Ανακτήθηκε από την Εκπαιδευτική Κλίμακα http://edu.klimaka.gr

ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=(x)'=1$ για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 10

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, όταν το ν είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

(Μον. 2)

β) $\left(\sqrt{3}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

(Μον. 2)

γ) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ βρίσκεται το 68% περίπου των παρατηρήσεων.

(Μον. 2)

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ όπου ℓ_1, ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\,g(x)\right) = \ell_1\ell_2 .$$

(Μον. 2)

PDF processed with CutePDF evaluation edition www.CutePDF.com

ε) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των πιστωτικών καρτών που έχουν 20 υπάλληλοι μιας επιχείρησης.

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	**Αριθμός υπαλλήλων** ν_i	**Αθροιστική Συχνότητα** N_i	**Σχετική Συχνότητα** $f_i\%$	$x_i \nu_i$
0	5			
1		9		
2			10	
3				
4				
ΣΥΝΟΛΑ				

Β1. Αν γνωρίζετε ότι η $5^η$ συχνότητα (ν_5) ισούται με την $1^η$ συχνότητα (ν_1), να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 10

Β2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των πιστωτικών καρτών των υπαλλήλων.

Μονάδες 5

Β3. Να υπολογίσετε τον αριθμό των υπαλλήλων που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες.

Μονάδες 5

Β4. Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες.

Μονάδες 5

ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στα σημεία $x_1=-1$ και $x_2=1$.

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 12

Γ4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2015)$ και $f(2016)$ της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x^2+\alpha x-3,\ \alpha\in\mathbb{R}\ .$$

Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή του α αν

$$\alpha=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}$$

Μονάδες 8

Δ2. Για $\alpha=2$ να βρείτε την $f'(x)$.

Μονάδες 3

Δ3. Για $\alpha=2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M\left(-2,f(-2)\right)$.

Μονάδες 8

Ανακτήθηκε από την Εκπαιδευτική Κλίμακα http://edu.klimaka.gr

ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ4. Αν τα σημεία $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2), A_3(x_3,y_3), A_4(x_4,y_4), A_5(x_5,y_5)$ ανήκουν στην ευθεία ε: $y=-2x-7$ και οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 έχουν μέση τιμή $\bar{x}=2$, να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{y}$ των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ανακτήθηκε από την Εκπαιδευτική Κλίμακα http://edu.klimaka.gr

ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα σύνολο Α, να αποδείξετε ότι $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$, όπου $c\in\mathbb{R}$, $x\in A$.

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%.

(Μον. 2)

β) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\overline{x}-2s,\overline{x}+2s)$ βρίσκεται το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων, όπου $\overline{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

(Μον. 2)

γ) Αν f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$ ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

(Μον. 2)

δ) Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις.

(Μον. 2)

Ανακτήθηκε από την Εκπαιδευτική Κλίμακα http://edu.klimaka.gr

ε) $(x^{\nu})' = (\nu - 1)\cdot x^{\nu}$, όπου ν φυσικός αριθμός.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Επτά διαδοχικοί περιττοί αριθμοί έχουν διάμεσο 13.

Β1. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι οι:

7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

Μονάδες 5

Β2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παραπάνω αριθμών.

Μονάδες 5

Β3. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση **s** των παραπάνω αριθμών.

Μονάδες 7

Β4. Αν προσθέσουμε σε καθέναν από τους παραπάνω αριθμούς τον αριθμό 3, να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής CV των νέων αριθμών που θα προκύψουν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{4}{3}$$

Γ1. Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)+f''(x)+4}{\sqrt{x}-1}$

Μονάδες 7

Ανακτήθηκε από την Εκπαιδευτική Κλίμακα http://edu.klimaka.gr

ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ3. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-4x+16$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0=1$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x^4+\alpha x+\beta\ ,\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να υπολογίσετε τις τιμές των α (μον. 6) και β (μον. 2) αν

$$f(0)=2019 \text{ και } \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=0$$

Μονάδες 8

Δ2. Για $\alpha=4$ και $\beta=2019$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το ακρότατό της.

Μονάδες 12

Δ3. Να αποδείξετε ότι $x^4+4x\geq -3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Ανακτήθηκε από την Εκπαιδευτική Κλίμακα http://edu.klimaka.gr

ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **18.30**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$$

Μονάδες 10

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μιας ποσοτικής μεταβλητής.

(Μον. 2)

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(Μον. 2)

γ) Το εύρος (R) είναι ένα μέτρο διασποράς.

(Μον. 2)

Μονάδες 6

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\left(x^{\rho}\right)' = \ldots$, όπου ρ ρητός αριθμός.

(Μον. 3)

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

β) $\left(\sigma\upsilon\nu\, x\right)' = \ldots$

(Μον. 3)

γ) Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \ldots$$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί ενός φοιτητή σε 10 μαθήματα είναι:

$$4,\ \kappa,\ 5,\ 6,\ 2\kappa+1,\ 4,\ 6,\ \kappa+2,\ 6,\ 4$$

όπου:

$$\kappa = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$$

Β1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 7

Β2. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\left(\bar{x}\right)$ των βαθμών του φοιτητή.

Μονάδες 5

Β3. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τη διακύμανση $\left(s^2\right)$.

Μονάδες 8

Β4. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV. Δίνεται ότι $\sqrt{1,4} \cong 1,18$.

Μονάδες 5

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια επιχείρηση ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή.

Εάν το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών και το 16% των εργαζομένων έχουν ηλικία μικρότερη των 35 ετών, να αποδείξετε ότι:

Γ1. Η μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων είναι $\bar{x} = 40$.

Μονάδες 5

Γ2. Η τυπική απόκλιση είναι $s = 5$.

Μονάδες 10

Εάν οι εργαζόμενοι της επιχείρησης είναι 400, να βρείτε:

Γ3. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών.

Μονάδες 5

Γ4. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 ετών και μικρότερη των 45 ετών.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2017$.

Μονάδες 6

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Δ4. Εάν τα σημεία $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$, $M_4(x_4,y_4)$, $M_5(x_5,y_5)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της $y=f''(x)$ και η τυπική απόκλιση των τετμημένων x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$, $M_4(x_4,y_4)$, $M_5(x_5,y_5)$ είναι ίση με 3, να βρείτε την τυπική απόκλιση των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$, $M_4(x_4,y_4)$, $M_5(x_5,y_5)$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_v$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1-\bar{x}, t_2-\bar{x}, \ldots, t_v-\bar{x}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και είναι ίσο με $\ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^v = \ell^v$, όπου v φυσικός αριθμός.

β) Για κάθε $x>0$ ισχύει $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

γ) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x}-s,\bar{x}+s)$ βρίσκεται το 95% περίπου των παρατηρήσεων, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

ε) Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i = \frac{v_i}{v}$, όπου v_i η συχνότητα της τιμής x_i και v το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι μέγιστες θερμοκρασίες σε 6 πόλεις μια ημέρα του χειμώνα είναι:

7, 8, 10, 5, 11, 7

Β1. Για τις παρατηρήσεις αυτές, να υπολογίσετε:

α. τη μέση τιμή $\bar{x}$ (μον. 3)

β. τη διάμεσο δ (μον. 3)

γ. τη διακύμανση s^2 (μον. 5)

Μονάδες 11

Β2. Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό τον οποίο πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμιά από τις παραπάνω παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα που θα προκύψει να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 9

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x^3-\kappa x+2,\ \kappa\in\mathbb{R}.$$

Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1.

