ΔΙΔΑΣΚΩΝ:
Ανδρέας Μπελογιάννης

Email: abelogia@hotmail.com

abelogia@sch.gr

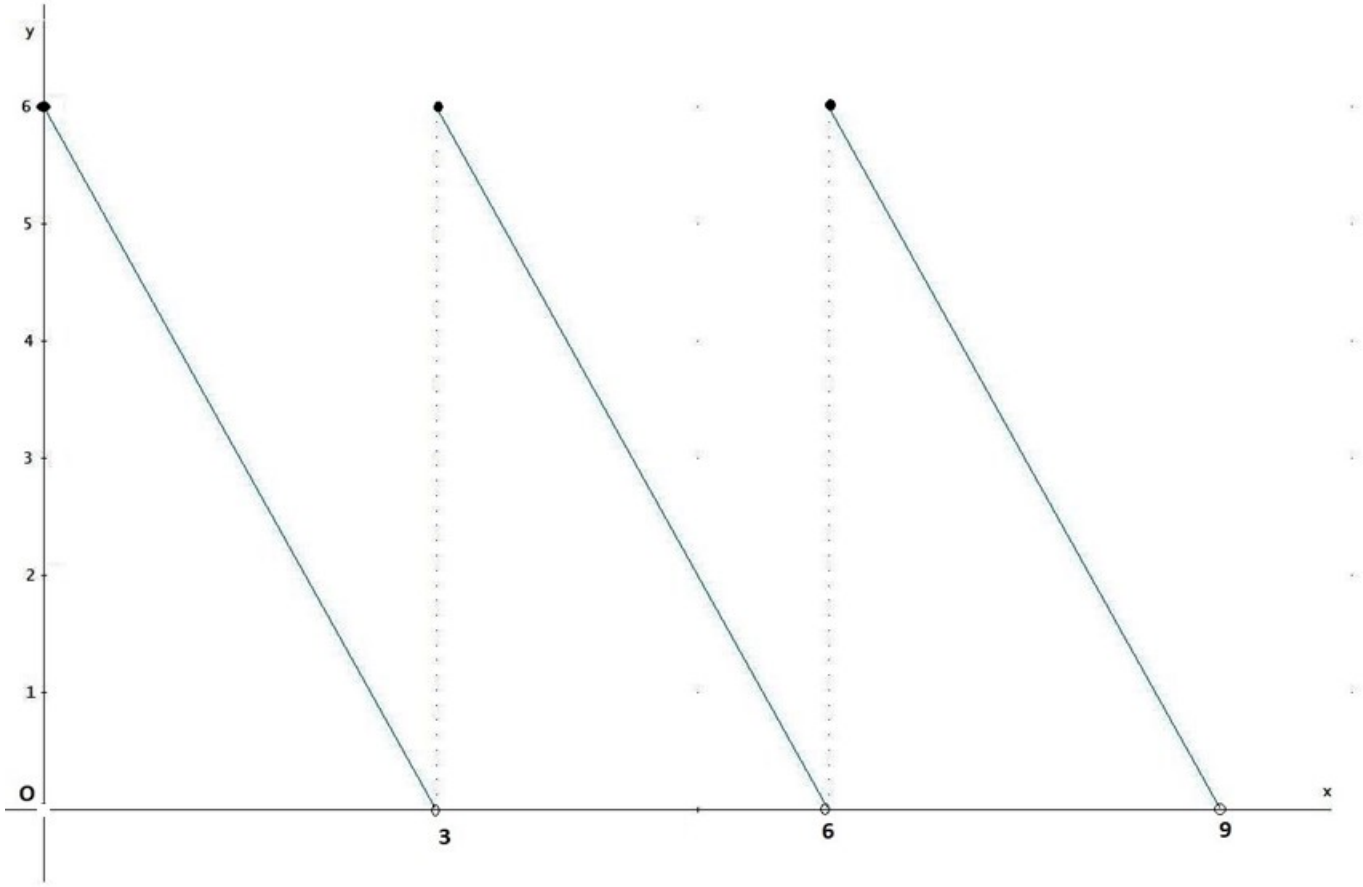
Σύνδεσμος Μαθήματος: ελεύθερη πρόσβαση

https://free.openeclass.org/courses/SC533/

Φάκελος «Έγγραφα»

Όταν τα αρχεία ζητούν κωδικό, θα δίνετε το εξής: EPAL4

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ



2

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης μια συνάρτησης αποθέματος $y = f(x)$.

