ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΜΕ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x|x-1| - |x-1|}{x^2 - 2x + 1}$$

i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της f

ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f και να εξετάσετε το $\lim_{x\to 1} f(x)$

iii. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} f(x)\,, x \neq 1 \\ a, \qquad x = 1 \end{cases}$$

Όπου το a είναι ένα πραγματικός αριθμός. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του a για την οποία η g είναι συνεχής στο $x_o = 1$.

Απάντηση

i. $f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ο\ παρονομαστής\ είναι\ διάφορος\ του\ μηδενός$

Παρονομαστής: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Άρα πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

ii. Οπωσδήποτε θα κάνω παραγοντοποίηση και απλοποίηση για να μπορέσω να κάνω την γραφική παράσταση.

Για $x \neq 1$ έχω:

$$f(x) = \frac{|x-1|(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{|x-1|}{x-1}$$

- Εάν $x < 1$ τότε $x - 1 < 0$ δηλαδή $|x-1| = -(x-1)$

και επομένως

$$f(x) = -\frac{x-1}{x-1} = -1$$

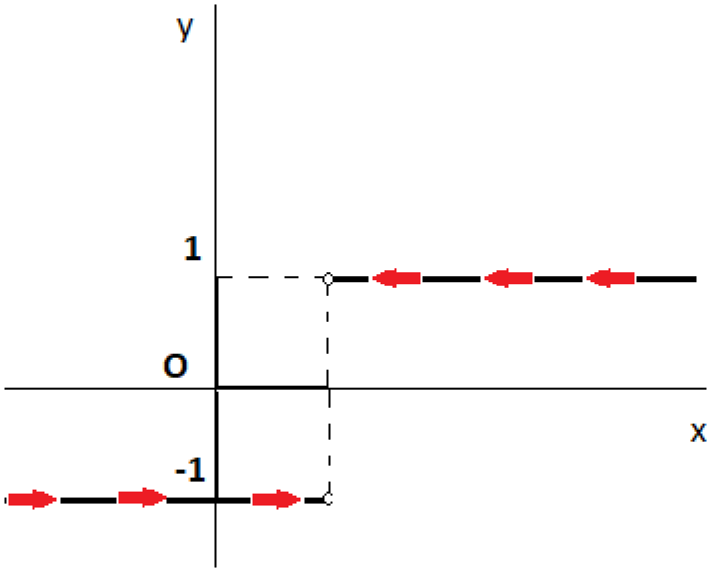
- Εάν $x > 1$ τότε $x - 1 > 0$ δηλαδή $|x-1| = x - 1$

και επομένως

$$f(x) = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Δηλαδή

$$f(x) = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ x > 1 \\ \\ -1, \alpha\nu\ x < 1 \end{cases}$$



