Κεφάλαιο 1
Διαφορικός Λογισμός

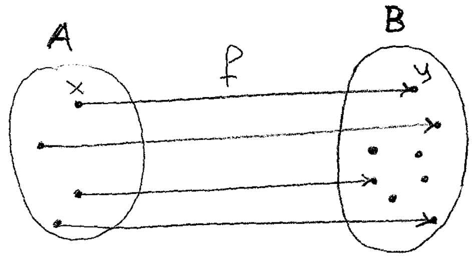
1.1 Συναρτήσεις

→ Ερωτήσεις Θεωρίας

• 1. Να ορίσετε την έννοια της συνάρτησης

Συνάρτηση ονομάζουμε μια διαδικασία f με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο ενός συνόλου B.

Σχηματική αναπαράσταση



Το A ονομάζεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Αν το στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται με την f στο $y \in B$ τότε γράφουμε

$$y = f(x).$$

και λέμε ότι το y είναι η τιμή της f στο x.

Το γράμμα x, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του A, ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή

Το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x και εξαρτάται από την τιμή του x, ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή.

• 2. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής;

Πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής ονομάζεται εκείνη που έχει πεδίο ορισμού A ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και παίρνει τιμές στο σύνολο $\mathbb{R}$.

3. Αν δύο συναρτήσεις f και g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A, πως ορίζονται οι συναρτήσεις άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο;

α) Το άθροισμα $S = f + g$, ορίζεται ως εξής

$$S(x) = f(x) + g(x), \quad x \in A$$

β) Η διαφορά $D = f - g$, ορίζεται ως εξής

$$D(x) = f(x) - g(x), \quad x \in A$$

γ) Το γινόμενο $P = f \cdot g$, ορίζεται ως εξής

$$P(x) = f(x) \cdot g(x), \quad x \in A$$

δ) Το πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$, ορίζεται ως εξής

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{όπου } x \in A \text{ και } g(x) \neq 0$$

4. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f;

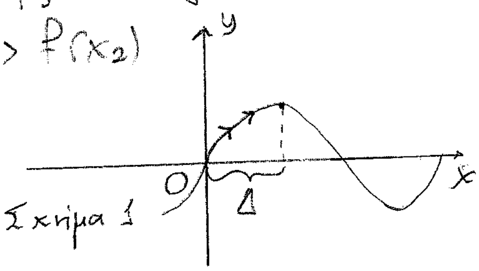
Εάν f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A, τότε γραφική παράσταση της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy ονομάζεται το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

5. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνήσια αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; (Σχήμα 1)

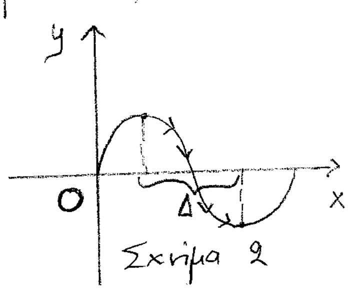
Μια συνάρτηση f λέγεται γνήσια αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

6. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνήσια φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; (Σχήμα 2)

Μια συνάρτηση f λέγεται γνήσια φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

• 7. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο για $x = x_0$ του πεδίου ορισμού της A;

Μια συνάρτηση f λέμε ότι έχει ολικό μέγιστο για $x = x_0$ του πεδίου ορισμού της A, όταν ισχύει

$$f(x) \le f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

• 8. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο για $x = x_0$ του πεδίου ορισμού της A;

Μια συνάρτηση f λέμε ότι έχει ολικό ελάχιστο για $x = x_0$ του πεδίου ορισμού της A, όταν ισχύει

$$f(x) \ge f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

• 9. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ότι έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

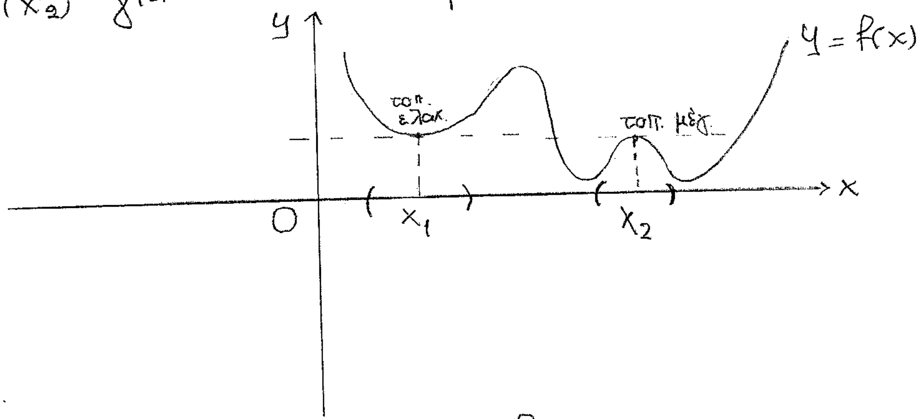
Λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν ισχύει

