpha\nu\ \ x\geq-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Απάντηση: $\boldsymbol{i}.\quad \boldsymbol{x_o=1}$ ή $\boldsymbol{x_o=-\frac{1}{2}}$

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}a^2x^3, & \alpha\nu\ \ x<-1\\ \\ 4ax^2+4, \alpha\nu\ \ x\geq 1\end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του $a\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=-1$

Απάντηση: $\boldsymbol{\alpha=-2}$

3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=0$ και για κάθε $x\neq 0$ ισχύει

$$xf(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\ \textbf{(1)}$$

Να βρείτε το $f(0)$.

Απάντηση: $\boldsymbol{f(0)=1}$

4. Η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_o=1$ και για κάθε $h\neq 0$ ισχύει

$$hg(h+1)=|h-1|-1$$

Να βρείτε το $g(1)$.

Απάντηση: $\boldsymbol{g(0)=-1}$

Υπόδειξη: Θα κάνετε τέχνασμα συζυγούς παράστασης. Η συζυγής της $|h-1|-1$ είναι η $|h-1|+1$