Ταυτότητες και εφαρμογές τους στην απλοποίηση παραστάσεων που εμφανίζονται συχνά σε ζητούμενα όρια

1. Στον ορισμό ρίζας

$$\sqrt{x}^2 = x, για\ κάθε\ x \geq 0$$

$$\sqrt[3]{x}^3 = x, για\ κάθε\ x \geq 0$$

Αλλά και ποιο γενικά ισχύει

$$\sqrt[\nu]{x}^\nu = x, για\ κάθε\ x \geq 0$$

- Παράδειγμα απλοποίησης με τον παραπάνω τύπο

$$\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x}^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} = \boldsymbol{\sqrt{x}}$$

2. Διαφορά τετραγώνων

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

- Παραδείγματα απλοποίησης με τον παραπάνω τύπο

i.

$$\frac{x^2 - 9}{3x^2 - 9x} = \frac{x^2 - 3^2}{3x \cdot (x - 3)} = \frac{(x + 3) \cdot (x - 3)}{3x \cdot (x - 3)} = \boldsymbol{\frac{x + 3}{3x}}$$

ii.

$$\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x}^2 - 1^2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \boldsymbol{\sqrt{x} + 1}$$

3. Συζυγείς παραστάσεις για την απαλοιφή ριζικών

Παράσταση A	Συζυγής παράσταση B	Γινόμενο $A \cdot B$
$\sqrt{x} - a$	$\sqrt{x} + a$	$\sqrt{x}^2 - a^2 = x - a^2$
$\sqrt{x} + a$	$\sqrt{x} - a$	$\sqrt{x}^2 - a^2 = x - a^2$
$\sqrt{x} - \sqrt{a}$	$\sqrt{x} + \sqrt{a}$	$\sqrt{x}^2 - \sqrt{a}^2 = x - a$
$\sqrt{x} + \sqrt{a}$	$\sqrt{x} - \sqrt{a}$	$\sqrt{x}^2 - \sqrt{a}^2 = x - a$
$\|x\| - a$	$\|x\| + a$	$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

Εννοείται ότι όταν για μια παραγοντοποίηση και μετά απλοποίηση κλάσματος χρησιμοποιήσω το τέχνασμα της συζυγούς παράστασης , **πρέπει να πολλαπλασιάσω και τον αριθμητή και τον παρονομαστή με την παράσταση αυτή**

4. Σχέση απόλυτης τιμής και ρίζας

$$x^2 = |x|^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \sqrt{x^2} = |x| \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in \mathbb{R}$$

- Παράδειγμα απλοποίησης με τους παραπάνω τύπους και χρήσης συζυγούς παράστασης

$$\frac{|x-2|-1}{x-1} = \frac{(|x-2|-1)\cdot(|x-2|+1)}{(x-1)\cdot(|x-2|+1)} = \frac{|x-2|^2-1}{(x-1)\cdot(|x-2|+1)} =$$

$$\frac{(x-2)^2-1}{(x-1)\cdot(|x-2|+1)} = \frac{[(x-2)-1]\cdot[(x-2)+1]}{(x-1)\cdot(|x-2|+1)} = \frac{(x-2-1)(x-2+1)}{(x-1)\cdot(|x-2|+1)} =$$

$$\frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)\cdot(|x-2|+1)} = \boldsymbol{\frac{x-3}{|x-2|+1}}$$

5. Διαφορά κύβων

$$x^3 - a^3 = (x-a)\cdot(x^2+ax+a^2)$$

- Παραδείγματα απλοποίησης με τον παραπάνω τύπο

i.

$$\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{x^3-2^3}{x^2-2^2} = \frac{(x-2)\cdot(x^2+2\cdot x+2^2)}{(x-2)\cdot(x+2)} = \boldsymbol{\frac{x^2+2x+4}{x+2}}$$

ii. Προσοχή, χρησιμοποιούμε και το τέχνασμα της συζυγούς παράστασης

$$\frac{x^3-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}} =$$

$$\frac{x^3-1^3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}} =$$

$$\frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}} =$$

$$\frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} =$$

$$\frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{2}^2} =$$

$$\frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{x+1-2}=$$

$$\frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{x-1}=$$

$$\boldsymbol{(x^2+x+1)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}$$

iii. Προσοχή, χρησιμοποιώ την μέθοδο της αντικατάστασης και ιδιότητες ριζών

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\underset{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \sqrt[3]{x}=\omega}{\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3}}=\frac{\omega-1}{\omega^3-1^3}=\frac{\omega-1}{(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)}=$$

$$\frac{1}{\omega^2+\omega+1}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1}}$$

iv.

$$\frac{x-1}{x\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}^2-1}{\sqrt{x}^2\cdot\sqrt{x}-1}=\underset{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \sqrt{x}=\omega}{\frac{\sqrt{x}^2-1}{\sqrt{x}^3-1}}=\frac{\omega^2-1}{\omega^3-1}=$$

$$\frac{(\omega-1)(\omega+1)}{(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)}=\frac{\omega+1}{\omega^2+\omega+1}=$$

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}^2+\sqrt{x}+1}}$$

6. Άθροισμα κύβων

$$x^3+a^3=(x+a)\cdot(x^2-ax+a^2)$$

- Παραδείγματα απλοποίησης με τον παραπάνω τύπο

i.

$$\frac{x^3+1}{2x+2}=\frac{x^3+1^3}{2(x+1)}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{2(x+1)}=\boldsymbol{\frac{x^2-x+1}{2}}$$

ii. Με χρήση και συζυγούς παράστασης

$$\frac{x^3+1}{\sqrt{x+2}-1} =$$

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{\sqrt{x+2}-1} =$$

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{\left(\sqrt{x+2}-1\right)\left(\sqrt{x+2}+1\right)} =$$

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{\sqrt{x+2}^2-1} =$$

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{x+2-1} =$$

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{x+1} =$$

$$\boldsymbol{\left(x^2-x+1\right)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}$$

7. Διαίρεση πολυωνύμων

Να κάνετε την διαίρεση $P(x) \colon Q(x)$, όπου:

$$P(x) = x^3 + x^2 - x + 2 \quad \textit{και} \quad Q(x) = x^2 - x + 1$$

Απάντηση

Διαιρετέος	Διαιρέτης	
$+\boldsymbol{x^3} + x^2 - x + 2$ $-x^3 + x^2 - x$ (+)________________ $+\boldsymbol{2x^2} - 2x + 2$ $-2x^2 + 2x - 2$ (+)________________ Υπόλοιπο $= 0$	$\boldsymbol{x^2} - x + 1$	$1\eta\ \delta\iota\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\sigma\eta \quad \frac{x^3}{x^2} = \boldsymbol{x}$ $2\eta\ \delta\iota\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\sigma\eta \quad \frac{2x^2}{x^2} = \boldsymbol{2}$
	Πηλίκο: $\boldsymbol{x+2}$	

Δηλαδή :

$$x^3 + x^2 - x + 2 = (x+2)(x^2 - x + 1)$$