ΥΛΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Γ΄

ΘΕΜΑ 1ο.

1. Για απόδειξη **(10 μονάδες)**

Να αποδείξετε ότι

$$(x^2)' = 2x$$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$

Έχω:

$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2 = h(2x+h)$

Άρα για $h \neq 0$ ο λόγος μεταβολής γράφεται:

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$

και το

$\lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x + 0 = 2x$

Οπότε

$$(x^2)' = 2x$$

2. Για ερώτηση ανάπτυξης **(5 μονάδες)**

Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ οι τιμές μιας μεταβλητής X σε ένα δείγμα μεγέθους ν όπου $\kappa\, \kappa\alpha\iota\, \nu$ είναι φυσικοί αριθμοί και $1 \leq \kappa \leq \nu$.Πως ορίζεται η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i για $i = 1,2, \ldots \kappa$; Γιατί είναι $0 \leq f_i \leq 1$;

Απάντηση

Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i ορίζεται ως το πηλίκο της συχνότητας ν_i της τιμής x_i προς το μέγεθος ν του δείγματος. Δηλαδή

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$$

Έχω:

$$0 \leq \nu_i \leq \nu$$

Άρα

$$\frac{0}{\nu} \leq \frac{\nu_\iota}{\nu} \leq \frac{\nu}{\nu}$$

Δηλαδή

$$0 \leq f_i \leq 1$$

3. Για να χαρακτηρίσετε ως Αληθή ή Ψευδή **(5*2=10 μονάδες)**

Α. Τύποι-κανόνες

- **Σελίδες 29 και 33**: Τους πίνακες βασικών παραγώγων και κανόνων παραγώγισης
- **Σελίδα 67:** Τους τύπους των αθροιστικών και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων N_i *και* F_i
- **Σελίδα 95**: Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή ποια είναι τα ποσοστά των παρατηρήσεων στα διαστήματα

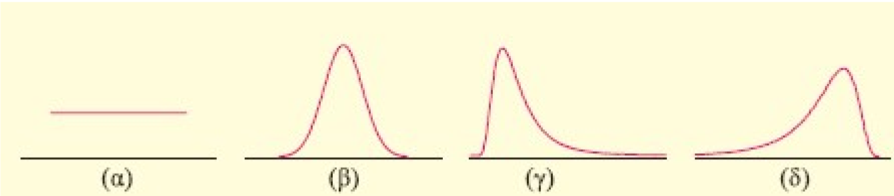
$$(\bar{x}-s, \bar{x}+s),\ (\bar{x}-2s, \bar{x}+2s),\ (\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$$

Β. Από τις επόμενες προτάσεις:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{εάν δείτε κάποια αυτούσια είναι } \underline{\text{ΣΩΣΤΗ}} \\ \text{εάν λείπει ή έχει αλλάξει το μέρος με τα έντονα γράμματα είναι "ΛΑΘΟΣ"}\end{array}\right\}$$

- **Σελίδα 14:** Ένα τοπικό ελάχιστο **<u>μπορεί</u>** να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.
- **Σελίδα 16:** Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης είναι μια συνεχής καμπύλη, **όταν η συνάρτηση είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα**.
- **Σελίδα 23**: Η συνάρτηση $|x|$ **<u>δεν</u>** έχει παράγωγο στο 0.
- **Σελίδα 40:** Αν στο $x_o \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $f'(x_o) = 0$ και η παράγωγος f' δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_o τότε η f **είναι γνησίως μονότονη στο** $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$
- **Σελίδα 71:** Το χρονόγραμμα χρησιμοποιείται για την γραφική απεικόνιση της χρονικής εξέλιξης μιας **<u>ποσοτικής μεταβλητής</u>**

• **Σελίδα 76 :**Από τις επόμενες καμπύλες η **(δ) παρουσιάζει αρνητική ασυμμετρία**



• **Σελίδα 87:** Η διάμεσος ενός δείγματος μεγέθους ν , του οποίου οι τιμές έχουν τοποθετηθεί κατά αύξουσα τάξη ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση

<u>όταν το μέγεθος ν είναι περιττός αριθμός</u>

• **Σελίδα 93:** Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X σε ένα δείγμα μεγέθους ν και $\bar{x}$ η μέση τιμή τους. Ο αριθμητικός μέσος των διαφορών

$(t_i - \bar{x}$) **<u>δεν</u>** μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο διασποράς των παρατηρήσεων .

