ΠΩΣ ΑΠΑΝΤΩ ΣΕ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΑΠΑΙΤΟΥΝ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

<u>ΕΝΝΟΕΙΤΑΙ ΟΤΙ</u>

<u>ΓΝΩΡΙΖΩ ΤΟΥΣ ΤΥΠΟΥΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ</u>

1. Μου δίνεται μια συνάρτηση f η οποία έχει στον τύπο της άγνωστη παράμετρο λ και έχω δεδομένο ότι το σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f

Το $\boldsymbol{M(\alpha,\beta)}$ ανήκει στη γραφική παράσταση σημαίνει ότι $\boldsymbol{f(\alpha)=\beta}$

Από την ισότητα αυτή βρίσκω το λ.

2. Μου δίνεται ότι η καμπύλη της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη β και τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη α

Αυτό σημαίνει ότι :

$$f(0)=\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad f(\alpha)=0$$

Από αυτά τα δεδομένα μπορώ να βρω άγνωστες παράμετρο λ,μ στον τύπο της συνάρτησης.

3. Μου δίνεται για μια συνάρτηση f το δεδομένο ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=\beta$$

• Από τον ορισμό της παραγώγου, η παραπάνω ισότητα σημαίνει ότι $f'(\alpha)=\beta$.

Από την ισότητα αυτή, αφού βρω την $f'(x)$ με τους τύπους κα τους κανόνες και θέσω όπου x το α, μπορώ για παράδειγμα να υπολογίσω κάποια άγνωστη παράμετρο λ στον τύπο της f.

4. Μου δίνεται για μια συνάρτηση f το δεδομένο ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=g(x)$$

• Από τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης, η παραπάνω ισότητα σημαίνει ότι: $f'(x)=g(x)$

Από την ισότητα αυτή μπορώ να απαντήσω μετά στα σχετικά ερωτήματα.

5. Μου ζητάει το όριο $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$

• Σίγουρα θα είναι του τύπου $\frac{0}{0}$

• Θα γράψω:

«Παρατηρώ ότι $f(0)=0$

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, το παραπάνω όριο είναι η παράγωγος της συνάρτησης f στο 0»

• Υπολογίζω την $f'(x)$ σύμφωνα με τους βασικούς τύπους και τους κανόνες παραγώγισης και ύστερα θέτω όπου x το 0. Ο αριθμός που προκύπτει είναι το ζητούμενο όριο.

6. *** Μου ζητάει το όριο $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}$

- **Σίγουρα** θα είναι του τύπου $\frac{0}{0}$
- Θα γράψω:

«Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, το παραπάνω όριο είναι η παράγωγος της συνάρτησης f στο α»

Υπολογίζω την $f'(x)$ σύμφωνα με τους τύπους και τους κανόνες των παραγώγων και ύστερα θέτω όπου x το α. Ο αριθμός που προκύπτει είναι το ζητούμενο όριο.

7. Ζητάει για μια συνάρτηση παραγωγίσιμη συνάρτηση f ένα όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{g(h)}$$

το οποίο βλέπω είναι της μορφής $\frac{0}{0}$

- Πολλαπλασιάζω και διαιρώ με το h.
- Το κλάσμα γίνεται:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{h}{g(h)}$$

Το πρώτο όριο είναι η $f'(a)$ που γνωρίζω από κάποια υπόθεση ή θα βρω με τους κανόνες παραγώγισης.

Το δεύτερο όριο που είναι πάλι $\frac{0}{0}$ το υπολογίζω με τεχνάσματα υπολογισμού ορίου ή με τους κανόνες παραγώγισης όπως στην σημείωση 6.

8. Μου ζητάει το ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς τη μεταβλητή x στην τιμή x_o.