Η μεταβλητή x εκφράζει τον χρόνο (σε 24ωρα) και η μεταβλητή y εκφράζει το απόθεμα σε μονάδες μάζας.

Η ερμηνεία της γραφικής παράστασης είναι η εξής:

Το μέγιστο απόθεμα στην αποθήκη είναι 6 μονάδες μάζας.

Το απόθεμα λόγω της ζήτησης μειώνεται γραμμικά.

Παρατηρούμε μια περιοδικότητα με περίοδο $T = 3$.

Δηλαδή λίγο πριν αδειάσει η αποθήκη την χρονική στιγμή $x = 3$, ανεφοδιάζεται και γεμίζει.

Η μείωση επαναλαμβάνεται μετά με τον ίδιο τρόπο, αδιάκοπα.

- Ποιο είναι το πεδίο ορισμού ;

Απάντηση

Είναι το $A = [0, +\infty)$

- Όσο ο χρόνος x πλησιάζει την στιγμή 3 , σε ποια τιμή πλησιάζει το απόθεμα $y = f(x)$;

Απάντηση

Από την γραφική παράσταση παρατηρώ ότι το απόθεμα πλησιάζει ολοένα την τιμή 0 όσο ο χρόνος πλησιάζει την στιγμή 3.

Αυτό είναι το ρεαλιστικό επειδή μιλάμε για χρόνο. Αλλά για να συμπεριληφθούν όλες οι περιπτώσεις μεταβλητών δεχόμαστε ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε την στιγμή 3 και από μικρότερες τιμές αλλά και από μεγαλύτερες.

Στην πρώτη περίπτωση θα έγραφα	Στην δεύτερη περίπτωση θα έγραφα
Όταν $x \to 3$ με $x < 3$, τότε $f(x) \to 0$	Όταν $x \to 3$ με $x > 3$, τότε $f(x) \to 6$
Αυτό γράφεται και ως εξής:	Αυτό γράφεται και ως εξής:
$\lim_{x\to 3} f(x) = 0$, όταν $x < 3$	$\lim_{x\to 3} f(x) = 6$, όταν $x > 3$

Αυτοί οι δύο αριθμοί 0 και 6 ονομάζονται πλευρικά όρια της συνάρτησης στο $x_o = 3$

Εδώ όπου τα πλευρικά όρια είναι άνισα, λέμε ότι η συνάρτηση δεν έχει όριο στο $x_o = 3$

- Υπάρχουν χρονικές στιγμές στις οποίες το απόθεμα γίνεται μηδενικό;

Απάντηση

Από την γραφική παράσταση παρατηρώ ότι το απόθεμα δεν γίνεται ποτέ ίσο με το 0.

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

Άλλο πράγμα είναι η τιμή στο x_0 και άλλο πράγμα είναι το όριο της συνάρτησης στο x_o