• **Σελίδα 95**: Σε μια **<u>κανονική ή περίπου κανονική</u>** κατανομή παρατηρήσεων για το εύρος R ισχύει: $R \approx \mathbf{6}s$

• **Σελίδα 96:** Ο συντελεστής μεταβλητότητας CV **<u>δεν</u>** εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης.

ΘΕΜΑ 3ο.

Θα εξεταστείτε σε <u>μία</u> από τις επόμενες <u>τρεις</u> ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1

Η μέση ηλικία των εκπαιδευτικών στην Ελλάδα είναι τα 45 έτη και η μέση ηλικία των εκπαιδευτικών στην Γερμανία είναι τα 40 έτη. Ο πληθυσμός των εκπαιδευτικών της Γερμανίας είναι εννεαπλάσιος από τον πληθυσμό των εκπαιδευτικών της Ελλάδας.

i. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αριθμητικός μέσος για να υπολογιστεί η μέση ηλικία των καθηγητών και στις δύο χώρες; Ποιο μέτρο θέσης πρέπει αντί αυτού να χρησιμοποιηθεί; Αιτιολογήστε.

(12 μονάδες)

ii. Να υπολογίσετε την μέση ηλικία των εκπαιδευτικών συγκεντρωτικά στις δύο χώρες.

(13 μονάδες)

Απάντηση

i. Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αριθμητικός μέσος γιατί οι πληθυσμοί των εκπαιδευτικών στις δύο χώρες δεν είναι ίσοι.
Στην περίπτωση αυτή θα χρησιμοποιήσω τον σταθμικό μέσο όρο.
Ως συντελεστές βαρύτητας θα χρησιμοποιήσω τους δύο πληθυσμούς.

ii.

- Έστω N ο πληθυσμός των εκπαιδευτικών στην Ελλάδα και η μέση ηλικία τους $\bar{x} = 45$
- Τότε ο πληθυσμός των εκπαιδευτικών στην Γερμανία είναι ίσος με $9N$. Και η μέση ηλικία τους είναι $\bar{y} = 40$.

Επομένως η μέση ηλικία των εκπαιδευτικών στις δύο χώρες είναι :

$$\bar{z} = \frac{N \cdot \bar{x} + 9N \cdot \bar{y}}{N + 9N} = \frac{45N + 40 \cdot 9N}{10N} = \frac{45N + 360N}{10N} = \frac{405N}{10N} = \frac{405}{10} = 40{,}5 \text{ έτη}$$

ΣΤΗΝ ΕΠΟΜΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ ΘΑ ΔΕΙΤΕ ΤΗΝ ΑΣΚΗΣΗ 2

ΑΣΚΗΣΗ 2

Μια μεταβλητή X έχει περίπου κανονική κατανομή. Σε ένα δείγμα τιμών αυτής το διάστημα $(-17,-13)$ έχει κέντρο την μέση τιμή του δείγματος και περιέχει το 95% των τιμών του δείγματος .

i. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s.

(15 μονάδες)

ii. Να εξετάσετε την ομοιογένεια του δείγματος.

(10 μονάδες)

Απάντηση

i. Το διάστημα με κέντρο την μέση τιμή $\bar{x}$ που περιέχει το 95% των παρατηρήσεων σε κανονική κατανομή είναι το $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$

Άρα από την υπόθεση έχω: $\begin{cases} \bar{x}+2s=-13 & (1) \\ \bar{x}-2s=-17 & (2) \end{cases}$.

Προσθέτω κατά μέλη:

$$2\bar{x}=-30 \Leftrightarrow \bar{x}=\frac{-30}{2}=-15$$

Αντικαθιστώ στην (1):