Μονάδες 5

Γ2. Για $\kappa=3$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}$.

Μονάδες 10

Γ3. Για $\kappa=3$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M\big(2,f(2)\big)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+4}+\frac{3}{4}$$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$.

Μονάδες 5

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 8

Δ4. Αν οι τιμές $f(-1)$, $f(1)$, $f(0{,}25)$, $f(-0{,}5)$, $f(0)$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X, τότε να τις διατάξετε κατά αύξουσα σειρά (μον. 5) και να υπολογίσετε το εύρος τους (R) (μον. 2) και τη διάμεσό τους (δ) (μον. 2).

Μονάδες 9

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **17.00**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ανακτήθηκε από edu.klimaka.gr ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ – ΑΥΤΟΤΕΛΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ
& ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΔΙΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq \nu$.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, $i=1,2,...,\kappa$;

(Μον. 3)

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i=1,2,...,\kappa$;

(Μον. 3)

γ. Να αποδείξετε ότι $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$.

(Μον. 4)

Μονάδες 10

Α2. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Ανακτήθηκε από edu.klimaka.gr ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ

α. Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s\,,\bar{x}+s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

β. $(συνx)' = ημx$

γ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

δ. Η διακύμανση (s^2) είναι μέτρο διασποράς.

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $Δ$ και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του $Δ$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $Δ$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι αριθμοί: $14, 12, 18, 4α-1, 16$ με $α \in \mathbb{R}$.

Β1. Αν η διάμεσος των παραπάνω αριθμών είναι ίση με 15, να υπολογίσετε την τιμή του $α$.

Μονάδες 7

Β2. Για $α=4$ να υπολογίσετε τη διακύμανση (s^2).

Μονάδες 7

Β3. Για $α=4$ να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω αριθμών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Β4. Για $α=4$ να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής των αριθμών που θα προκύψουν, αν ο καθένας από τους παραπάνω αριθμούς πολλαπλασιαστεί με το -2 και στη συνέχεια αυξηθεί κατά 5.

Μονάδες 6

Ανακτήθηκε από edu.klimaka.gr ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa,\ \kappa \in \mathbb{R} \text{ και } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Εάν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό κ.

Μονάδες 5

Γ2. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες 10

Γ3. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $\left(-1, f'(-1)\right)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2018,\quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή του ακρότατου.

Μονάδες 9

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + 4)f'(x) - 2x}{x^2}$$

Μονάδες 10

Ανακτήθηκε από edu.klimaka.gr

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΠΕΜΠΤΗ 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν η f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα σύνολο A, να αποδείξετε ότι:

$$\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x),\ \text{όπου}\ c\in\mathbb{R},\ x\in A$$

Μονάδες 10

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων όταν ο ν είναι άρτιος αριθμός.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν x_i είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X, τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i.

β. Η ταχύτητα $\upsilon(t)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x=f(t)$ θα είναι, τη χρονική στιγμή t_0, $\upsilon(t_0)=f'(t_0)$.

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

γ. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

δ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A, τότε:

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)$$

ε. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Ο χρόνος σε λεπτά που χρειάστηκαν 20 υποψήφιοι για να απαντήσουν σε μία ερώτηση φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος σε λεπτά	**Αριθμός υποψηφίων** v_i	**Σχετική Συχνότητα** $f_i\,\%$
$[0,2)$	1	
$[2,4)$	7	
$[4,6)$	4	
$[6,8)$		
$[8,10)$	1	
ΣΥΝΟΛΑ	20	100

Β1. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του χρόνου που χρειάστηκαν οι υποψήφιοι για να απαντήσουν στην ερώτηση.

Μονάδες 5

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Β3. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον τέσσερα λεπτά για να απαντήσουν στην ερώτηση;

Μονάδες 5

Β4. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ($f_i\%$).

Μονάδες 6

Β5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ($f_i\%$) και τον οριζόντιο άξονα.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x^3-2x^2+3x+2$$

Έστω ότι

$$f'(1)+3,\ \ 8,\ \ f(1),\ \ 7,\ \ f(2),\ 10$$

είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ενός δείγματος.

Γ1. Να βρείτε τις τιμές των παρατηρήσεων (μον. 3), τη μέση τιμή (μον. 4) και τη διάμεσο (μον. 3).

Μονάδες 10

Γ2. Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των παραπάνω παρατηρήσεων είναι $s=2$.

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A\left(\frac{R}{3},f(\frac{R}{3})\right)$, όπου R το εύρος των παραπάνω παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

Γ4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρήστε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x)=x^2+\frac{4s^2}{x}+\bar{x}-27,\ \text{με}\ x\neq 0,$$

όπου $\bar{x}$ και s είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα των παρατηρήσεων $x_1,x_2,...,x_v$ μιας μεταβλητής X ενός δείγματος. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M\left(2,f(2)\right)$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και το σημείο $K(1,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Δ1. Να δείξετε ότι $s=2$ και $\bar{x}=10$.

Μονάδες 10

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 f'(x)}{\sqrt{4x+1}-3}$

Μονάδες 6

Δ4. Έστω ότι $y_1,y_2,...,y_v$ είναι οι τιμές που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις $x_1,x_2,...,x_v$ αντίστοιχα, όταν η κάθε μία από αυτές αυξηθεί κατά 10%. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των τιμών $y_1,y_2,...,y_v$.

Μονάδες 5

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **17.00**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ - ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=(x)'=1$ για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 8

Α2. **α.** Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές; (μον. 3)

β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής; (μον. 4)

Μονάδες 7

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β. Ισχύει $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$, όπου f,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

γ. Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

δ. Σε κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, αν α_i συμβολίζει το τόξο του κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα ν_i, τότε $\alpha_i = \frac{\nu}{\nu_i} \cdot 360^o$ για $i = 1,2,...,\kappa$ και ν το μέγεθος του δείγματος.

ε. Αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = l_1$ και $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = l_2$, όπου l_1, l_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε $\lim\limits_{x \to x_o} (f(x)\, g(x)) = l_1 l_2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι τιμές ενός δείγματος είναι $11, 7, \kappa, 13, 11, 10$ όπου $\kappa > 0$. Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι $CV = 20\%$ και η διακύμανσή του είναι $s^2 = 4$.

Β1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του παραπάνω δείγματος.

Μονάδες 5

Β2. Αν $\bar{x} = 10$, να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ.

Μονάδες 7

Β3. Αν $\kappa = 8$, να υπολογίσετε τη διάμεσο (δ) (μον. 4) και το εύρος (R) (μον. 2) του παραπάνω δείγματος.

