

ΠΩΣ ΑΠΑΝΤΩ ΣΕ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ

1. Χρειάζομαι να θυμάμαι τους παρακάτω πίνακες προσήμου για να καθορίσω το πρόσημο της παραγώγου

Πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού $ax + \beta$ που έχει ρίζα ρ

x	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$ax + \beta$	ετερόσημο του a	0	ομόσημο του a

Πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού $ax^2 + \beta x + \gamma$

Θα θυμάμαι ότι έχω τρεις περιπτώσεις

Διακρίνουσα $\Delta < 0$			
x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του a		

Διακρίνουσα $\Delta = 0$ και ρίζα διπλή ρ			
x	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$ax^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του a	0	ομόσημο του a

Διακρίνουσα $\Delta > 0$ και ρίζες $\rho_1 < \rho_2$					
x	$-\infty$	ρ_1	ρ_2	$+\infty$	
$ax^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του a	0	ετερόσημο του a	0	ομόσημο του a

Πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού $ax^3 + \beta$ που έχει ρίζα ρ

x	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$ax^3 + \beta$	ετερόσημο του a	0	ομόσημο του a

2. Εάν **δεν** θυμάμαι τους κανόνες αυτούς:

- Εκλέγω **στην τύχη** σε κάθε διάστημα από έναν αριθμό.
- Βρίσκω το πρόσημο της παραγώγου στον αριθμό αυτό.
- Το πρόσημο που βρίσκω μου δείχνει το πρόσημο σε όλο το διάστημα.

Υπάρχει και ο τρόπος της 2^{ης} παραγώγου:

- Βρίσκω την $f''(x)$ και το πρόσημό της.
- Από το πρόσημο αυτό καταλαβαίνω την μονοτονία της f'
- Το κάνω αυτό για να δω τη σειρά του προσήμου της f'

3. Μου ζητάει να αποδείξω ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη στο διάστημα Δ

- Βρίσκω την f'
- Αποδεικνύω ότι $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο Δ , ή ότι $f'(x) \leq 0$ για κάθε x στο Δ

4. Μου ζητάει να βρω μια παράμετρο α στον τύπο συνάρτησης 3^{ου} βαθμού ώστε αυτή να είναι γνήσια μονότονη στο διάστημα Δ

- Βρίσκω την f' που είναι 2ου βαθμού
- Πρέπει η f' να μην αλλάζει πρόσημο. Άρα πρέπει η διακρίνουσα $\Delta \leq 0$. Από την τελευταία ανίσωση βρίσκω το α .

5. Μου ζητάει να εξετάσω τη μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ

- Βρίσκω την f'
- Λύνω την εξίσωση $f'(x) = 0$ και βρίσκω ρίζες ας πούμε $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$
- Κάνω τον πίνακα μονοτονίας της f που έχει την εξής γενική μορφή και συμπληρώνω το πρόσημο της f' στα διαστήματα. Το πρόσημο μου δείχνει τη μονοτονία της f και στην τελευταία γραμμή που της δίνω πάντα μεγαλύτερο βάθος αποτυπώνω τη μεταβολή της f

x	α	ρ_1	ρ_2	ρ_3	β			
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$								

- Υπολογίζω τις τιμές της συνάρτησης στις ρίζες της παραγώγου αλλά και στα άκρα του όταν αυτά ανήκουν στο Δ .
- Αυτές οι τιμές μου δείχνουν τα ακρότατα τοπικά και ολικά αν υπάρχουν.

Ο ΣΩΣΤΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΑΠΑΝΤΑ ΣΕ ΠΟΛΛΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

- Εάν το πρόβλημα ζητά να αποδείξω ότι $f(x) \geq m$, για κάθε x ελέγχω μήπως το m είναι το ολικό ελάχιστο όπως φαίνεται από τον πίνακα μεταβολών
- Εάν το πρόβλημα ζητά να βρω το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = m$ βλέπω πόσες φορές η οριζόντια ευθεία $y = m$ τέμνει τον πίνακα μεταβολών.
- Εάν το πρόβλημα ζητά να αποδείξω ότι $f(x) \leq M$, για κάθε x ελέγχω μήπως το M είναι το ολικό μέγιστο όπως φαίνεται από τον πίνακα μεταβολών

- Εάν το πρόβλημα ζητά να αποδείξω μια ανισότητα μεταξύ δύο ή περισσότερων τιμών της συνάρτησης θα ελέγξω σε ποιο διάστημα μονοτονίας βρίσκονται οι αντίστοιχες τιμές του x και από την μονοτονία θα αποδείξω την ανισότητα
- Εάν το πρόβλημα ζητά να λύσω μια ανίσωση που περιέχει την $f(x)$, θα λύσω την αντίστοιχη εξίσωση και μετά η ανίσωση λύνεται από τον πίνακα μεταβολών γιατί αυτός δείχνει τις αυξομειώσεις της .
- Εάν το πρόβλημα ζητά να αποδείξω ότι το τοπικό ακρότατο δεν είναι ολικό σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς, τότε δοκιμάζω τις τιμές $f(10), f(20), \dots$ ή $-f(10), -f(20), \dots$ για να βρω μία να διαψεύδει την ανισότητα.

6. Μου δίνεται μια συνάρτηση f η οποία έχει στον τύπο της άγνωστες παραμέτρους λ, μ και μου δίνει δεδομένο ότι στο **εσωτερικό σημείο** $x = a$ η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο τον αριθμό β .

Για να βρω τα λ και μ χρειάζομαι δύο εξισώσεις για να λύσω ένα απλό σύστημα.

Γράφω πρώτα την εξής πρόταση:

- Η f έχει ακρότατο στο $x = a$ τον αριθμό β σημαίνει

$$f(a) = \beta \quad \text{και} \quad f'(a) = 0$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις θα μου δώσουν τα λ, μ .

- Ελέγχω αν για τις τιμές που βρήκα αν αλλάζει η μονοτονία στο x_0 . Μόνο αν αλλάζει δέχομαι τις τιμές που βρήκα.