- Βρίσκω την $f'(x)$
- Υπολογίζω την τιμή $f'(x_o)$
- Γράφω: ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς x στο x_o είναι $f'(x_o)$ και βάζουμε δίπλα πάντα την μονάδα μέτρησης της $y=f(x)$ προς τη μονάδα μέτρησης του x (για παράδειγμα $m^2/\sec$)

9. Μου ζητάει το ρυθμό μεταβολής συνάρτησης f ως προς τη μεταβλητή x στην τιμή όταν η τιμή της συνάρτησης είναι y_o

- Πρώτα λύνω την εξίσωση $\boldsymbol{f(x)=y_o}$ για να βρω την τιμή x_o της μεταβλητής x
- Βρίσκω την $f'(x)$
- Υπολογίζω την τιμή $f'(x_o)$
- Γράφω: ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης ως προς x στο x_o είναι $f'(x_o)$ και βάζω δίπλα πάντα την μονάδα μέτρησης της $f(x)$ προς τη μονάδα μέτρησης του x (για παράδειγμα $m^2/\sec$)

***Εάν δεν δίνεται ο τύπος της συνάρτησης, πρέπει από τα δεδομένα του προβλήματος να βρω το μέγεθος y ως συνάρτηση $f(x)$ του x ώστε μετά να βρω το ρυθμό μεταβολής του y ως προς x

10. Μου ζητάει το οριακό κόστος παραγωγής x_o μονάδων προϊόντος.

- Βρίσκω την παράγωγο $C'(x)$ της συνάρτησης κόστους η οποία θα δίνεται
- Υπολογίζω την τιμή $C'(x_o)$
- Το οριακό κόστος είναι $C'(x_o)$ $\textit{χρηματικές μονάδες ανά μονάδα προϊόντος}$

11. Μου δίνει την θέση $x(t)$ ενός σημείου που κινείται ευθύγραμμα. Ως χρόνος, είναι $t \geq 0$

i. Μου ζητάει την **μέση ταχύτητα** στο διάστημα χρόνου $[\alpha, \beta]$

Απάντηση

Η μέση ταχύτητα στο διάστημα είναι το κλάσμα: $\bar{\upsilon} = \frac{x(\beta)-x(\alpha)}{\beta-\alpha}$

ii. Μου ζητάει την **ταχύτητα** σε μια χρονική στιγμή t_o

Απάντηση

Η ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_o είναι η παράγωγος της $x(t)$ στο t_o, δηλαδή

$$\upsilon(t_o) = x'(t_o)$$

iii. Μου ζητάει την **επιτάχυνση** $\alpha(t_o)$ σε μια χρονική στιγμή t_o

Απάντηση

• Εάν δίνεται η συνάρτηση θέσης $x(t)$, η επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_o είναι η δεύτερη παράγωγος της $x(t)$ στο t_o

$$a(t_o) = x''(t_o).$$

Δηλαδή παραγωγίζω ξανά την πρώτη παράγωγο

Παράδειγμα: $x(t) = \eta\mu t \quad \upsilon(t) = x'(t) = \sigma\upsilon\nu t \quad a(t) = x''(t) = (\sigma\upsilon\nu t)' = -\eta\mu t$

• Εάν δίνεται η συνάρτηση της ταχύτητας $\upsilon(t)$, η επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_o είναι η πρώτη παράγωγος της $\upsilon(t)$ στο t_o

$$\alpha(t_o) = \upsilon'(t_o)$$

iv. Μου ζητάει την στιγμή και την θέση που το σημείο είναι ακίνητο

Απάντηση

• Σημείο ακίνητο σημαίνει ότι έχει μηδενική ταχύτητα δηλαδή λύνω την εξίσωση $\upsilon(t) = 0$ και βρίσκω τη λύση t_o

• Η στιγμή είναι η t_o και η θέση είναι το $x(t_o)$

v. Μου ζητάει πότε το σημείο κινείται προς την θετική κατεύθυνση και πότε προς την αρνητική κατεύθυνση.