$$f(x) \le f(x_1) \text{ για κάθε } x \text{ σε μια περιοχή του } x_1$$

• 10. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ότι έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$;

Λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$, όταν ισχύει

$$f(x) \ge f(x_2) \text{ για κάθε } x \text{ σε μια περιοχή του } x_2$$



• 11. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει όριο τον αριθμό ℓ στο x_0;

Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο τον αριθμό ℓ στο x_0 όταν: το $f(x)$ παίρνει τιμές πολύ κοντά στο ℓ ($f(x) \to \ell$) καθώς το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο x_0 ($x \to x_0$).

Γράφουμε τότε: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

• 12. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \text{ για κάθε } x_0 \text{ στο } A.$$

⟶ <u>Σύντομες προτάσεις για Θέματα Σ - Λ</u>

1. Όταν σε μια συνάρτηση f, το $f(x)$ εκφράζεται μόνο με έναν αλγεβρικό τύπο, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το << ευρύτερο >> υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

2. Ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου του επιπέδου των αξόνων ανήκει στη γραφική παράσταση (καμπύλη) μιας συνάρτησης f μόνο όταν $y = f(x)$

3. Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της f

4. Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται ακρότατα της συνάρτησης

5. Η αναζήτηση ορίου μιας συνάρτησης f στο x_0, έχει νόημα όταν το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, ή δεν ανήκει αλλά υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού της f πολύ κοντά στο x_0

6. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \quad \text{όπου } \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$$

τότε

• $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2$, • $\lim_{x \to x_0} [k f(x)] = k \ell_1$

• $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2$, • $\lim_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ (<u>όταν</u> $\ell_2 \neq 0$)

• $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{\nu} = \ell_1^{\nu}$, • $\lim_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)}$ (όταν $\ell_1 \geq 0$)

- 7. Οι πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών, είναι συνεχείς συναρτήσεις

- 8. Ισχύουν

$$\lim_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0, \quad \lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0, \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0 \ (\text{όταν } \sigma\upsilon\nu x_0 \neq 0)$$

$$\lim_{x \to x_0} e^{x} = e^{x_0}, \quad \lim_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0 \ (\text{όταν } x_0 > 0)$$

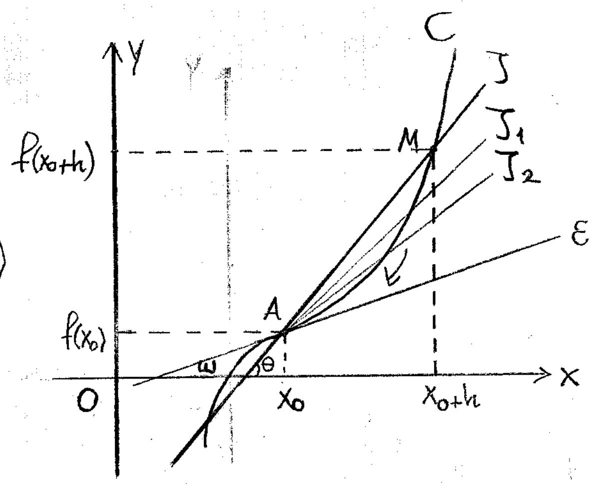
- 9. Ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο

- 10. Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα, είναι ότι η γραφική παράστασή της είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί

→ Παράγραφος 1.2

Η έννοια της παραγώγου

Α. Εφαπτομένη καμπύλης



I) Έστω $A(x_0, f(x_0))$ και $M(x_0+h, f(x_0+h))$ δύο διαφορετικά σημεία της γραφικής παράστασης C της f, δηλαδή $h \neq 0$

Λέμε ότι η ευθεία AM είναι μια __τέμνουσα__ της C.

