

Ασκήσεις στις ιδιότητες των ορίων και το όριο πράξεων συναρτήσεων

1. Εάν $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$, να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} f(h^2 + 3)$

Απάντηση: 1

2. Εάν $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$, να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 4} g\left(\frac{h}{2}\right)$

Απάντηση: 5

3. Το $\lim_{h \rightarrow 0} f(h + 2) = 4$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Απάντηση: 4

Υπόδειξη:

$$x = x - 2 + 2$$

Άρα

$$f(x) = f(x - 2 + 2) = f(h + 2) \quad \text{έθεσα } h = x - 2$$

Όταν $x \rightarrow 2$, το $h = x - 2 \rightarrow 2 - 2 = 0$

Επομένως μπορώ να αξιοποιήσω την υπόθεση της άσκησης.

4. Το $\lim_{h \rightarrow 0} f(h + 1) = 0$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Απάντηση: 0

5. Δίνεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 4}{x - 3} = 5$$

Να βρείτε το

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h + 3) - 4}{h}$$

Απάντηση: 5

Υπόδειξη στον παρονομαστή: $h = h + 3 - 3 = x - 3$ έθεσα $x = h + 3$

Όταν $h \rightarrow 0$, το $h + 3 \rightarrow 3$. Και αξιοποιώ την υπόθεση.

6. Δίνεται ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+4) - 5}{h} = 6$$

Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 4}$$

Απάντηση: 6

Υπόδειξη στον αριθμητή: $x = x - 4 + 4 = h + 4$ έθεσα $h = x - 4$

Όταν $x \rightarrow 4$, το $h = x - 4 \rightarrow 0$. Και αξιοποιώ την υπόθεση.

7. Για δύο συναρτήσεις f, g ισχύουν τα επόμενα

$$\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x)) = l_1 \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -1} (9f(x) - g(x)) = l_2 \in \mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι τα όρια l_1, l_2 είναι οι λύσεις του γραμμικού συστήματος

$$(\Sigma) \begin{cases} l_1 + l_2 = 4 \\ 9l_1 - l_2 = 6 \end{cases}$$

ii. Να βρείτε τα όρια l_1 και l_2 .

Απάντηση: Εφαρμογή των κανόνων . Το σύστημα λύνεται με αντίθετους συντελεστές.

$$l_1 = 1, l_2 = 3$$

8. Για δύο συναρτήσεις f, g ισχύουν τα επόμενα

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) = 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$$

Να αποδείξετε ότι το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$

Υπόδειξη: $f(x) = f(x) + g(x) - g(x)$

Κατόπιν εφαρμογή κανόνα ορίου αθροίσματος και αντικατάσταση των δεδομένων.

9. Το $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{f(x)} = 2$

- i. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$
- ii. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^2(x) - 4f(x)}{\sqrt{f(x)} - 2}$$

Απάντηση στο ii: 16

Υπόδειξη:

i. $f(x) = \sqrt{f(x)}^2$

ii. Στον αριθμητή παραγοντοποίηση και στον παρονομαστή χρήση τεχνάσματος συζυγούς παράστασης για να γίνει απλοποίηση και μετά με τους κανόνες ο υπολογισμός του ορίου.

10. Το $\lim_{x \rightarrow 5} f^3(x) = 8$

- i. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$
- ii. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f^2(x) - 4}{f^3(x) + f(x) - 10}$$

Υπόδειξη:

i. $f(x) = \sqrt[3]{f^3(x)}$

ii. Στον αριθμητή παραγοντοποίηση με ταυτότητα και στον παρονομαστή παραγοντοποίηση με το σχήμα Horner για τον αριθμό $\rho = 2$ για να γίνει απλοποίηση και μετά με τους κανόνες ο υπολογισμός του ορίου.

Απάντηση στο ii: $\frac{4}{13}$

11. Το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -3$

- i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} f^2(x)$
- ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} |f(x)|$

Απάντηση

- i 9
- ii 3

Υπόδειξη στο ii: $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$