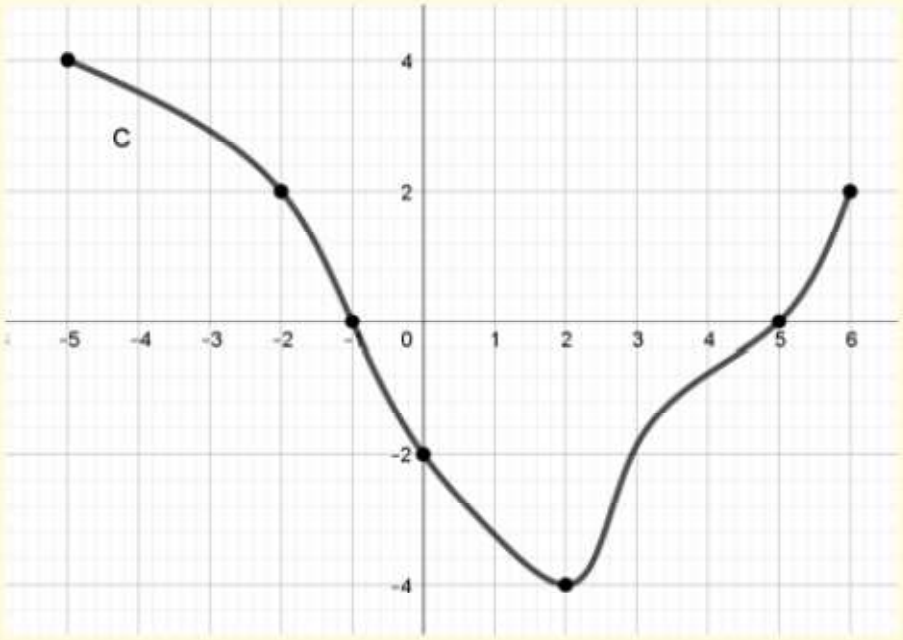
Μπορεί να είναι ίσα όπως στο 3 από δεξιά

Μπορεί και να είναι άνισα, όπως στο 3 από αριστερά.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης f.

Μελετώντας το σχήμα:



α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. 4

(Μονάδες 7)

β) Για τη συνάρτηση f, να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της και να βρείτε το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστό της.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

(Μονάδες 8)

Απάντηση

α) Το πεδίο ορισμού είναι $A = [-5,6]$

β) $f \downarrow [-5,2]$ και $f \uparrow [2,6]$

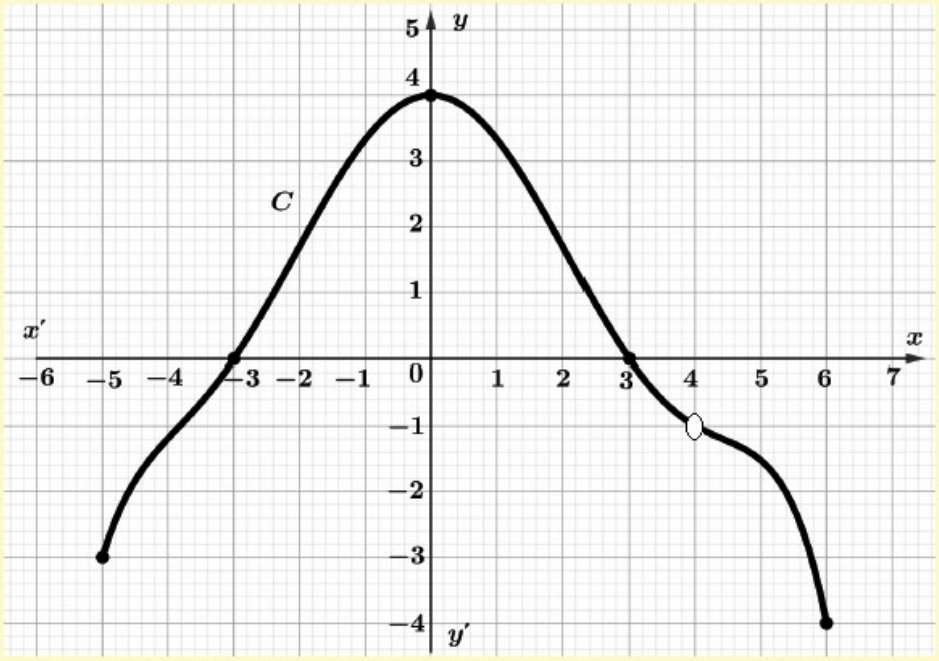
$f_{\min} = -4 = f(2)$ και $f_{max} = 4 = f(-5)$

γ) $\lim_{x\to -2} f(x) = 2$ και $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης f.