Απάντηση

- Λύνω την εξίσωση $x'(t) = 0$
- Κάνω τον πίνακα προσήμου της παραγώγου $x'(t)$ και ας πούμε ότι είναι ο παρακάτω

t	0 5 8 +∞
$x'(t)$	+ 0 - 0 +

Το σημείο κινείται προς την θετική κατεύθυνση στα διαστήματα των (+)

Το σημείο κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση στα διαστήματα των (-)

vi. Μου ζητάει τη συνολική απόσταση που έχει διανύσει το σημείο έως, για παράδειγμα, τη χρονική στιγμή 10 sec

Απάντηση

Πρέπει να έχω ήδη τον παραπάνω πίνακα για να προσθέσω σωστά και να σημειώσω την τελική χρονική στιγμή

t	0 5 8 10	+∞
$x'(t)$	+ 0 - 0 +	

Η συνολική απόσταση είναι το **άθροισμα των απόλυτων τιμών** των μετατοπίσεων στα διαστήματα που κινείται προς τα θετικά και προς τα αρνητικά.

Δηλαδή, με βάση τον προηγούμενο πίνακα, θα γράψω

- Στο [0, 5] έκανε απόσταση $S_1 = x(5) - x(0)$ (προς τα δεξιά)
- Στο [5, 8] έκανε απόσταση $S_2 = \underbrace{|x(8) - x(5)|}_{\substack{\text{σε απόλυτο} \\ \text{για να βγει θετικό}}}$ (προς τα αριστερά)
- Στο [8, 10] έκανε απόσταση $S_1 = x(10) - x(8)$ (προς τα δεξιά)
- Μετά προσθέτω:

$$S_{ολ} = S_1 + S_2 + S_3 \text{ (μονάδες μήκους)}$$

12. Μου ζητάει την εξίσωση της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης f στο σημείο της $A\big(x_o, f(x_o)\big)$ ή (το ίδιο είναι) στο σημείο της με τετμημένη $x = x_o$

- Βρίσκω το $f(x_o))$
- Εφαρμόζω τους κανόνες παραγώγισης και βρίσκω την $f'(x)$
- Βρίσκω την τιμή $f'(x_o)$
- Η εξίσωση της εφαπτομένης που ζητάει η άσκηση είναι
- $y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$

2ος τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$y = \lambda x + \beta \quad (1)$

$\lambda = f'(x_o) \quad και \quad το\ σημείο\ A\big(x_o, f(x_o)\big)\ επαληθεύει\ την \ (1)$

Με αντικατάσταση βρίσκω και το β.

13. Μου ζητάει την εξίσωση της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης fσε ένα σημείο της A με γνωστή την **<u>τεταγμένη</u>** $y = y_o$

• Λύνω την εξίσωση $f(x) = y_o$ και βρίσκω την τετμημένη x_o του σημείου A (μία ή περισσότερες)

• Για κάθε μία από τις τιμές x_o γράφω την εξίσωση της εξίσωση της εφαπτομένης που ζητείται σύμφωνα με τον τύπο στην σημείωση **12**

14. Μου ζητάει να βρω την (ή τις) εφαπτομένη της γραφικής παράστασης συνάρτησης f η οποία περνάει από συγκεκριμένο σημείο $\Sigma(\alpha, \beta)$

• Γράφω την γενική εξίσωση της εφαπτομένης :

$$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

Αυτό που πρέπει να βρω είναι το x_o

• Οι συντεταγμένες του Σ επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης, άρα θέτω όπου x το α κι όπου y το β.

• Μένει άγνωστο μόνο το x_o το οποίο βρίσκω λύνοντας την εξίσωση

• Μετά στην εξίσωση της εφαπτομένης βάζω όπου x_o την τιμή ή τις τιμές που βρήκα.

15. Μου ζητάει την εξίσωση της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης f η οποία είναι **παράλληλη** προς γνωστή ευθεία (ε): $y = \lambda x + \beta$

• Βρίσκω την $f'(x)$

• Λύνω την εξίσωση $f'(x) = \lambda$ αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην (ε)

• Βρήκα παραπάνω την λύση x_o (ή τις λύσεις)και την τιμή $f(x_o)$

• Η εξίσωση της εφαπτομένης που ζητάει η άσκηση είναι

$$y = f(x_o) + \lambda(x - x_o)$$

16. Μου ζητάει την εξίσωση της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης f η οποία είναι **κάθετη** προς γνωστή ευθεία (ε): $y = \lambda x + \beta, \lambda \neq 0$

