ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΑ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΜΕΡΟΣ 1^o

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}0, αν\ x<0\\ \\ 1, αν\ x>0\end{cases} \quad και \quad g(x)=\begin{cases}1, αν\ x<0\\ \\ 0, αν\ x>0\end{cases}$$

i. Να βρείτε την συνάρτηση γινόμενο $f\cdot g$

ii. Να βρείτε το $\lim_{x\to 0}(f\cdot g)(x)$

iii. Να χαρακτηρίσετε την επόμενη πρόταση ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

«Εάν για δύο συναρτήσεις f,g ισχύει ότι $\lim_{x\to 0}(f\cdot g)(x)=0$, τότε

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$ ή $\lim_{x\to 0}g(x)=0$ »

Απάντηση

i. $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

Εάν $x<0$, τότε από τους τύπους έχω $f(x)=0, g(x)=1$ άρα $(f\cdot g)(x)=0\cdot 1=0$

Εάν $x>0$, τότε από τους τύπους έχω $f(x)=1, g(x)=0$ άρα $(f\cdot g)(x)=1\cdot 0=0$

Δηλαδή $(f\cdot g)(x)=0$ για κάθε $x\neq 0$.

ii. Το $\lim_{x\to 0}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to 0}0=0$

iii. Η πρόταση είναι **ψευδής**

Αιτιολόγηση

Παίρνω ως παράδειγμα τις συναρτήσεις f,g του $1^{ου}$ ερωτήματος.

Είδα ότι $\lim_{x\to 0}(f\cdot g)(x)=0$.

Όμως

- Παρατηρώ από τον τύπο της f ότι

όταν $x<0$ το $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ ενώ όταν $x>0$ το $\lim_{x\to 0}f(x)=1$

άρα η f δεν έχει όριο στο 0.

- Παρατηρώ από τον τύπο της g ότι

όταν $x<0$, το $\lim_{x\to 0}g(x)=1$ ενώ όταν $x>0$ το $\lim_{x\to 0}g(x)=0$

άρα ούτε η g έχει όριο στο 0.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Το συμπέρασμα είναι αληθές εάν οι f,g έχουν πραγματικά όρια l_1, l_2 .Γιατί τότε η υπόθεση $\lim_{x\to 0}(f\cdot g)(x)=0$ σημαίνει από τους κανόνες ότι:

$$l_1\cdot l_2=0 \Leftrightarrow l_1=0 \quad ή \quad l_2=0$$

2. Παρόμοια άλυτη

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -3, αν\ x < 0 \\ \\ 3, αν\ x > 0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε τη συνάρτηση $f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0} f^2(x)$

iii. Να χαρακτηρίσετε την επόμενη πρόταση ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

«Εάν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim_{x\to 0} f^2(x) = 9$, τότε

$\lim_{x\to 0} f(x) = 3$ ή $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$ »

Απάντηση

3. Δίνεται ότι δύο συναρτήσεις f, g έχουν στο 1 όρια πραγματικούς αριθμούς l_1, l_2 με $l_1 > 0$ και ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x) + g(x)\big) = -1 \quad και \quad \lim_{x\to 1}(f(x) \cdot g(x)) = -12$$

Να βρείτε το $\lim_{x\to 1}\big(f(x) - g(x)\big)$

Απάντηση

Από τους κανόνες ορίου και πράξης πρώτα θα βρούμε τα l_1 , l_2 και μετά το ζητούμενο όριο.

$\lim_{x\to 1}\big(f(x) + g(x)\big) = -1 \Rightarrow l_1 + l_2 = -1$ (1)

$\lim\limits_{x\to 1}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = -12 \Rightarrow l_1 \cdot l_2 = -12$ (2)

• Λύνω την (1) ως προς l_2: $l_1 + l_2 = -1 \Rightarrow l_2 = -1 - l_1$ (3)

• Αντικαθιστώ στην (2):

$l_1 \cdot l_2 = -12 \Rightarrow l_1 \cdot (-1 - l_1) = -12 \Rightarrow -l_1 - l_1^2 = -12 \Rightarrow l_1^2 + l_1 - 12 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$

$$l_1 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} -\frac{8}{2} = -4\ απορρίπτεται \\ ή \\ \frac{6}{2} = 3\ δεκτή \end{cases}$$

Από την (3) έχω: $l_2 = -1 - l_1 = -1 - 3 = -4$

Άρα το $\lim_{x\to 1}\big(f(x) - g(x)\big) = l_1 - l_2 = 3 - (-4) = 7$

4. Για τις συναρτήσεις f, g δίνεται ότι:

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x)+g(x)\big)=2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{x\to 1} g(x)=-4 \ .$$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει όριο στο 1 έναν πραγματικό αριθμό l_1.

ii. Να αποδείξετε ότι $l_1=6$.