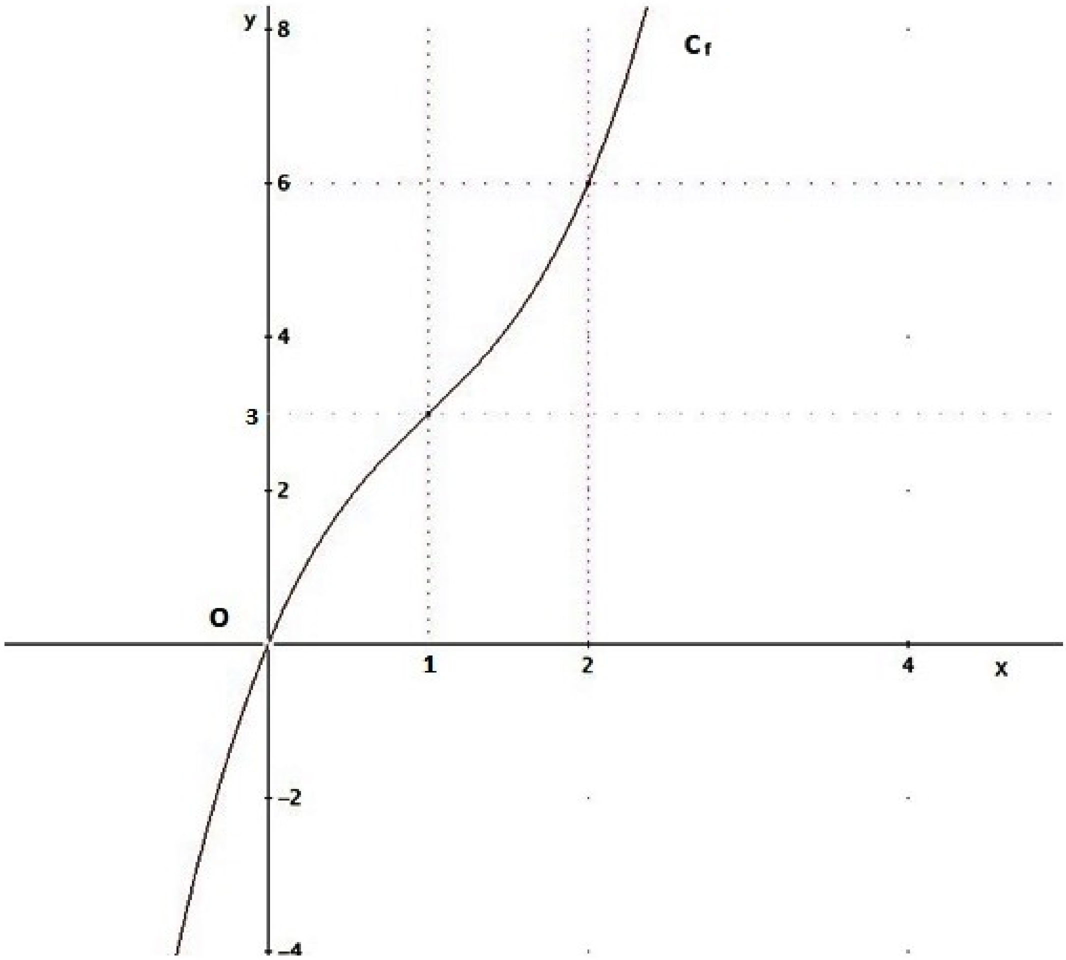
Από την γραφική παράσταση έχω:

- Όταν $x < 1$ το $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$
- Όταν $x > 1$ το $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

Άρα δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f

iii. Από το προηγούμενο ερώτημα δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης g στο 1. Αφού δεν υπάρχει το όριο της g στο 1, δεν υπάρχει τιμή του α για την οποία η g είναι συνεχής στο 1.

2. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης f η οποία είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x)=\frac{f^2(x)-9}{f(x)-3}$$

ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της g και να εξετάσετε το $\lim_{x\to 1} g(x)$

iii. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h(x)=\begin{cases} g(x), x\neq 3 \\ f(a), x=3 \end{cases}$$

Να προσδιορίσετε το $a\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση h να είναι συνεχής στο $x_o=1$.

Απάντηση

i. $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)-3\neq 0 \Leftrightarrow f(x)\neq 3$.