Μελετώντας το σχήμα:



α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Για τη συνάρτηση f, να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της και να βρείτε το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστό της.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

(Μονάδες 8)

5

Απάντηση

α) Το πεδίο ορισμού είναι $A = [-5, 4) \cup (4,6]$

β) $f \uparrow [-5,0]$, $f \downarrow [0,4)$ και $f \downarrow (4,6]$

$f_{\max} = 4 = f(0)$

$f_{\min} = -4 = f(6)$

γ) $\lim_{x\to -3} f(x) = 0$ (συμπίπτει στην περίπτωση αυτή και με την τιμή $f(-3)$ και τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_o = -3$)

$\lim_{x\to 4} f(x) = -1$ (εδώ ενώ το όριο υπάρχει, η συνάρτηση δεν έχει τιμή στο $x_o = 4$, **δεν** θα πούμε ότι δεν είναι συνεχής στο 4 γιατί αυτό δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού)

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΜΕ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x|x-1|-|x-1|}{x^2-2x+1}$$

i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της f

ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f και να εξετάσετε το $\lim_{x\to 1} f(x)$

iii. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases} f(x)\,, x\neq 1 \\ a, \qquad x=1 \end{cases}$$

Όπου το a είναι ένα πραγματικός αριθμός. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του a για την οποία η g είναι συνεχής στο $x_o=1$.

Απάντηση

i. $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$ *ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός*

Παρονομαστής: $x^2-2x+1=(x-1)^2$

$(x-1)^2=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Άρα πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

ii. Οπωσδήποτε θα κάνω παραγοντοποίηση και απλοποίηση για να μπορέσω να κάνω την γραφική παράσταση.

Για $x\neq 1$ έχω:

$$f(x)=\frac{|x-1|(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{|x-1|}{x-1}$$

- Εάν $x<1$ τότε $x-1<0$ δηλαδή $|x-1|=-(x-1)$

και επομένως

$$f(x)=-\frac{x-1}{x-1}=-1$$

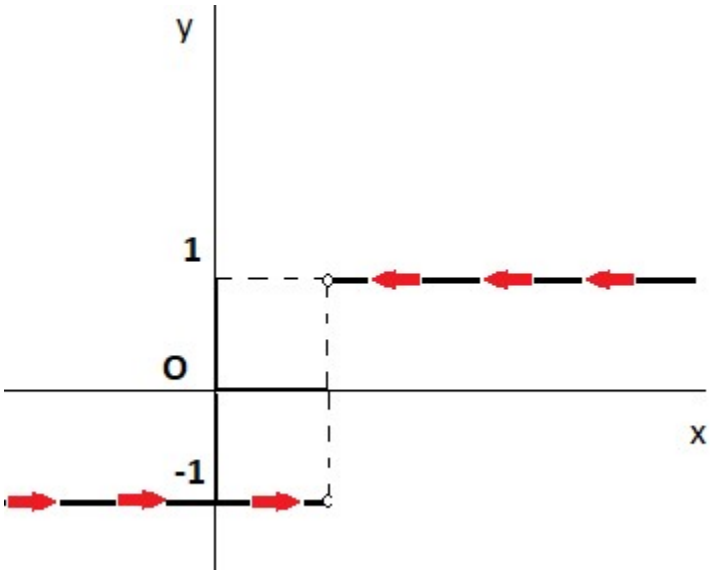
- Εάν $x>1$ τότε $x-1>0$ δηλαδή $|x-1|=x-1$

και επομένως

$$f(x) = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Δηλαδή

$$f(x) = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ x > 1 \\ -1, \alpha\nu\ x < 1 \end{cases}$$