$$-15+2s=-13 \Leftrightarrow 2s=15-13 \Leftrightarrow 2s=2 \Leftrightarrow s=1$$

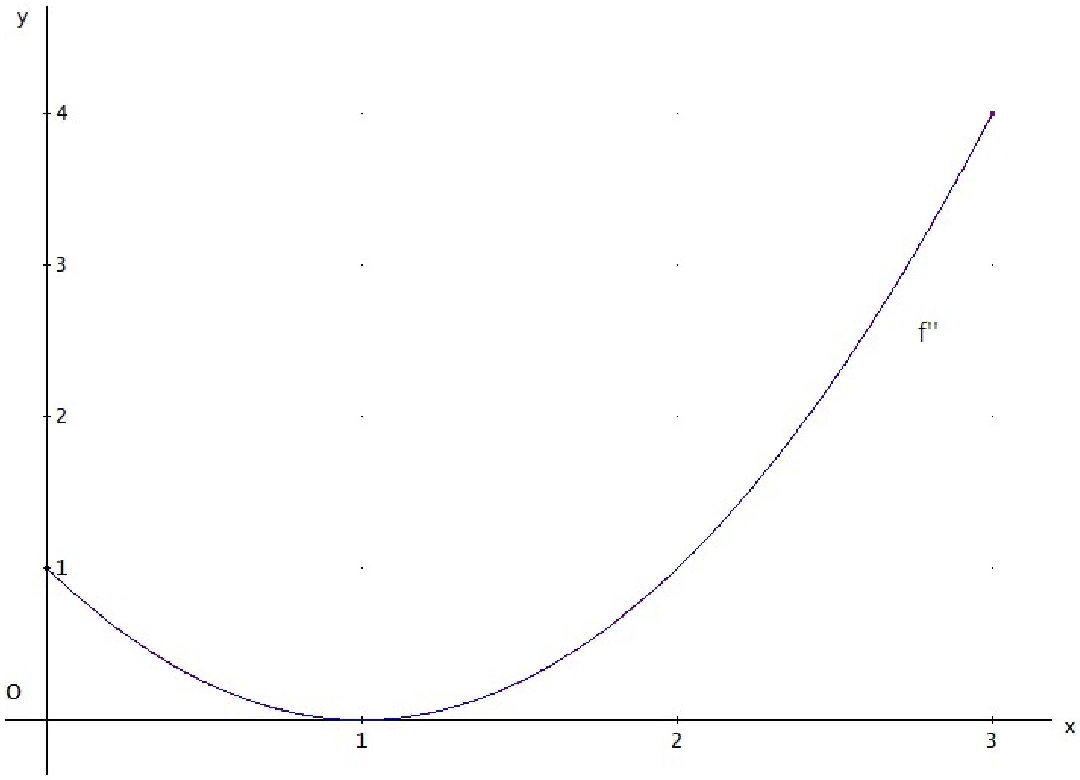
ii. Θα υπολογίσω τον συντελεστή μεταβλητότητας:

$$CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{1}{15}<\frac{1}{10}$$

Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΣΤΗΝ ΕΠΟΜΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ ΘΑ ΔΕΙΤΕ ΤΗΝ ΑΣΚΗΣΗ 3

ΑΣΚΗΣΗ 3



Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της 2ης παραγώγου συνάρτησης f η οποία έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $D = [0,3]$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f′ είναι γνησίως αύξουσα στο D.

(6 μονάδες)

ii. Εάν στο σημείο της με τετμημένη $x_o = 1$ η καμπύλη της f έχει εφαπτομένη παράλληλη με το άξονα $x'x$, να βρείτε την τιμή $f'(1)$ (3 μονάδες) και τα διαστήματα μονοτονίας της f (9 μονάδες)

(12 μονάδες)

iii. Εάν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία

$$\mathrm{A}(0,0) \quad \mathrm{B}\left(1,-\frac{1}{12}\right) \quad \Gamma\left(3,\frac{15}{12}\right)$$

να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f (5 μονάδες) και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)^2 = 4$ (2μονάδες)

(7 μονάδες)

Απάντηση

i. Παρατηρώ ότι $f''(1) = 0$ και σε όλα τα άλλα $x \in (0,3)$ ισχύει $f''(x) > 0$.

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.

ii. Αφού στο σημείο της με τετμημένη $x_o = 1$ η καμπύλη της f έχει εφαπτομένη παράλληλη με το άξονα $x'x$, πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης να είναι 0, δηλαδή

$f'(1) = 0$.

Έχω βρει ότι $f' \uparrow [0,3]$ και $f'(1) = 0$. Άρα

- Αν $0 \leq x < 1$, τότε $f'(x) < f'(1) = 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1]

- Αν $1 < x \leq 3$, τότε $f'(x) > f'(1) = 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο [1,3]

iii. ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΗΣ f

x	0		1		3
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{12}$	↗	15/12

Από τον πίνακα μονοτονίας παρατηρώ ότι :

- Η f έχει ολικό μέγιστο το $f(3) = \frac{15}{12}$
- Η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(1) = -\frac{1}{12}$

Η εξίσωση γράφεται:

$$f(x)^2 = 4 \Leftrightarrow \ f(x) = \sqrt{4} = 2 \quad ή \quad f(x) = -\sqrt{4} = -2$$

Οι εξισώσεις είναι αδύνατες γιατί $-2 < -\frac{1}{12}$ και $2 > \frac{15}{12}$.

Δηλαδή δεν υπάρχει καμμία λύση.