• Βρίσκω την $f'(x)$

• Λύνω την εξίσωση $f'(x) = -\frac{1}{\lambda}$ αφού η εφαπτομένη είναι κάθετη στην (ε)

(**<u>αυτό θεωρείται γνωστό από την θεωρία της Α' Λυκείου</u>**)

• Βρήκα παραπάνω την λύση x_o και την τιμή $f(x_o)$

• Η εξίσωση της εφαπτομένης που ζητάει η άσκηση είναι

$$y = f(x_o) - \frac{1}{\lambda}(x - x_o)$$

17. Μου ζητάει την εξίσωση της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης f η οποία σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία $\alpha\ rad$ (μπορεί να δίνει και μοίρες)

• Βρίσκω την $f'(x)$

• Λύνω την εξίσωση $f'(x) = \varepsilon\varphi\alpha$ και προσέχω ότι $0 \leq \alpha < \pi$

• Βρίσκω την τιμή $f(x_o)$ για την λύση x_o της παραπάνω εξίσωσης.

• Η εξίσωση της εφαπτομένης που ζητάει η άσκηση είναι

$$y = f(x_o) + \text{εφα} \cdot (x - x_o)$$

18. Μου ζητάει την εξίσωση της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης f η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

Προσοχή! Μπορεί να λέει «κάθετη στον άξονα $y'y$» που είναι το ίδιο πράγμα

• Βρίσκω την $f'(x)$

• Λύνω την εξίσωση $f'(x) = 0$ αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον $x'x$

• Βρήκα παραπάνω την λύση x_o και την τιμή $f(x_o)$

• Η εξίσωση της εφαπτομένης που ζητάει η άσκηση είναι

$$y = f(x_o)$$

19. Μου δίνει δύο σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ και ζητάει την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης που είναι παράλληλη προς την ευθεία AB

• Βρίσκω τον συντελεστή $\lambda = \frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$

• Βρίσκω την $f'(x)$

• Λύνω την εξίσωση $f'(x) = \lambda$ αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην AB

• Βρήκα παραπάνω την λύση x_o και την τιμή $f(x_o)$

• Η εξίσωση της εφαπτομένης που ζητάει η άσκηση είναι

$$y = f(x_o) + \lambda(x - x_o)$$

20. Μου ζητάει να αποδείξω ότι μια ευθεία (ε): $y = ax + \beta$ είναι εφαπτομένη της καμπύλης μιας συνάρτησης f

• Βρίσκω την $f'(x)$

• Λύνω την εξίσωση $f'(x) = a$

• Για κάθε λύση x_o που βρίσκω από την παραπάνω εξίσωση ελέγχω αν το σημείο $M(x_o, f(x_o))$ επαληθεύει την εξίσωση της (ε). Εάν ναι, **μόνο τότε δέχομαι την λύση που βρήκα.**

***2ος τρόπος κάθε φορά που έχω συνάρτηση πολυωνυμική ή κλάσμα πολυωνυμικών

• Γράφω την εξίσωση : $f(x) = ax + \beta$

• Κάνω απαλοιφή παρονομαστών την μετατρέπω σε πολυωνυμική.

• Λύνω την παραπάνω εξίσωση και θα διαπιστώσω ότι έχει **διπλή ρίζα** x_o

• Το σημείο x_o είναι το σημείο επαφής. Για να κάνω επαλήθευση βρίσκω την εφαπτομένη της καμπύλης στο $A\big(x_o, f(x_o)\big)$. Βλέπω ότι ταυτίζεται με την $y = ax + \beta$.

21. Μου ζητάει να βρω τα σημεία τομής της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ με τους άξονες $x'x, y'y$ και μετά προσθέτει **κάποια πολύ βασικά ερωτήματα**.

• Σχηματίζω την εξίσωση της εφαπτομένης: $y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$

Για να συνεχίσει η άσκηση σίγουρα θα είναι $f'(x_o) \neq 0$ αλλιώς είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ οπότε δεν θα σχηματίζεται για παράδειγμα τρίγωνο με τους άξονες

• Θέτω όπου x το 0. Βρίσκω $y = f(x_o) - f'(x_o)x_o$. Η τομή με τον $y'y$ είναι το σημείο

$$B(0, f(x_o) - f'(x_o)x_o)$$

• Θέτω όπου y το 0. Βρίσκω $0 = f(x_o) - f'(x_o)(x - x_o)$.