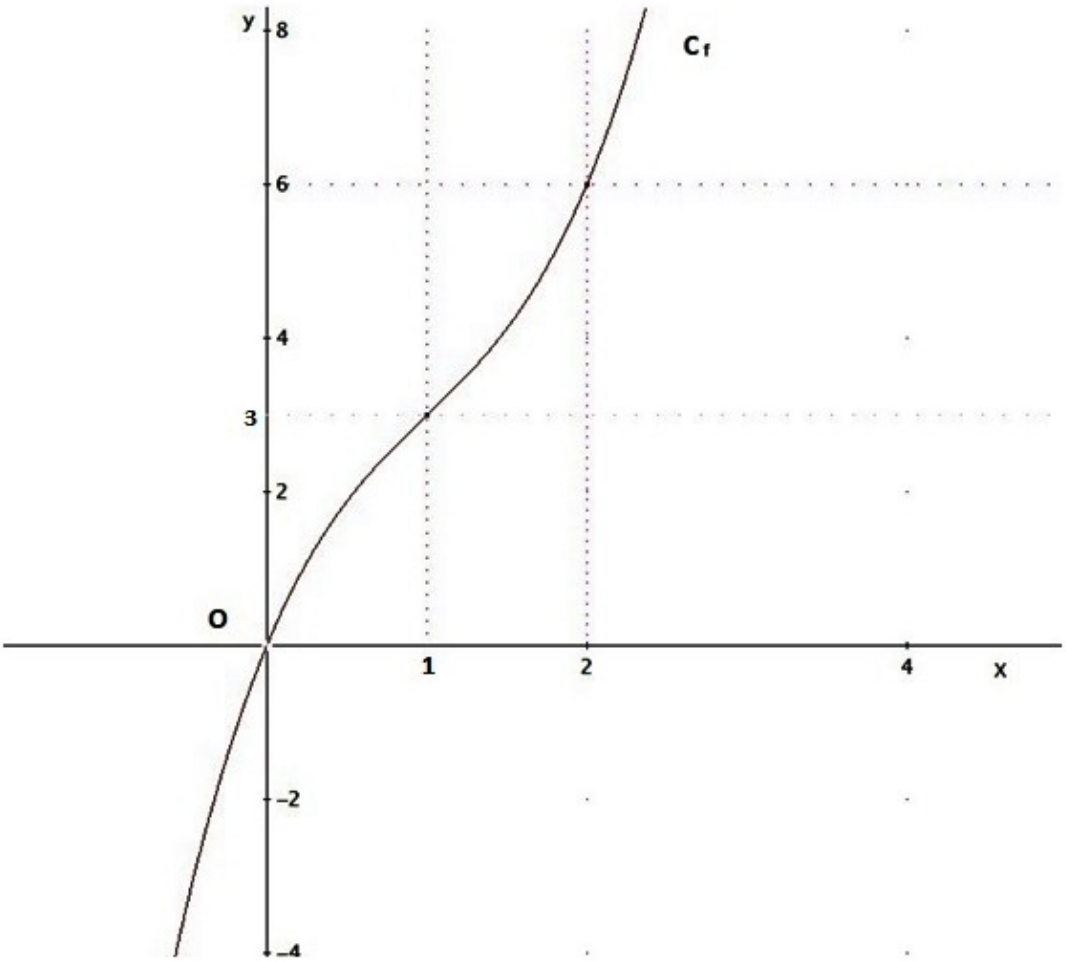
Από την γραφική παράσταση έχω:

- Όταν $x < 1$ το $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$
- Όταν $x > 1$ το $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

Άρα δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f

iii. Από το προηγούμενο ερώτημα δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης g στο 1. Αφού δεν υπάρχει το όριο της g στο 1, δεν υπάρχει τιμή του α για την οποία η g είναι συνεχής στο 1.

2. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης f η οποία είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



8

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f^2(x) - 9}{f(x) - 3}$$

ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της g και να εξετάσετε το $\lim_{x \to 1} g(x)$

iii. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} g(x), x \neq 3 \\ f(a), x = 3 \end{cases}$$

Να προσδιορίσετε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση h να είναι συνεχής στο $x_o = 1$.

Απάντηση

i. $g(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) - 3 \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 3$.