Μονάδες 6

Β4. Αν από κάθε τιμή του παραπάνω δείγματος αφαιρεθεί ο αριθμός 2, να εξετάσετε αν το δείγμα των νέων τιμών είναι ομοιογενές (μον. 5) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (μον. 2).

Μονάδες 7

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x+10}\ ,\ x\in\mathbb{R}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$.

Μονάδες 3

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 5) και να δείξετε ότι $f(x)\geq 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (μον. 6).

Μονάδες 11

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M\left(5,f\left(5\right)\right)$.

Μονάδες 6

Γ4. Αν A, B είναι τα σημεία τομής της εφαπτομένης ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α (μον. 3) και Β (μον. 2).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x^3-3x^2+\lambda x,\ \text{όπου}\ \lambda\in\mathbb{R}\ \text{σταθερά}.$$

Δ1. Για $\lambda=3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 4) και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\dfrac{3}{8}\right)$ και $f\left(\dfrac{5}{6}\right)$ (μον. 3).

Μονάδες 7

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Δ2. Για $\lambda = 3$ να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{\left(\sqrt{x} - 1\right) \cdot \left(x^2 - x\right)} .$$

Μονάδες 7

Δ3. Για $\lambda = 3$ να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με 0, δηλαδή $f'(x)=(c)'=0$.

Μονάδες 7

Α2. Αν $x_1, x_2, ..., x_v$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v και $w_1, w_2, ..., w_v$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να γράψετε τον τύπο με τον οποίο υπολογίζεται ο σταθμικός μέσος $\bar{x}$ της μεταβλητής X.

Μονάδες 4

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A, μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστό της.

β. Στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος v.

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

γ. Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x) \neq 0$ για όλες τις τιμές του x, τότε ισχύει:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)}$$

δ. Ο συντελεστής μεταβολής CV ενός δείγματος είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των τιμών του δείγματος.

ε. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι τιμές 10 διαφορετικών προϊόντων ενός καταστήματος:

$$13,\ 12,\ \lambda+5,\ 9,\ 14,\ 15,\ \kappa,\ 12,\ 17,\ 13$$

όπου: $\lambda = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$

Β1. Να δείξετε ότι $\lambda = 2$.

Μονάδες 6

Β2. Για $\lambda = 2$ να υπολογίσετε την τιμή του κ, αν η μέση τιμή $(\bar{x})$ των προϊόντων είναι 12.

Μονάδες 6

Β3. Για $\lambda = 2$ και $\kappa = 8$ να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση (s) των τιμών των προϊόντων είναι 3.

Μονάδες 7

Β4. Για $\lambda = 2$ και $\kappa = 8$ να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών των προϊόντων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x^3-2x^2-\alpha x+2\ ,$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ σταθερά.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o.

Μονάδες 6

Γ2. Για $\alpha=-1$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Γ3. Για $\alpha=-1$ να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ4. Για $\alpha=-1$ να δείξετε ότι:

$$f(2019)+f(2020)>2\cdot f(1)$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=(\lambda-3)x^2-\lambda x+\lambda^2-6\lambda\ ,$$

όπου για τη σταθερά λ ισχύει $0<\lambda<3$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$ είναι $y=-\lambda x+\lambda^2-6\lambda$

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ τρίγωνο εμβαδού $E(\lambda)=\frac{1}{2}\cdot\lambda\cdot(\lambda-6)^2$

Μονάδες 7

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Δ3. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε το εμβαδόν του παραπάνω τριγώνου να γίνει μέγιστο.

Μονάδες 6

Δ4. Για $\lambda = 2$ δίνονται τα σημεία $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$, $A_5(x_5, y_5)$ της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$. Αν οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 αντίστοιχα, έχουν τυπική απόκλιση $s_x = 2$, να βρείτε την τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμια άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλου μελανιού**.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **17:00.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 18 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ έχει παράγωγο στο σημείο $x_o=0$.

β. Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές και τις συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα.

γ. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i=\dfrac{\nu}{\nu_i}$, όπου ν_i η συχνότητα της τιμής x_i και ν το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 6

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

α. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=\cdots$

β. $\left(\sqrt{x}\right)'=\cdots$, $\mu\varepsilon\ x>0$

γ. $\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'=\cdots$

Μονάδες 9

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Α4. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2$ είναι $f'(x)=(x^2)'=2x$, για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές ενός σχολείου κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών:

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0				
1				70
2	10			90
3		10		100
Σύνολο		100		

Δίνεται ότι το *40%* των μαθητών δεν διάβασαν κανένα βιβλίο.

Β1. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 12

Β2. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που έχουν διαβάσει τρία βιβλία;

Μονάδες 3

Β3. Πόσοι μαθητές διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο;

Μονάδες 5

Β4. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που διάβασαν το πολύ δύο βιβλία;

Μονάδες 5

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3-\lambda x^2+2$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ σταθερά.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(-1,-2)$.

Μονάδες 4

Γ2. Για $\lambda=3$ να βρείτε τις συναρτήσεις $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

Γ3. Για $\lambda=3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

Μονάδες 8

Γ4. Για $\lambda=3$ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)+3}{f''(x)}.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\left(x^2+4x+5\right)^{20}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι

$$f'(x)=40\left(x^2+4x+5\right)^{19}\cdot(x+2).$$

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}.$$

Μονάδες 4

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Δ3. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, έχει εξίσωση $y=1$.

Μονάδες 8

Δ4. Θεωρούμε σημείο $A(x,1)$ της ευθείας $y=1$ με $x>0$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(x,1)$ και $O(0,0)$ ως προς x, όταν $x=1$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 25 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq \nu$. Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i = 1,2,...,\kappa$ να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$$

Μονάδες 5

Α2. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A, και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος της f;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση υ της ταχύτητας ενός κινητού είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση a του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι η παράγωγος της ταχύτητας.

β. Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A, τότε ορίζεται και η συνάρτηση $R = \frac{f}{g}$ με $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

γ. Αν x_1, x_2 είναι τιμές μίας ποσοτικής μεταβλητής X, με αντίστοιχες συχνότητες v_1, v_2, τότε για τις αθροιστικές συχνότητες N_1, N_2 ισχύει $v_2 = N_2 + N_1$, όπου $N_1 = v_1$.

Μονάδες 6

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

α. $(\eta\mu x)' = \ldots$

β. $\left(x^{\rho}\right)' = \ldots$, όπου ρ ρητός αριθμός.

γ. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \ldots$, όπου $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο χρόνος σε ώρες που αφιερώνουν 20 μαθητές σε αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μίας ημέρας.

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i
0	1		
1	κ^2		
2	8		
3	$\kappa-1$		
Σύνολο	20	100	

Β1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=3$.

Μονάδες 7

Β2. Για $\kappa=3$ να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε με αριθμητικές τιμές.