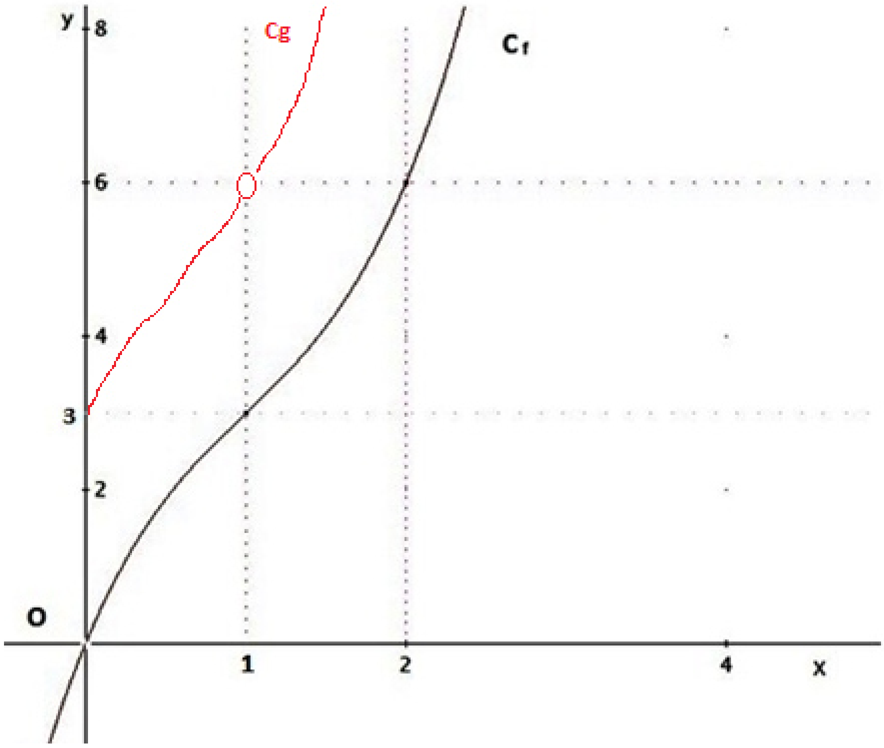
Από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι $f(x)=3 \Leftrightarrow x=1$

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι : $A=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

ii. Για κάθε $x \neq 1$, έχω

$$g(x) = \frac{f^2(x) - 9}{f(x) - 3} = \frac{(f(x) - 3)(f(x) + 3)}{f(x) - 3} = f(x) + 3$$

Άρα η γραφική παράσταση της g είναι η κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 3 μονάδες.



Από την γραφική παράσταση της g βλέπουμε ότι το

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 6$$

iii. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα το όριο

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = 6$$

Η h είναι συνεχής στο $x_o = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to 1} h(x) = h(1) \Leftrightarrow 6 = f(a)$

Από την γραφική παράσταση της f , φαίνεται ότι η εξίσωση $f(a) = 6$ έχει μοναδική λύση το $a = 2$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΕΠΕΞΗΓΗΜΑΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

- Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o στο πεδίο ορισμού της A όταν ισχύει

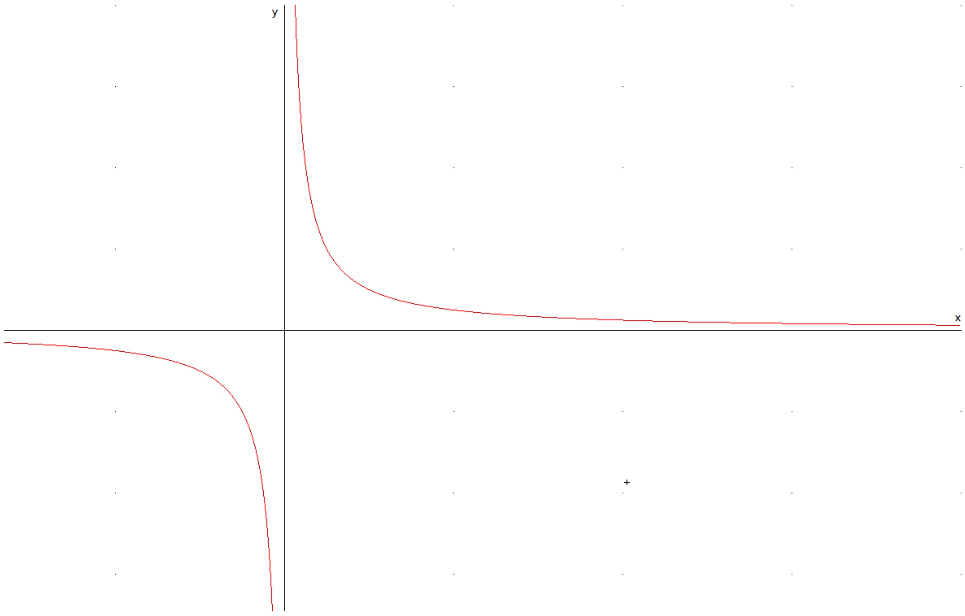
$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι είναι συνεχής , όταν ισχύει