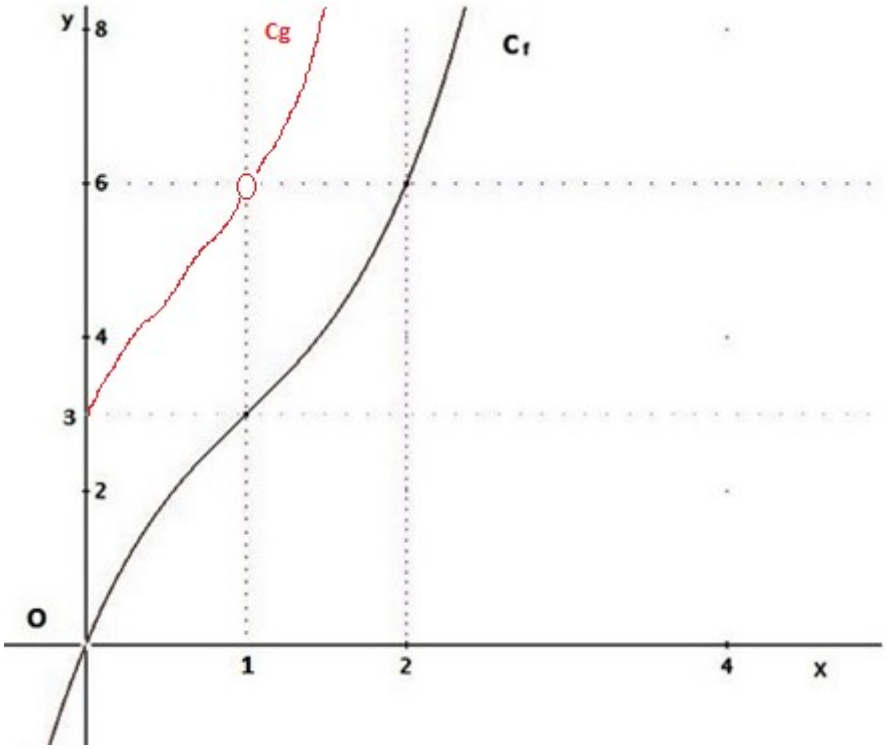
Από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι $f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι : $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

ii. Για κάθε $x \neq 1$, έχω

$$g(x) = \frac{f^2(x) - 9}{f(x) - 3} = \frac{(f(x) - 3)(f(x) + 3)}{f(x) - 3} = f(x) + 3$$

Άρα η γραφική παράσταση της g είναι η κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 3 μονάδες.



Από την γραφική παράσταση της g βλέπουμε ότι το

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 6$$

iii. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα το όριο

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = 6$$

Η h είναι συνεχής στο $x_o = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to 1} h(x) = h(1) \Leftrightarrow 6 = f(a)$

Από την γραφική παράσταση της f , φαίνεται ότι η εξίσωση $f(a) = 6$ έχει μοναδική λύση το $a = 2$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΕΠΕΞΗΓΗΜΑΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

- Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o **στο πεδίο ορισμού της A**

όταν ισχύει

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

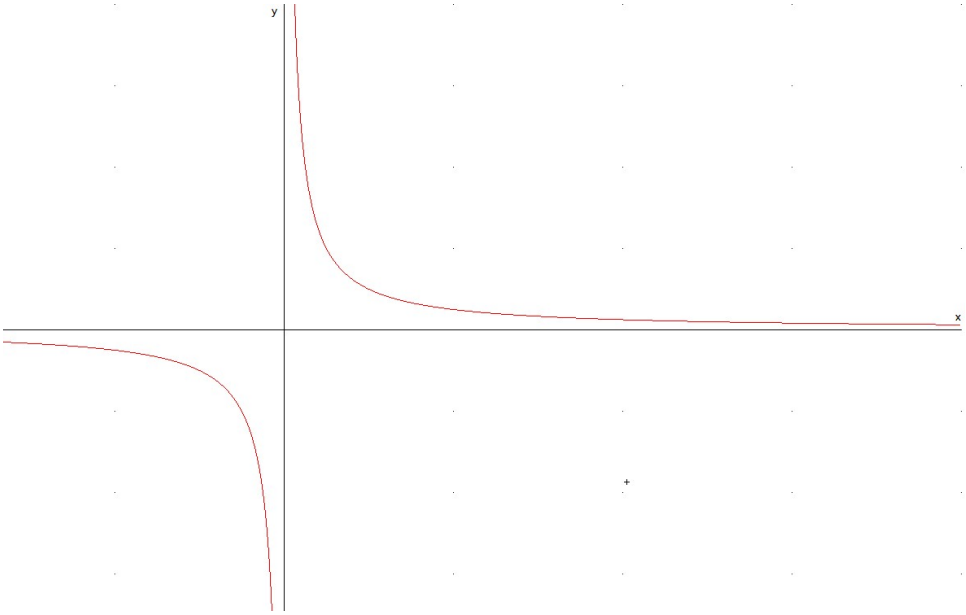
- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι είναι συνεχής , όταν ισχύει

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

για κάθε $x_o \in A$.