Μονάδες 10

Β3. Πόσοι από τους παραπάνω μαθητές αφιερώνουν χρόνο σε αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μίας ημέρας;

Μονάδες 3

Β4. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που αφιερώνουν τουλάχιστον 2 ώρες σε αθλητικές δραστηριότητες;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x},\ x\neq -1.$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία για $x<-1.$

Μονάδες 7

Γ2. Αν $x\in[-4,-2]$, να αποδείξετε ότι $-3\leq f(x)\leq -\dfrac{5}{3}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0)).$

Μονάδες 6

Γ4. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ, όπου $O(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x^3-6x^2+9x-a^2-8a\ ,\quad a\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f ως συνάρτηση του a.

Μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε για ποια τιμή του a το τοπικό ελάχιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Μονάδες 8

Δ4. Για $a = -4$ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - 16}{f'(x)} .$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **17:00**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί *με* $\kappa \leq \nu$.

Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, όπου $i = 1, 2, ..., \kappa$;

Μονάδες 4

Α2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $f'(x) = (c)' = 0$.

Μονάδες 6

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι διακριτές μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α,β).

β. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.

γ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Μονάδες 6

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α. $\left(\frac{1}{x}\right)' =$....., με $x \neq 0$.

β. $\left(x^{\nu}\right)' =$....., όπου ν φυσικός αριθμός.

γ. $(c \cdot f(x))' =$....., όπου $c \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \alpha x + 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερά και $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη ίση με 1, να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 5

Β2. Για $\alpha = 3$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$$

Μονάδες 5

Β3. Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

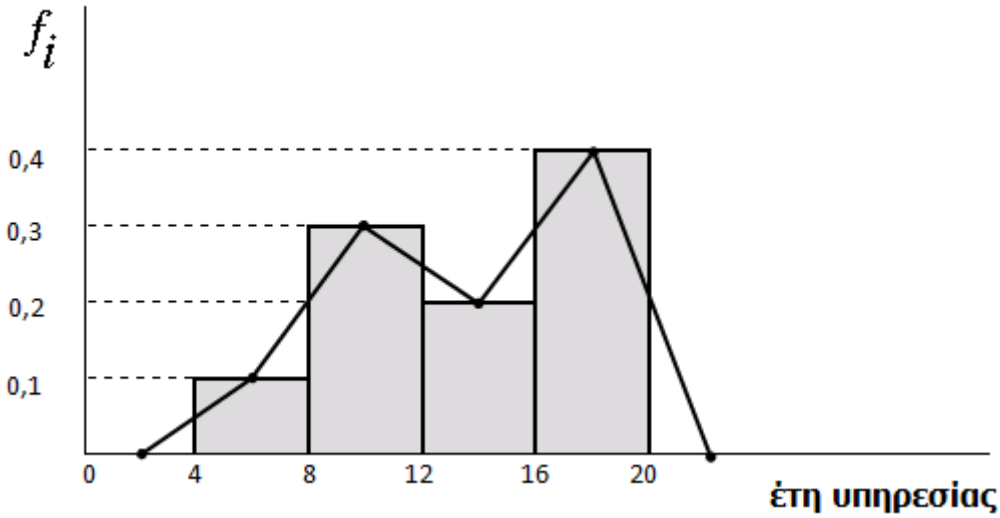
Μονάδες 7

Β4. Για $\alpha = 3$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων f_i που αφορούν τα έτη υπηρεσίας 50 εκπαιδευτικών.



Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα,

Έτη υπηρεσίας [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	a_i
[4,8)		5		36°
[8,12)				
[12,16)	14			
[16,20)		20		144°
Σύνολο		50		360°

όπου a_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 12

Γ2. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας;

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη.

Μονάδες 5

Γ4. Πόσο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και περίμετρο 80m.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 40x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

Μονάδες 10

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

Μονάδες 6

Δ3. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Μονάδες 4

Δ4. Δύο οικόπεδα Α και Β σχήματος ορθογωνίου με περίμετρο 80m το καθένα έχουν μήκη $x_{\text{A}} = 29,5\text{m}$ και $x_{\text{B}} = 34,2\text{m}$, αντίστοιχα. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποιο από τα δύο οικόπεδα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΠΕΜΠΤΗ 23 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$, για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 7

Α2. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq \nu$.

α. Πώς ορίζεται η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i για $i=1,2,\ldots,\kappa$;

Μονάδες 4

β. Να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 \leq f_i \leq 1$ για $i=1,2,\ldots,\kappa$.

Μονάδες 4

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει ότι $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g'(x)$.

β. Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x, όταν $x = x_0$.

γ. Ισχύει ότι $(συνx)' = ημx$.

δ. Οι ποιοτικές ή κατηγορικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

ε. Πλάτος μίας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - αx + 6$ με $α, x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(4) = 12$.

Β1. Να βρείτε την $f'(x)$ (μον. 3) και να υπολογίσετε την τιμή του α (μον. 3).

Μονάδες 6

Β2. Για α=4 να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της (μον. 5) και να βρείτε τα ακρότατά της (μον. 3).

Μονάδες 8

Β3. Για α=4 να δείξετε ότι $f(x) \geq 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Β4. Για α=4 να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 50 μαθητές/μαθήτριες ενός ΕΠΑ.Λ, για να μεταβούν από το σπίτι στο σχολείο τους, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους c, όπου

$$\frac{2}{c} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος σε λεπτά	*Συχνότητα* ν_i	*Σχετική Συχνότητα* $f_i\%$	*Αθροιστική Συχνότητα* N_i
[14, …)	15	30	15
[…, …)	20	40	…
[…, …)	…	…	…
[…, …)	5	…	50
Σύνολο	50	100	

Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή του πλάτους c.

Μονάδες 8

Γ2. Για c=8 να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 12

Γ3. Για c=8 να βρείτε το ποσοστό των μαθητών/μαθητριών που χρειάστηκαν τουλάχιστον μισή ώρα για να μεταβούν στο σχολείο τους.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = x(3x-2)-8$$

για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$.

Μονάδες 5

Δ2. Ένα σώμα κινείται σε έναν άξονα και η θέση του x τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $x(t) = f(t)$, όπου το x μετριέται σε μέτρα και το t μετριέται σε δευτερόλεπτα.

Ζητούνται:

α. Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t=4 δευτερόλεπτα.

Μονάδες 5

β. Η χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα είναι ακίνητο.

Μονάδες 8

γ. Η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t=10 δευτερόλεπτα.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **17:00**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 2x$.

Μονάδες 7

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ο συντελεστής μεταβολής δεν είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης.

β. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

γ. Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

Μονάδες 6

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλιπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $\left(\sqrt{x}\right)' = \cdots$

β. $(f(g(x)))' = \cdots$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Κατά τον μήνα Νοέμβριο οι απουσίες πέντε (5) μαθητών ήταν:
25, 10, 5, 20, 15.

Β1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ (μον.4) και το εύρος (μον. 3) του παραπάνω δείγματος των πέντε μαθητών.

Μονάδες 7

Β2. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2.

Μονάδες 7

Β3. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος (μον. 6) και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές απαντώντας αιτιολογημένα (μον. 5).

Μονάδες 11

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 9x^2 + \alpha x + 1$, όπου $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

Γ1. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f για $x = 1$ είναι ίσος με 0, να δείξετε ότι $\alpha = 15$.