Απάντηση

Προσοχή, δεν μπορώ να εφαρμόσω τους κανόνες ορίου και πράξης γιατί δεν έχω γνωστό ότι και οι δύο συναρτήσεις έχουν πραγματικά όρια, αλλά για την f αυτό είναι το ζητούμενο .

i. Κάνω το τέχνασμα της προσθαφαίρεσης ώστε να μπορώ να εφαρμόσω τους κανόνες ορίου και πράξης

$f(x)=f(x)+g(x)-g(x)=\big(f(x)+g(x)\big)-g(x)$

Άρα η συνάρτηση f έχει όριο στο 1, ως άθροισμα δύο παραστάσεων που έχουν όριο στο 1, πραγματικούς αριθμούς

ii. $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\big(f(x)+g(x)\big)-\lim_{x\to 1} g(x)=2-(-4)=2+4=6$

5. ΠΑΡΟΜΟΙΑ ΑΛΥΤΗ

Για τις συναρτήσεις f, g δίνεται ότι:

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x)+g(x)\big)=1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{x\to 1} f(x)=5 \ .$$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει όριο στο 1 έναν πραγματικό αριθμό l_1.

ii. Να βρείτε το $\lim_{x\to 1} g(x)$

6. Για τις συναρτήσεις f, g δίνεται ότι:

$$\lim_{x\to 1}\big(2f(x)+g(x)\big)=1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{x\to 1}(f(x)-g(x))=5 \ .$$

i. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f , g έχουν όριο στο 1 πραγματικούς αριθμούς l_1, l_2.

ii. Να βρείτε τις τιμές των l_1, l_2 .

Απάντηση

i. **Θέτω**

$$2f(x)+g(x)=\alpha(x)\ (1)$$
$$f(x)-g(x)=\beta(x)\ (2)$$

Προσθέτω κατά μέλη:

$3f(x)=\alpha(x)+\beta(x)\Rightarrow$

$$f(x)=\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{3}$$

Επομένως από τους κανόνες ορίου και πράξης η f έχει πραγματικό όριο l_1

$$l_1=\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1+5}{3}=\frac{6}{3}=2$$

Η (1)⇒ $g(x)=\alpha(x)-2f(x)$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 1} g(x)=1-2\cdot 2=1-4=-3$$

7. ΠΑΡΟΜΟΙΑ ΑΛΥΤΗ

Για τις συναρτήσεις f, g δίνεται ότι:

$$\lim_{x\to 1}\big(3f(x)+g(x)\big)=5 \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{x\to 1}(f(x)-g(x))\ =3$$

i. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f , g έχουν όριο στο 1 πραγματικούς αριθμούς l_1, l_2.

ii. Να βρείτε τις τιμές το όριο της f και το όριο της g .

Απάντηση

8. Για τις συναρτήσεις f, g δίνεται ότι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=3 \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{x\to 2} g(x)=1$$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει όριο στο 2 έναν πραγματικό αριθμό l_1

ii. Να βρείτε την τιμή του l_1

iii. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 2}\big(\sigma\upsilon\nu x\cdot(f(x)-x-1)\big)$$

Απάντηση

i. Εδώ είναι το τέχνασμα του «πολλαπλασιάζω και διαιρώ»

$$f(x)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\cdot g(x)$$

Επομένως η f έχει στο 2 όριο πραγματικό αριθμό από τους κανόνες ορίου και πράξης

ii.

$$\lim_{x\to 2} \mathrm{f(x)}=3\cdot 1=3$$

iii. Εδώ ο τύπος είναι μικτός δηλαδή εμφανίζεται παράσταση που περιέχει γνωστές συναρτήσεις και άγνωστη

Όπου δεν ξέρουμε τον τύπο, βάζουμε στην θέση του $f(x)$ την τιμή του ορίου που έχουμε βρει από πριν. Ενώ στις συνεχείς συναρτήσεις κάνουμε αντικατάσταση στο x

$$\lim_{x\to 2}\big(\text{συνx}\cdot(f(x)-x-1)\big)=\text{συν}2\cdot(3-1-2)=\text{συν}2\cdot(3-3)=\text{συν}2\cdot 0=0$$

9. ΠΑΡΟΜΟΙΑ ΑΛΥΤΗ

Για τις συναρτήσεις f, g δίνεται ότι:

$$\lim_{x\to 3}\frac{g(x)}{f(x)}=3 \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{x\to 3} f(x)=2$$

- **i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει όριο στο 3 έναν πραγματικό αριθμό l_1
- **ii.** Να βρείτε την τιμή του l_1
- **iii.** Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 3}(g(x)-5x+8)^9$$

10. Οι συναρτήσεις g και f είναι συνεχείς στο 0 και το $\lim_{x\to 0}\big(f(x)-g(x)\big)=10$

Εάν $f(0)=6$ να βρείτε το $g(0)$.