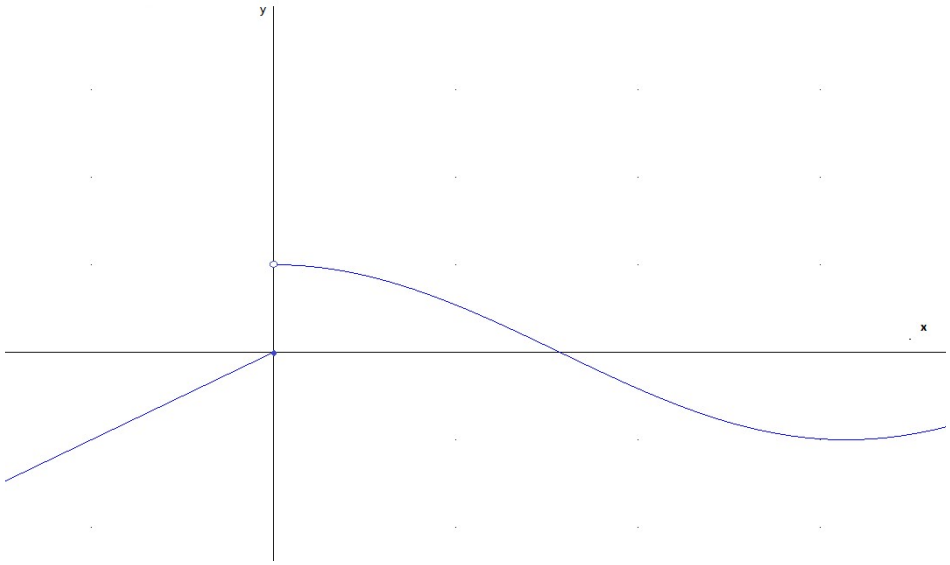
Δηλαδή είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της

- Το χαρακτηριστικό γνώρισμα στην γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης είναι ότι σε κάθε κλειστό διάστημα είναι μια συνεχής (αδιάκοπη) καμπύλη