Μονάδες 6

Γ2. Για $\alpha = 15$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2, f(2))$.

Μονάδες 6

Γ3. Για $\alpha = 15$ να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και τα ακρότατα (μον. 2).

Μονάδες 8

Γ4. Για $\alpha = 15$ να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Δ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (μον. 2) και να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$ (μον. 4).

Μονάδες 6

Δ2. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος επιστροφής, σε λεπτά, από το σχολείο στο σπίτι για τους μαθητές μίας περιφέρειας ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή και τυπική απόκλιση

$$\bar{x} = \frac{1}{f'(2)} \quad , \quad s = \frac{1}{2f'(1)}$$

αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι $\bar{x} = 9$ και $s = 2$.

Μονάδες 6

Δ3. Αν το πλήθος των μαθητών της περιφέρειας είναι 2000, πόσοι από αυτούς έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά (μον. 6) και πόσοι πάνω από 15 λεπτά (μον. 3);

Μονάδες 9

Δ4. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, στην περίπτωση που ο χρόνος επιστροφής των μαθητών της περιφέρειας αυξηθεί κατά 3 λεπτά.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 26 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μίας μεταβλητής X μεγέθους ν που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Αν αφαιρέσουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ από κάθε παρατήρηση, να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι μηδέν.

Μονάδες 9

Α2. α. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μίας μεταβλητής x με μέση τιμή $\bar{x}$, όπου $\bar{x} \neq 0$;

Μονάδες 4

β. Πότε ένα δείγμα τιμών μίας μεταβλητής είναι ομοιογενές;

Μονάδες 2

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μία περιοχή του x_1.

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

β. Αν f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, ισχύει

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{g(x)}, \; g(x) \neq 0.$$

γ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s, τότε το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \; \bar{x} + 3s)$.

δ. Το εύρος ή κύμανση (R) είναι μέτρο διασποράς.

ε. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 1.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - 6x + 3$, όπου x, α πραγματικοί αριθμοί.

Β1. Αν ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της $M(2, f(2))$ είναι ίσος με 14, να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

Μονάδες 8

Β2. Για $\alpha = 2$, να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to -3} \frac{f''(x) + 14}{x^2 - 9}$$

Μονάδες 7

Β3. Για $\alpha = 2$ να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = f'(x) - 16x$, με x πραγματικός αριθμός, ως προς τη μονοτονία (μον.8) και να βρείτε τα ακρότατα (μον.2).

Μονάδες 10

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΘΕΜΑ Γ

Οι χρόνοι (σε λεπτά), που χρειάστηκαν 200 μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα, ομαδοποιήθηκαν σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις $[\ -\ )$	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
$20-24$	…	0,10	…
$24-28$	…	0,20	…
$28-32$	…	0,30	…
$32-36$	…	0,35	…
$36-40$	…	…	…
Σύνολο	200	…	

Γ1. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 12

Γ2. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα (μον.3) και το πολύγωνο (μον.1) των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις %.

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών οι οποίοι χρειάστηκαν μέχρι και 26 λεπτά για να λύσουν το πρόβλημα.

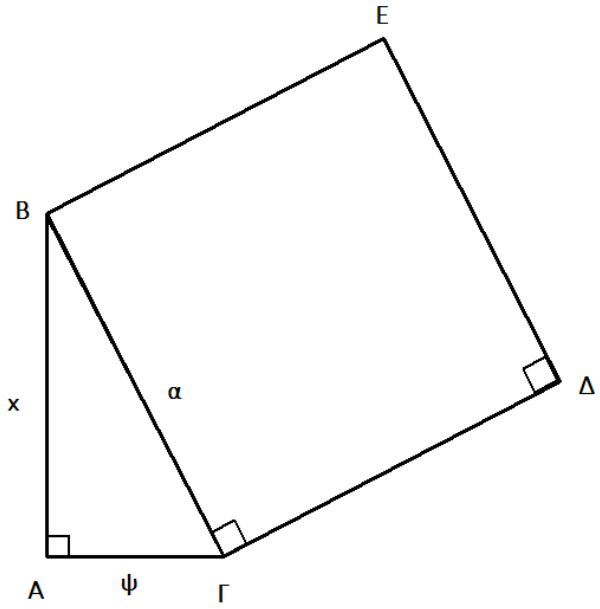
Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε τον μέσο χρόνο που χρειάζεται ένας μαθητής για να λύσει το πρόβλημα.

Μονάδες 5

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΘΕΜΑ Δ



Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$), με κάθετες πλευρές $AB = x$, $A\Gamma = \psi$ και υποτείνουσα $B\Gamma = \alpha$, κατασκευάζουμε εξωτερικά τετράγωνο ΒΕΔΓ, με πλευρά $B\Gamma = \alpha$, όπως το διπλανό σχήμα. Αν το άθροισμα των καθέτων πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ είναι 20cm, τότε:

Δ1. Να εκφράσετε την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του x.

Μονάδες 5

Δ2. Να εκφράσετε το εμβαδόν $E(x)$ του τετραγώνου ΒΕΔΓ ως συνάρτηση του x (μον.2) και να βρεθεί το πεδίο ορισμού του εμβαδού $E(x)$ (μον.3).

Μονάδες 5

Δ3. Για ποιες τιμές του x το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο (μον.5) και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του (μον.2);

Μονάδες 7

Δ4. α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $T(x)$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με $T(x) = 10x - \frac{1}{2}x^2$.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, όταν το εμβαδόν $T(x)$ του τριγώνου γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 4

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **17:00**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$, όπου c πραγματικός αριθμός, ισούται με $cf'(x)$.

Μονάδες 10

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i με $i = 1,2,\dots,\kappa$ μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές.

β. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει: $\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$.

γ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s, τότε το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s,\ \bar{x} + s)$.

δ. $(\sqrt{x})' = \frac{2}{\sqrt{x}}, x > 0$

ε. Η διάμεσος ενός δείγματος ν παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 12x + 10$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

Β2. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε το α.

Μονάδες 6

Β3. Για $\alpha = 3$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων.

Μονάδες 9

Β4. Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x-1}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ρωτήθηκαν οι μαθητές/τριες της Γ' τάξης ενός ΕΠΑΛ πόσες ώρες διέθεσαν στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης την προηγούμενη εβδομάδα. Οι απαντήσεις τους ομαδοποιήθηκαν όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \nu_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)		ν_3	
[20,24)		5	
	Σύνολο		

Δίνεται ότι ο μέσος χρόνος είναι $\bar{x} = 14$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\nu_3 = 10$.

Μονάδες 8

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον προηγούμενο πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV. Είναι το δείγμα ομοιογενές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, με $x \neq 0$.

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [-4, -1]$ ισχύει:

$$-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Μονάδες 6

Δ4. Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ε) τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_1, x_2, x_3 να έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 4$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV των τεταγμένων y_1, y_2, y_3.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq \nu$. Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i = 1, 2, \dots, \kappa$ να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_\kappa = 1$$

Μονάδες 5

Α2. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η διακύμανση ενός δείγματος είναι μέτρο θέσης.

β. Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητά του θα είναι $\upsilon(t) = x'(t)$.

γ. $(x^\rho)' = \rho x^{\rho+1}$, όπου ρ ρητός αριθμός.

Μονάδες 6

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλιπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \cdots$

β. $(f(x) \cdot g(x))' = \cdots$

γ. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^{\nu} = \cdots$, όπου $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, ℓ_1 πραγματικός αριθμός, ν ακέραιος.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Ο χρόνος αναμονής (σε λεπτά) ενός δείγματος επιβατών σε μία στάση λεωφορείου, κατά τη διάρκεια μίας ημέρας, ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = 5$ και τυπική απόκλιση $s = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{2(\sqrt{x}-1)}$.

Β1. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s.

Μονάδες 6

Αν $s = 1$:

Β2. Να βρείτε το ποσοστό του δείγματος με χρόνο αναμονής από 3 έως 6 λεπτά.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τη διάμεσο δ (μον.1), τον συντελεστή μεταβολής CV (μον.2) και να εκτιμήσετε το εύρος R (μον.1).

Μονάδες 4

Β4. Αν ο χρόνος αναμονής 380 ατόμων είναι από 3 έως 7 λεπτά, να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Τα έτη υπηρεσίας των 50 υπαλλήλων μίας εταιρείας ομαδοποιήθηκαν σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτη $[\ ,\ )$	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
$[0,10)$	5	7	14	…
$[10,20)$	15	$2\alpha+4$	…	…
$[20,30)$	25	10	…	…
$[30,40)$	35	$3\alpha-6$	…	100
Σύνολο		50	100	

Γ1. Να υπολογίσετε το α.

Μονάδες 5

Αν $\alpha = 7$:

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$.

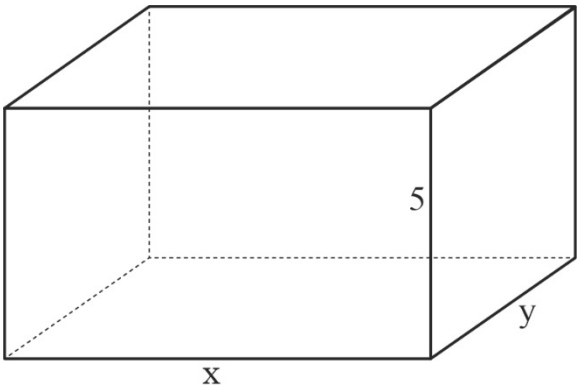
Μονάδες 7

Γ4. α. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα (μον.3) και το πολύγωνο (μον. 1) των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %.

β. Να εκτιμήσετε τη διάμεσο (μον. 3).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ



Μία δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ύψος 5 μέτρα, έχει βάση ορθογώνιο μήκους x και πλάτους y (οι διαστάσεις x,y εκφράζονται σε μέτρα). Η περίμετρος της βάσης είναι 40 μέτρα.

Δ1. Να εκφράσετε το πλάτος y ως συνάρτηση του x.

Μονάδες 4

Δ2. Να δείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής δίνεται από τη συνάρτηση με τύπο $V(x) = 100x - 5x^2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του όγκου $V(x)$.

Μονάδες 6

Δ3. α. Για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει τον μέγιστο όγκο (μον. 8);

β. Να υπολογίσετε τον μέγιστο όγκο (μον. 2).

Μονάδες 10

Δ4. Δύο δεξαμενές A και B ίδιου σχήματος με την αρχική, έχουν μήκη $x_A = 11{,}81$ μέτρα και $x_B = 11{,}82$ μέτρα αντιστοίχως. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποια από τις δύο δεξαμενές έχει τον μεγαλύτερο όγκο.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **17:00**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A, να αποδείξετε ότι: $\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x)$.

Μονάδες 10

Α2. **α)** Έστω $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής X, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq \nu$. Τι ονομάζεται συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, $i = 1,2,\dots,\kappa$;

Μονάδες 3

β) Έστω $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ οι τιμές μίας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, \dots, w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας). Να γράψετε τον τύπο του σταθμικού μέσου.

Μονάδες 4

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει παράγωγο στο $x_0 = 0$.

β. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.

γ. Ισχύει $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

δ. Οι ποσοτικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί, διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων (μον. 4).

Μονάδες 10

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

Μονάδες 7

Β4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Το πρωί μίας ημέρας οι τιμές της θερμοκρασίας (σε $^\circ C$) σε 5 πόλεις της Ελλάδας ήταν: $22, 18, 20 + κ, 14, 16$, όπου κ πραγματικός αριθμός.

Ο συντελεστής μεταβολής των παραπάνω τιμών είναι $CV = 20\%$ και η τυπική απόκλιση είναι ίση με $s = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+6x-7}{2x-2}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $s = 4$.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παραπάνω τιμών της θερμοκρασίας είναι $\bar{x} = 20$.

Μονάδες 4

Γ3. Να δείξετε ότι $κ = 10$ (μον. 6) και να βρείτε τη διάμεσο δ (μον. 3).

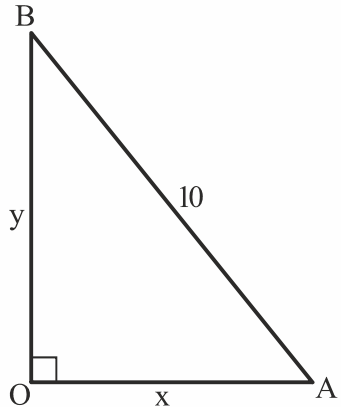
Μονάδες 9

Γ4. Αν το μεσημέρι της ίδιας ημέρας οι παραπάνω τιμές της θερμοκρασίας αυξήθηκαν κατά 10%, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής των νέων τιμών της θερμοκρασίας.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο AOB με $\widehat{O} = 90°$, κάθετες πλευρές μήκους $(OA) = x$, $(OB) = y$ και υποτείνουσα μήκους $(AB) = 10$.



Δ1. Να δείξετε ότι η πλευρά y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο: $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ (μον. 3) και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (μον. 4).

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης $y = f(x)$, ως προς x, όταν $x = 8$.

Μονάδες 6

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 6} \frac{f(x)-8}{x-6}$.

Μονάδες 6

Δ4. Αν $x_1 = 2{,}3$, $x_2 = 3{,}5$ και $x_3 = 2{,}8$ είναι τιμές της πλευράς x, να αιτιολογήσετε ότι: $f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 24 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $f'(x) = (c)' = 0$.

Μονάδες 6

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq \nu$. Πώς ορίζεται η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i = 1, 2, \dots, \kappa$;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.

β. Η τυπική απόκλιση είναι μέτρο θέσης.

γ. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ, τότε: $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g'(x)$.

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

δ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s, τότε το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s)$.

ε. Ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}(k\cdot f(x))=k\cdot \ell_1$, όπου $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1$ και k πραγματική σταθερά.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον αριθμό των παιδιών ανά οικογένεια ενός δείγματος 20 οικογενειών.