Είναι εξίσωση 1ου βαθμού με άγνωστο το x.

$$f'(x_o)(x - x_o) = f(x_o) \Leftrightarrow x - x_o = \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} \Leftrightarrow x = x_o + \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} = \frac{f(x_o) + f'(x_o)x_o}{f'(x_o)}$$

Το σημείο τομής με τον $x'x$ είναι

$$\Gamma\left(\frac{f(x_o) + f'(x_o)x_o}{f'(x_o)}, 0\right)$$

Δεν είναι ανάγκη να θυμάμαι τους τύπους, αλλά την διαδικασία!!!

ΒΑΣΙΚΌ ΕΡΩΤΗΜΑ 1.

Μου ζητάει το εμβαδόν του τριγώνου $O B \Gamma$ που ορίζεται από τους άξονες και την εφαπτομένη στο A.

(ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2019, η συνάρτηση είχε παράμετρο λ)

Ο τύπος είναι:

$$(OB\Gamma) = \frac{(OB)(O\Gamma)}{2} = \frac{\overbrace{|y_B||x_\Gamma|}^{\substack{\text{απαραίτητα} \\ \text{τα απόλυτα}}}}{2}$$

ΒΑΣΙΚΌ ΕΡΩΤΗΜΑ 2.

Μου ζητάει την ελάχιστη απόσταση της αρχής **O** των αξόνων από την εφαπτομένη στο A.

• Έχω βρει ήδη το $(OB\Gamma)$

• Η ελάχιστη απόσταση της αρχής **Ο** από την εφαπτομένη στο A είναι το μήκος του ύψους $OΔ$ του τριγώνου $OBΓ$

• Βρίσκω το μήκος του $BΓ$ με το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$BΓ^2 = y_B^2 + x_Γ^2 \Rightarrow BΓ = \sqrt{y_B^2 + x_Γ^2}$$

• Τύπος: $(OBΓ) = \frac{(BΓ)(OΔ)}{2}$

Γνωστά είναι το εμβαδό και το μήκος του $BΓ$, άρα με απλή επίλυση βρίσκω το μήκος $OΔ$.

Εάν θέλει κάποιος να θυμάται τον τύπο , αυτός είναι :

$$(OΔ) = \frac{|y_B||x_Γ|}{\sqrt{y_B^2 + x_Γ^2}}$$

ΒΑΣΙΚΌ ΕΡΩΤΗΜΑ 3.

Μου ζητάει να βρω τις συντεταγμένες του σημείου $Δ$ πάνω στην εφαπτομένη από το A που είναι πλησιέστερο στην αρχή Ο.

• Το σημείο αυτό είναι το ίχνος $Δ$ του ύψους $OΔ$.

• Για να βρω το $Δ$ θα λύσω το σύστημα: $\begin{cases} y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) & (1) \\ y = -\frac{1}{f'(x_o)}x & (2) \end{cases}$

Αντικαθιστώ το y από την (2) στην (1)

Βρίσκω με απλή εξίσωση 1^{ου} βαθμού το x.

Μετά αντικαθιστώ το x στην (2) για να βρω το y

Τα δύο τελευταία ερωτήματα μπορούμε να τα λύσουμε και με την μέθοδο προβλήματος ελαχίστου με πίνακα μονοτονίας της απόστασης τυχαίου σημείου $(x, g(x))$ από την αρχή Ο.

Υπάρχει και βασική σχετική άσκηση στο σχολικό βιβλίο (Α8, σελίδα 45)

Η απόσταση είναι (από την Α' Λυκείου θεωρείται γνωστός τύπος)

$$d(x) = \sqrt{x^2 + g^2(x)}$$

Εδώ η συνάρτηση g είναι η συνάρτηση της εφαπτομένης της f στο A

$$g(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

Το σχήμα της άσκησης θα είναι παρόμοιο του επόμενου που σας το δίνω για καλύτερη κατανόηση.