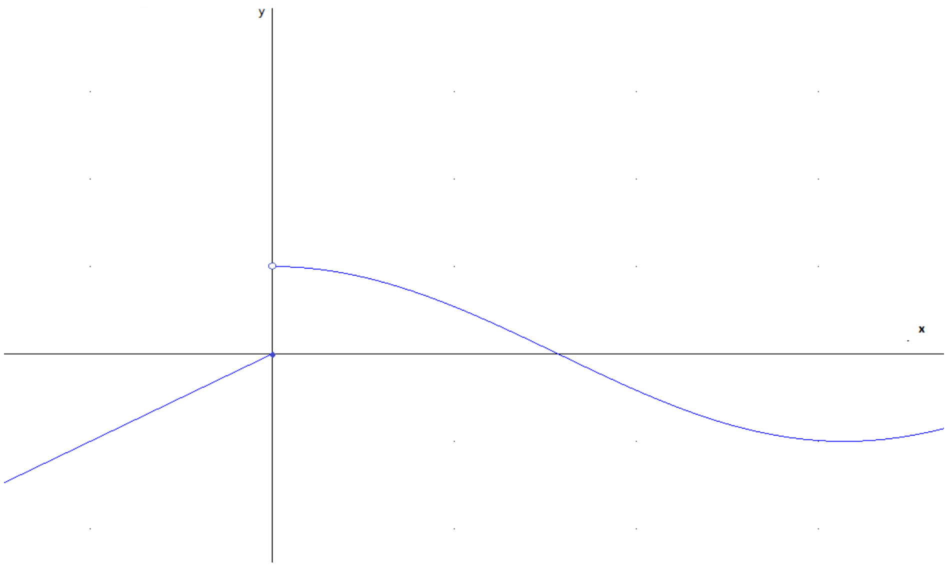
$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

για κάθε $x_o \in A$.

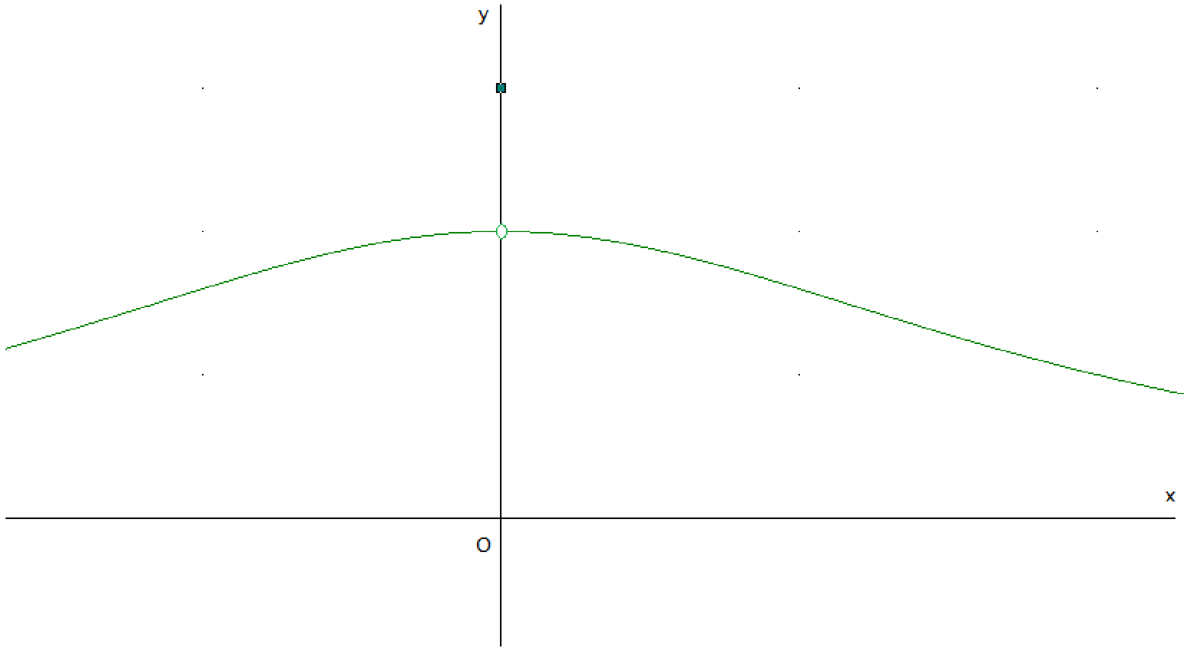
- Το χαρακτηριστικό γνώρισμα στην γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης είναι ότι σε κάθε κλειστό διάστημα είναι μια συνεχής (αδιάκοπη) καμπύλη