Αριθμός παιδιών x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i
0		25	
1			13
2	5		
3			
ΣΥΝΟΛΟ	20	100	

Β1. Αφού μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας, να συμπληρώσετε σωστά τα κενά.

Μονάδες 9

Β2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$.

Μονάδες 6

Β3. Να υπολογίσετε τη διάμεσο δ (μον.3) και το εύρος R (μον.1).

Μονάδες 4

Β4. α) Να βρείτε πόσες οικογένειες έχουν τουλάχιστον 2 παιδιά (μον.3).

β) Να βρείτε το ποσοστό των οικογενειών που έχουν το πολύ ένα παιδί (μον.3).

Μονάδες 6

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, α, β πραγματικοί αριθμοί, για την οποία ισχύουν:

- $f'(2) = 7$.
- Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(2, -3)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = -5$.

Μονάδες 7

Για $\alpha = -1$ και $\beta = -5$:

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον.6) και να βρείτε τα ακρότατά της (μον.4).

Μονάδες 10

Γ3. Να βρείτε την τετμημένη x_0 του σημείου $K(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

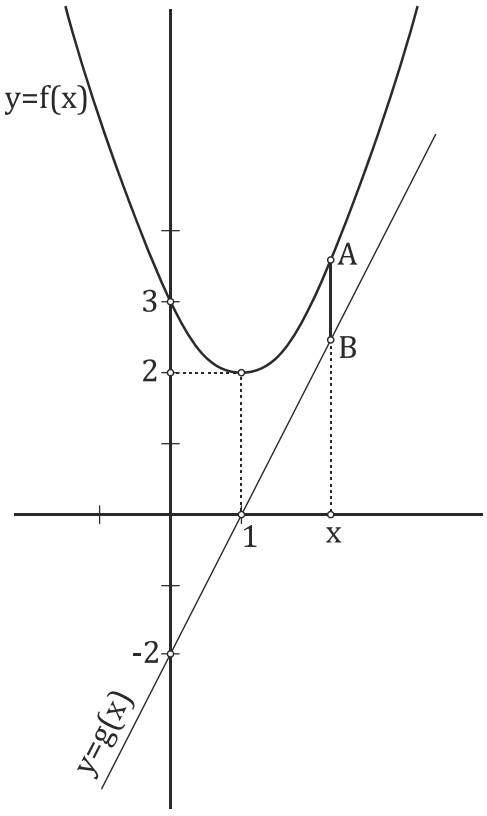
Μονάδες 5

Γ4. Αν $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ να προσδιορίσετε το πρόσημο της διαφοράς $A = f(x_1) - f(x_2)$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = (x-1)^2 + 2$ και $g(x) = 2x - 2$, με $x \in \mathbb{R}$.



Δ1. Να αποδείξετε ότι το μήκος του κατακόρυφου τμήματος AB ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $d(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\frac{d(x)-2}{\sqrt{g(x)}-2}$

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε την τιμή του x, για την οποία το μήκος $d(x)$ γίνεται ελάχιστο και να το υπολογίσετε.

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το σημείο $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x - 2$ (μον.6) και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης αυτής (μον.3).

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **17:00**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν, που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Αν αφαιρέσουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ από κάθε παρατήρηση, να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με 0.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η διακύμανση των παρατηρήσεων ενός δείγματος εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις του δείγματος.

β. Το εύρος είναι ένα μέτρο διασποράς.

γ. Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x, όταν $x = x_0$.

δ. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c \in \mathbb{R}$.

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες 10

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλιπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $(c)' = \cdots$

β. $(x^2)' = \cdots$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το πλήθος των ωρών που εργάζονται υπερωριακά 50 υπάλληλοι σε μία επιχείρηση κατά τη διάρκεια ενός μήνα.

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
0	…	…	…
1	15	…	…
2	11	…	…
3	8	…	…
4	6	…	50
Σύνολο	50	100	

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 10

Β2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος.

Μονάδες 5

Β3. Να υπολογίσετε τη διάμεσο δ του δείγματος.

Μονάδες 4

Β4. α) Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες. (μον. 3)

β) Αν αυξηθούν οι υπερωρίες κατά 4 ώρες σε κάθε υπάλληλο, να βρείτε τη νέα μέση τιμή. (μον. 3)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha, \quad x \in \mathbb{R}$ και α σταθερός πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων της f ως συνάρτηση του α (μον. 4) και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, αν το ημιάθροισμα των τιμών των ακροτάτων της f είναι -8. (μον. 4)

Μονάδες 8

Γ3. Για $\alpha = -12$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Μονάδες 6

Γ4. Για $\alpha = -12$, να δείξετε ότι $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}$ με $x \in \mathbb{R}$ και λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

Δ1. Αν ισχύει $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0$, να βρεθεί ο αριθμός λ.

Μονάδες 4

Δ2. Για $\lambda = -4$, να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Δ3. Για $\lambda = -4$, να προσδιοριστεί το πρόσημο της παράστασης

$$A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)}$$

Μονάδες 7

Δ4. Για $\lambda = -4$, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \to 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}$$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$, για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ο λόγος της μέσης τιμής προς την τυπική απόκλιση καλείται συντελεστής μεταβολής.

β. Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

γ. Η γραφική παράσταση μίας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι μία συνεχής καμπύλη.

δ. Αν η συνάρτηση της ταχύτητας $υ$ ενός κινητού είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή ισχύει $α(t) = υ'(t)$.

ε. Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές και τις συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα.

Μονάδες 10

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλιπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $(\eta\mu x)' = \cdots$

β. $(\sqrt{x})' = \cdots$, με $x > 0$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + kx - 6,\ x \in \mathbb{R},$ k πραγματικός αριθμός και $g(x) = 3x - 6,\ x \in \mathbb{R}.$

Β1. Αν $f'(3) = 7$, να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό k.

Μονάδες 4

Για $k = 1$:

Β2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 2} \frac{g(x)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ (μον. 6) και στη συνέχεια να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω εφαπτομένη είναι παράλληλη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g (μον. 2).

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων που αφορά τις τιμές ενός δείγματος μεγέθους ν

Τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	α_i
0		0,10	36°
1	6	0,30	
2		0,25	
3		0,20	
4		0,15	54°
ΣΥΝΟΛΟ		1	360°

όπου α_i το τόξο του κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων που αντιστοιχεί στην τιμή x_i όπου $i = 1,2,3,4,5$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu = 20$.

Μονάδες 4

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 8

Γ3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος.

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος.

Μονάδες 5

Γ5. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Δίνεται $\sqrt{1,5} \simeq 1,22$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + x^2 - x = 3x^2 + 3(1-2x),\ x \in \mathbb{R}$$

και $f(1) = 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 2x^2 - 5x + 3, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 7

Δ3. Να αιτιολογήσετε ότι $f'(197) < f'(314)$.