Απάντηση

Συνεχής συνάρτηση είναι και η διαφορά $f(x)-g(x)$ αφού κάθε όρος είναι συνεχής.

Δηλαδή ισχύει η ισότητα

$$\lim_{x\to 0}\big(f(x)-g(x)\big)=f(0)-g(0)$$

Αντικαθιστώ τα γνωστά:

$10=6-g(0)\Rightarrow g(0)=6-10=-4$

11. ΠΑΡΟΜΟΙΑ ΑΛΥΤΗ

Οι συναρτήσεις g και f είναι συνεχείς στο 0 και το $\lim_{x\to 0}\big(f(x)+g(x)\big)=5$.

Εάν $f(0)=6$, να βρείτε το $g(0)$

Απάντηση

12. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ οι οποίες είναι τέτοιες ώστε:

- Η συνάρτηση $f+g$ είναι συνεχής στο $x_o=2$

- Η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο $x_o = 2$

i. Να αποδείξετε ότι ούτε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 2$

ii. Εάν $\lim_{x\to 2} f(x) = l^2$ και $f(2) = l + 2$, να αποδείξετε ότι $l \neq -1 \;\; και \;\; l \neq 2$

Απάντηση

i. Θα υποθέσω ότι η f είναι συνεχής και θα φτάσω σε άτοπο αξιοποιώντας και τα άλλα δεδομένα.

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $x_o = 2$.

Θέτω $f(x) + g(x) = a(x)$. Οπότε αν λύσω ως προς την $g(x)$ έχω:

$$g(x) = a(x) - f(x)$$

Άρα η g είναι συνεχής στο $x_o = 2$ ως πράξη (διαφορά) δύο συνεχών συναρτήσεων στο $x_0 = 2$. Αλλά αυτό είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης για την g.

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο 2.

ii. Αφού η f δεν είναι συνεχής στο 2, ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2) \Leftrightarrow \; l^2 \neq l + 2 \Leftrightarrow l^2 - l - 2 \neq 0$

Δηλαδή θα λύσω την εξίσωση $l^2 - l - 2 = 0$ και θα εξαιρέσω τις ρίζες της.

$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$$l = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{4}{2} = 2 \\ \quad ή \\ \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Επομένως: $l \neq -1 \;\; και \;\; l \neq 2$

13. ΠΑΡΟΜΟΙΑ ΑΛΥΤΗ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ οι οποίες είναι τέτοιες ώστε:

- Η συνάρτηση πηλίκο $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο $x_o = 2$
- Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_o = 2$

i. Να αποδείξετε ότι ούτε η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_o = 2$

ii. Εάν $\lim_{x\to 2} g(x) = 2l^2$ και $g(2) = -l + 3$, να αποδείξετε ότι $l \neq 1 \;\; και \;\; l \neq -\frac{3}{2}$

14. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, \quad αν \;\; x < x_o \\ \\ x + 1, αν \;\; x \geq x_o \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του $x_o \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Απάντηση

• Η συνάρτηση f στα διαστήματα $(-\infty, x_o)$ και $(x_o, +\infty)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Επομένως αρκεί να είναι συνεχής και στο x_o.

• $f(x_o) = \boldsymbol{x_o + 1}$ **(1)** (χρησιμοποιούμε εκείνο τον τύπο που έχει στην ανισότητα για τη μεταβλητή το « = »)

• Εάν $x < x_o$, το $\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} 2x^2 = \boldsymbol{2x_o^2}$ **(2)**

• Εάν $x > x_o$, το $\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o}(x+1) = \boldsymbol{x_o + 1}$ **(3)**

Η f είναι συνεχής στο x_o όταν οι παραστάσεις (1), (2) και (3) είναι μεταξύ τους ίσες. Δηλαδή

$2x_o^2 = x_o + 1 \Leftrightarrow 2x_o^2 - x_o - 1 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$

$\sqrt{\Delta} = 3 \qquad 2\alpha = 2 \cdot 2 = 4$

$$x_o = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \dfrac{4}{4} = 1 \\ \text{ή} \\ -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

15. ΠΑΡΟΜΟΙΑ ΑΛΥΤΗ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \alpha\nu \ \ x < x_o \\ 4x - 1, & \alpha\nu \ \ x \geq x_o \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του $x_o \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o.