Είναι συνεχής στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



Δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αλλά είναι συνεχής στο διαστήματα $(-\infty, 0]$ και στο $(0, +\infty)$



Δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αλλά είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

Εάν οι συναρτήσεις f, g έχουν η κάθε μια τους πραγματικό όριο στο $x_o \in \mathbb{R}$, δηλαδή:

$$lim_{x \to x_o} f(x) = l_1 \quad και \quad \lim_{x \to x_o} g(x) = l_2$$

όπου l_1, l_2 είναι κάποιοι πραγματικοί αριθμοί τότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

i.

$$\lim_{x \to x_o}(a \cdot f(x)) = a \cdot l_1 \text{ για οποιοδήποτε συντελεστή } \alpha \in \mathbb{R}$$

ii.

$$\lim_{x \to x_o}\big(a \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\big) = a \cdot l_1 + \beta \cdot l_2$$

για οποιουσδήποτε συντελεστές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

iii.

$$\lim_{x \to x_o}(f(x)g(x)) = l_1 \cdot l_2$$

iv.

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

Εννοείται ότι στην περίπτωση αυτή ο αριθμός l_2 **δεν είναι μηδέν**

Εάν όμως και ο l_1 και ο l_2 είναι μηδενικοί και η άσκηση ζητά να υπολογιστεί το όριο του πηλίκου, τότε είναι βέβαιο ότι γίνεται παραγοντοποίηση και απλοποίηση της παράστασης και μετά το όριο μπορεί να υπολογιστεί.

v.

$$\lim_{x\to x_o} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{l_1}$$

Εννοείται στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι

$l_1 \geq 0$ αλλά και η συνάρτηση f **δεν παίρνει αρνητικές τιμές**

ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εάν το $\lim_{x\to a} g(x) = x_o$ και το $\lim_{x\to x_O} f(x) = l$, τότε ισχύει

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = l$$

Δηλαδή είναι αδιάφορη η μορφή μέσα στην παρένθεση της συνάρτησης f. Εάν τείνει προς το x_o , τότε το όριο της παράστασης $f\big(g(x)\big)$ παραμένει ίσο με το l.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Οι επόμενες συναρτήσεις είναι συνεχείς, δηλαδή για να βρούμε το όριο σε ένα σημείο x_o **του πεδίου ορισμού της** κάνουμε αντικατάσταση.

- Οι πολυωνυμικές π.χ.

$$f(x) = 5$$
$$g(x) = 2x + 7$$
$$h(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

- Οι ρητές (κλάσματα πολυωνύμων) π.χ.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$
$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$$

- Οι τριγωνομετρικές π.χ.

$$f(x) = \eta\mu x$$
$$g(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

- Σύμφωνα με τους προηγούμενους κανόνες υπολογισμού ορίων συνεχής είναι και κάθε πράξη μεταξύ συνεχών συναρτήσεων, όπως και οι ρίζες συνεχούς συνάρτησης.