Μονάδες 7

Δ4. Να υπολογιστεί το $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{\sqrt{1+h}-1}$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **17:00**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq \nu$. Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$ να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_\kappa = 1$$

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και B το σύνολο των $x \in A$, στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η συνάρτηση της πρώτης παραγώγου της f;

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το εύρος θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς.

β. Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) μέγιστο στη θέση $x = x_0$.

γ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.

δ. Αν $g(x) \neq 0$ τότε $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)}$

ε. Σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1, \quad \text{όπου} \quad x \in \mathbb{R}$$

Β1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων (μον. 4).

Μονάδες 10

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A\big(0, f(0)\big)$.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to -1} \frac{f'(x)}{x + 1}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν επτά μαθητές στις θερινές διακοπές είναι αντίστοιχα:

$$4, 5, 4, \kappa, 0, 3, 7 \quad \text{όπου } \kappa \text{ φυσικός αριθμός.}$$

Γ1. Αν ο μέσος αριθμός βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές είναι $\bar{x} = 4$, να βρείτε τον κ.

Μονάδες 5

Για $\kappa = 5$:

Γ2. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.

Μονάδες 4

Γ3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος.

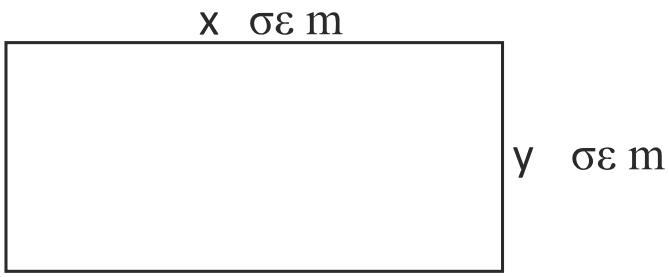
Μονάδες 10

Γ4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, εμβαδού $100\ \mathrm{m}^2$.



Δ1. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του οικοπέδου, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο

$$\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x > 0$$

Μονάδες 5

Δ2. Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $\Pi(x)$ (μον. 5) και να αποδείξετε ότι το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο είναι τετράγωνο (μον. 3).

Μονάδες 8

Δ3. Αν x_1, x_2 είναι τιμές της πλευράς του παραπάνω ορθογωνίου με $x_1, x_2 \in (0,10)$ και $x_1 < x_2$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$A = \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2}$$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10}$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο A και c πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε ότι:

$$\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$$

Μονάδες 8

Α2. Να διατυπώσετε τον ορισμό του εύρους (R) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 3

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο των ποσοτικών μεταβλητών.

β. Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s, τότε το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$.

γ. Ο συντελεστής μεταβολής (CV) είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης.

δ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$, όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \ell_1 + \ell_2$.

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ε. Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0

$$\upsilon(t_0) = f'(t_0)$$

Μονάδες 10

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλιπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $\big(f(g(x))\big)' = \cdots$

β. $(\sigma\upsilon\nu x)' = \cdots$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + x,\ x \in \mathbb{R}$ και α σταθερός πραγματικός αριθμός.

Β1. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$ να βρεθεί η τιμή του α.

Μονάδες 5

Για $\alpha = -2$:

Β2. Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

Μονάδες 5

Β3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $O(0,0)$.

Μονάδες 7

Β4. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΘΕΜΑ Γ

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα μηνιαία ατομικά έξοδα σε ευρώ (€) 40 φοιτητών. Τα δεδομένα ομαδοποιήθηκαν σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους.

Κλάσεις εξόδων	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	$x_i\nu_i$
[300,400)	350	...	0,2	...
[..., ...)	450	16	...	7200
[..., ...)	550	...	...	6600
[600, 700)	650	...	0,1	...
ΣΥΝΟΛΟ		40	...	19200

Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε σωστά τα κενά.

Μονάδες 10

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των μηναίων ατομικών εξόδων των φοιτητών.

Μονάδες 5

Γ3. Πόσοι φοιτητές ξοδεύουν τουλάχιστον 550 ευρώ (€) μηνιαίως και ποιο είναι το ποσοστό των φοιτητών αυτών;

Μονάδες 6

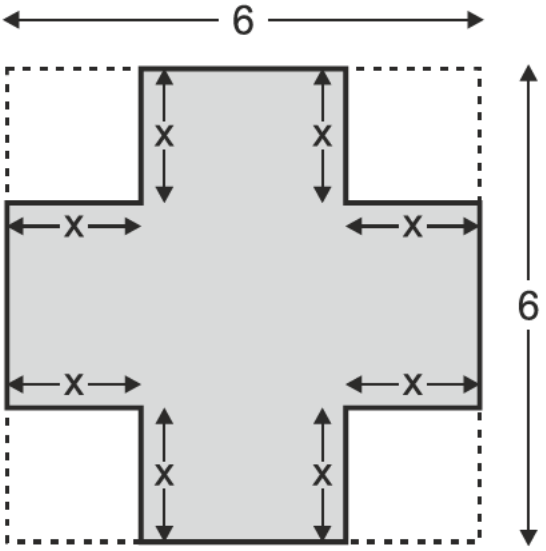
Γ4. Αν κάθε φοιτητής αυξήσει τα έξοδά του κατά 50 ευρώ (€), ποια θα είναι η νέα μέση τιμή των εξόδων τους;

Μονάδες 4

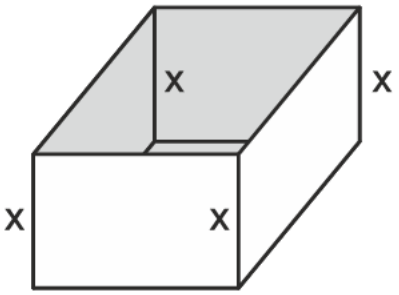
Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

ΘΕΜΑ Δ

Διαθέτουμε ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς $6\,\text{m}$. Κόβουμε από κάθε γωνία του ένα τετράγωνο πλευράς $x\,\text{m}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Στη συνέχεια διπλώνουμε προς τα επάνω τις πλευρές. Έτσι, προκύπτει μία δεξαμενή ανοικτή από πάνω, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Δ1. Να αποδείξετε ότι η πλευρά της τετραγωνικής βάσης της δεξαμενής είναι $(6-2x)\,\text{m}$ (μον.2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της τετραγωνικής βάσης δίνεται από τον τύπο $E(x)=4x^2-24x+36$ και να δικαιολογήσετε ότι $0<x<3$ (μον. 6).

Μονάδες 8

Δ2. Ο όγκος V ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης επί το αντίστοιχο ύψος. Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής δίνεται από τον τύπο:

$$V(x)=4x^3-24x^2+36x,\quad 0<x<3$$

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του Σχήματος 1 είναι $A(x)=36-4x^2$.

Μονάδες 4

Ανακτήθηκε από την ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ http://edu.klimaka.gr

Δ4. α. Να βρεθούν οι διαστάσεις της δεξαμενής ώστε να έχει τον μέγιστο όγκο (μον. 6).

β. Ποιο είναι το κόστος εσωτερικής βαφής της δεξαμενής μέγιστου όγκου, αν η βαφή κοστίζει $12€/m^2$. (μον. 3);

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **17:00**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