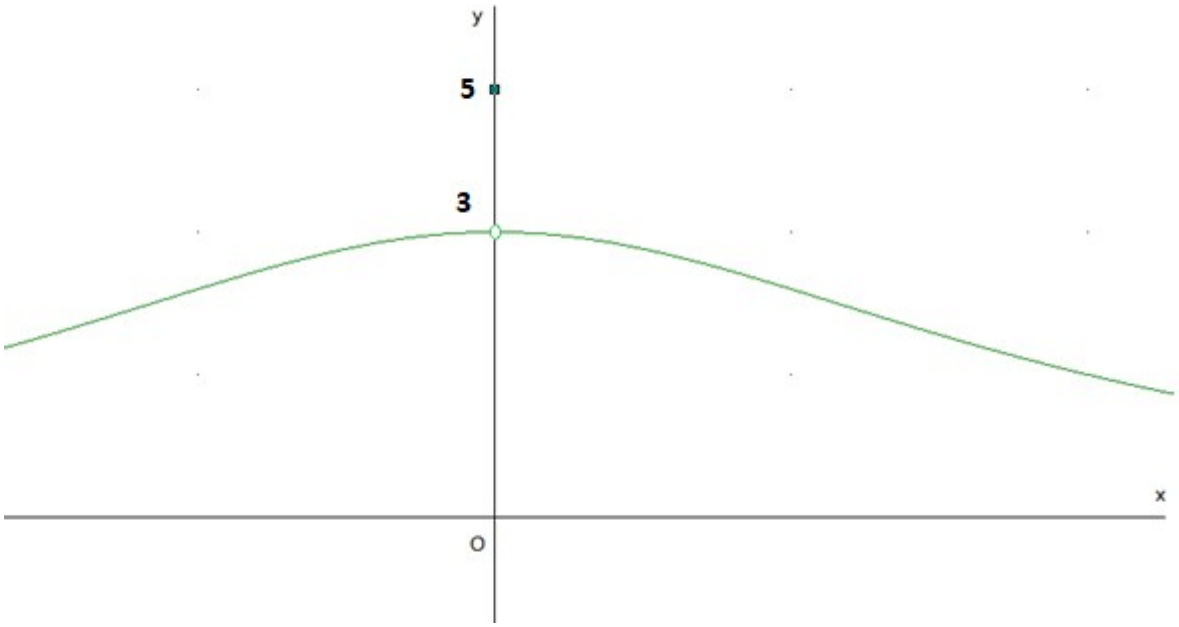


Είναι συνεχής στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού για αυτό υπάρχει η διακοπή στην γραφική παράσταση



Δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αλλά είναι συνεχής στο διαστήματα $(-\infty, 0]$ και στο $(0, +\infty)$
Το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού αλλά μόνο από την αριστερή πλησιάζω στο $f(0)$



Δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αλλά είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$
Το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού , η τιμή στο 0 είναι 5 αλλά το όριο της συνάρτησης είναι 3.

ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

Εάν οι συναρτήσεις f, g έχουν η κάθε μια τους πραγματικό όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή:

$$\boldsymbol{lim_{x\to x_o} f(x) = l_1 \quad και \quad \lim_{x\to x_o} g(x) = l_2}$$

όπου l_1, l_2 είναι κάποιοι πραγματικοί αριθμοί τότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

i.

$$\lim_{x\to x_o}(a\cdot f(x)) = a\cdot l_1$$ για οποιοδήποτε συντελεστή $\alpha \in \mathbb{R}$

ii.

$$\lim_{x\to x_o}\big(a\cdot f(x) + \beta\cdot g(x)\big) = a\cdot l_1 + \beta\cdot l_2$$

για οποιουσδήποτε συντελεστές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

iii.

$$\lim_{x\to x_o}(f(x)g(x)) = l_1\cdot l_2$$

iv.

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

Εννοείται ότι στην περίπτωση αυτή ο αριθμός l_2 **δεν είναι μηδέν**

Εάν όμως και ο l_1 και ο l_2 είναι μηδενικοί και η άσκηση ζητά να υπολογιστεί το όριο του πηλίκου, τότε είναι βέβαιο ότι γίνεται παραγοντοποίηση και απλοποίηση της παράστασης και μετά το όριο μπορεί να υπολογιστεί.

v.

$$\lim_{x\to x_o}\sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{l_1}$$

Εννοείται ότι στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση f **δεν παίρνει αρνητικές τιμές**, δηλαδή είναι $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$ και επίσης είναι $l_1 \geq 0$

ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εάν το $\lim_{x\to a} g(x) = x_o$ και το $\lim_{x\to x_O} f(x) = l$, τότε ισχύει

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = l$$

Δηλαδή αν ολόκληρη η εσωτερική παράσταση $g(x)$ τείνει προς το x_o , τότε το όριο της παράστασης $f\big(g(x)\big)$ παραμένει ίσο με το l.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Οι επόμενες συναρτήσεις είναι συνεχείς, δηλαδή για να βρούμε το όριο σε ένα σημείο x_o **του πεδίου ορισμού της** κάνουμε αντικατάσταση.

- Οι πολυωνυμικές π.χ.

$$f(x) = 5$$

$$g(x) = 2x + 7$$

$$h(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

- Οι ρητές (κλάσματα πολυωνύμων) π.χ.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$$

- Οι τριγωνομετρικές π.χ.

$$f(x) = \eta\mu x$$

$$g(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

- Σύμφωνα με τους προηγούμενους κανόνες υπολογισμού ορίων συνεχής είναι και κάθε πράξη μεταξύ συνεχών συναρτήσεων, όπως και οι ρίζες συνεχούς συνάρτησης.

- Η σύνθεση $f\big(g(x)\big)$ δύο συνεχών συναρτήσεων f, g είναι συνεχής