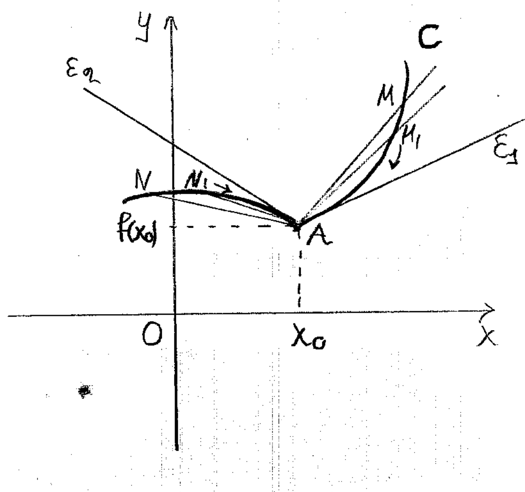
Ο συντελεστής διεύθυνσης της AM είναι $\lambda_{AM} = \varepsilon\varphi\theta = \dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

II) Με σταθερό το A, μετακινούμε το M ώστε να προσεγγίζει ολοένα το A, χωρίς να συμπέσει με το A.
Δηλαδή $h \to 0$.

Εάν, όπως στο σχήμα, η τέμνει AM τείνει να πάρει μια θέση ευθείας ε, λέμε ότι η (ε) είναι η εφαπτόμενη της C_f στο A.
Δηλαδή « εφαπτόμενη της C_f στο A, λέγεται η οριακή θέση που παίρνει μια τέμνουσα AM, καθώς το M τείνει προς το A » } ερώτηση θεωρίας

III) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης της C_f στο A είναι } ερώτηση θεωρίας

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

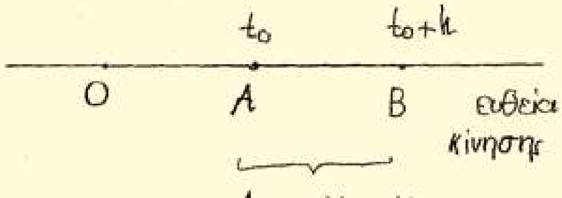


IV) Παρατήρηση για τα σχήματα
Στο διπλανό σχήμα, βλέπουμε ότι στο σημείο A της C, υπάρχουν διαφορετικές τελικές θέσεις ε_1 και ε_2 για τις τέμνουσες.
Αυτό συμβαίνει γιατί στο A η C_f παρουσιάζει __γωνία__

Β. Στιγμιαία ταχύτητα

Ι) Έστω $x = f(t)$ η συνάρτηση θέσης ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση.

Επειδή το t εκφράζει χρόνο, είναι $t \geq 0$



- $\Delta x = x_B - x_A$
- $\Delta t = t_0 + h - t_0 = h$

« Μέση ταχύτητα του κινητού στο διάστημα $[t_0, t_0+h]$ ονομάζεται το πηλίκο

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$ »

ερώτηση θεωρίας

ΙΙ) « Ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 λέγεται το όριο

$$v = \lim_{h\to 0} \bar{v} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$ »

ερώτηση θεωρίας

δηλαδή

« είναι το όριο του λόγου μεταβολής της τετμημένης του κινητού προς την αύξηση του χρόνου, καθώς η τελευταία τείνει προς το μηδέν, χωρίς στην πραγματικότητα να γίνεται ίση με το μηδέν »

ερώτηση θεωρίας

Γ. Παράγωγος συνάρτησης f στο $x = x_0$

1. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν το $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός

SOS ερώτηση θεωρίας

Το όριο αυτό ονομάζεται « παράγωγος της f στο x_0 » και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Δηλαδή :
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

2. Παρατηρήσεις για προτάσεις «Σωστό – Λάθος»

• I) Το πηλίκο $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$ ονομάζεται « λόγος μεταβολής του $y=f(x)$ στο x_0 »

• II) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το «ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x, όταν $x=x_0$ »

• III) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x, όταν $x=x_0$.

Άρα $\lambda = \varepsilon\varphi\omega = f'(x_0)$

• IV) Η ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_0 ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και έχει συνάρτηση θέσης $x=f(t)$, είναι $f'(t_0)$ δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t, όταν $t=t_0$

Άρα $\upsilon(t_0) = f'(t_0)$

• V) Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι παραγωγίσιμες σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού τους.