Απάντηση

16. **ΠΡΟΣΟΧΗ !**

Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x_o x^2 - x, & \alpha\nu \;\; x < x_o \\ -8 + x_o - 2x, & \alpha\nu \;\; x \geq x_o \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του $x_o \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_o.

Απάντηση

• $g(x_o) = -8 + x_o - 2x_o = -8 - x_o$ **(1)**

• Εάν $x > x_o$, το $\lim_{x \to x_o} g(x) = \lim_{x \to x_o}(-8 + x_o - 2x) = -8 + x_o - 2x_o = -8 - x_o$ **(2)**

• Εάν $x < x_o$, το $\lim_{x \to x_o} g(x) = \lim_{x \to x_o}(x_o x^2 - x) = x_o \cdot x_o^2 - x_o = x_o^3 - x_o$ **(3)**

Η g είναι συνεχής στο x_o όταν οι παραστάσεις (1), (2) και (3) είναι μεταξύ τους ίσες. Δηλαδή

$x_o^3 - x_o = -8 - x_o \Leftrightarrow x_o^3 = -8 \Leftrightarrow x_o = -\sqrt[3]{8} = -2$

17. Παρόμοια άλυτη

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x_o^2 x + x_o x^2, & \alpha\nu \;\; x < x_o \\ 2 + (x - x_o)^5, & \alpha\nu \;\; x \geq x_o \end{cases}$$

Απάντηση

18. **ΠΡΟΣΟΧΗ, ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΟ ΣΧΗΜΑ HORNER**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, & \alpha\nu \;\; x < x_o \\ 3 - x_o x, & \alpha\nu \;\; x \geq x_o \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του $x_o \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o.

Απάντηση

• $f(x_o) = 3 - x_o \cdot x_o = 3 - x_o^2$ **(1)**

• Εάν $x > x_o$, το $\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o}(3 - x_o x) = 3 - x_o^2$ **(2)**

• Εάν $x < x_o$, το $\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o}(x^3 + x^2) = x_o^3 + x_o^2$ **(3)**

Η f είναι συνεχής στο x_o όταν οι παραστάσεις (1), (2) και (3) είναι μεταξύ τους ίσες. Δηλαδή

$x_o^3 + x_o^2 = 3 - x_o^2 \Leftrightarrow x_o^3 + x_o^2 + x_o^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_o^3 + 2x_o^2 - 3 = 0$

Είναι 3^ου^ βαθμού άρα για να την λύσω θα αναζητήσω αρχικά μια ρίζα μεταξύ των διαιρετών του σταθερού όρου 3 για να παραγοντοποιήσω.

Διαιρέτες του 3: $\pm 1,\ \pm 3$

Σχήμα Horner για $\rho = 1$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & \rho = 1 \\ & 1 & 3 & 3 & \\ 1 & 3 & 3 & \mathbf{0} & \end{array}$$

Η εξίσωση γράφεται:

$$(x_o - 1)(x_o^2 + 3x_o + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} x_o - 1 = 0 \\ x_o = 1 \end{array} \quad ή \quad \begin{array}{c} x_o^2 + 3x_o + 3 = 0 \\ \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 12 = -3 < 0 \\ \text{επομένως αδύνατη} \end{array}$$

Άρα $x_o = 1$

19. Παρόμοια άλυτη με το σχήμα Horner

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, & αν\ \ x < x_o \\ 2 - 2x^2, & αν\ \ x \geq x_o \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του $x_o \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o.

ΑΛΛΕΣ ΑΛΥΤΕΣ

20. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & αν\ \ x < x_o \\ x + 1, & αν\ \ x \geq x_o \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του $x_o \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Απάντηση: $\boldsymbol{x_o = 1}$ ή $\boldsymbol{x_o = -\frac{1}{2}}$

21. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} a^2x^3, & αν\ \ x < -1 \\ 4ax^2 + 4, & αν\ \ x \geq 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = -1$

Απάντηση: $\boldsymbol{\alpha = -2}$

22. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 0$ και για κάθε $x \neq 0$ ισχύει

$$xf(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \ \mathbf{(1)}$$

Να βρείτε το $f(0)$.

Απάντηση: $f(0) = 1$