→ Παράδειγμα Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

Απόδειξη

• Έστω $h \neq 0$. Τότε $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{|h|-|0|}{h} = \dfrac{|h|}{h}$

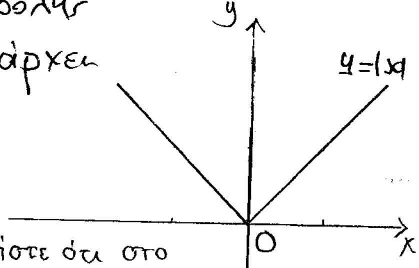
• Εάν $h>0$, τότε $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$

άρα $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$

• Εάν όμως $h<0$, τότε $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{-h}{h} = -1$

άρα $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$

Οι διαφορετικές τιμές του ορίου του λόγου μεταβολής από τις δύο κατευθύνσεις, δείχνουν ότι δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο $x_0=0$.



Παρατηρήστε ότι στο $x_0=0$, η C_f παρουσιάζει γωνία. Γι' αυτό το λόγο δεν υπάρχει και

→ Παράγραφος 1.3

Παράγωγος συνάρτησης

Α. Ορισμοί και αποδείξεις

1. Τι ονομάζουμε παράγωγο μιας συνάρτησης f

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη.
Η συνάρτηση με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στον αριθμό $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, ονομάζεται παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'

2. Τι ονομάζουμε δεύτερη παράγωγο μιας συνάρτησης f

Δεύτερη παράγωγο μιας συνάρτησης f ονομάζουμε την παράγωγο της συνάρτησης f', η οποία συμβολίζεται με f''.
Δηλαδή $f'' = (f')'$

3. Οι παράγωγοι των στοιχειωδών συναρτήσεων

• I) Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$

Ισχύει $(c)' = 0$

Απόδειξη

Έστω $h \neq 0$. Τότε $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$.

Άρα $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 0 = 0$.

Δηλαδή $(c)' = 0$

1

• II) Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$

Ισχύει $(x)'=1$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $h\neq 0$. Τότε $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{x+h-x}{h}=\dfrac{h}{h}=1$

Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$

Δηλαδή $(x)'=1$. —

• III) Η παράγωγος της δυναμοσυνάρτησης $f(x)=x^p$

Ισχύει $(x^p)'=p\cdot x^{p-1}$, για κάθε ρητό εκθέτη p

• IV) Η παράγωγος των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημx, συνx

Ισχύει $\begin{cases}(\text{ημ}x)'=\text{συν}x\\(\text{συν}x)'=-\text{ημ}x\end{cases}$ $x\in\mathbb{R}$ 2

• V) Η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης με βάση e

Ισχύει $(e^x)'=e^x$ $x\in\mathbb{R}$.

• VI) Η παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης με βάση e

Ισχύει $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

4. Κανόνες παραγώγισης

I) Η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Ισχύει $[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

II) Η παράγωγος της συνάρτησης γινόμενο

Ισχύει $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

III) Η παράγωγος της συνάρτησης πηλίκο

Ισχύει $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

IV) Παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = c \cdot f(x)$, όπου c είναι σταθερός αριθμός.

Ισχύει $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

Απόδειξη

Έστω $h \neq 0$. Τότε $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{c f(x+h) - c f(x)}{h} = \frac{c[f(x+h)-f(x)]}{h}$

$= c \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Άρα $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[c \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right] = c \cdot f'(x)$. —

V) Παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = f(x) + g(x)$

Ισχύει $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Απόδειξη

Έστω $h \neq 0$. Τότε $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x+h)+g(x+h) - (f(x)+g(x))}{h}$

$= \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}$

$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Άρα $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$= f'(x) + g'(x)$.

Δηλαδή $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$. —

VI) Η παράγωγος της συνάρτησης $εφx = \frac{ημx}{συνx}$

Ισχύει $(εφx)' = \frac{1}{συν^2 x}$ [Επειδή υπάρχει ως λυμένη εφαρμογή, δεν μπορεί να ζητηθεί η απόδειξη

3

vii) Η παράγωγος της συνάρτησης $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

Ισχύει $(\sigma\varphi x)' = \frac{-1}{\eta\mu^2 x}$

Απόδειξη (μπορεί να ζητηθεί ως άσκηση)

$$(\sigma\varphi x)' = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)' = \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x}$$

$$= \frac{-\eta\mu x \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{-\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}$$

$$= \frac{-(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)}{\eta\mu^2 x} = \frac{-1}{\eta\mu^2 x}.$$

Β. Σύντομες προτάσεις - παρατηρήσεις για τα Σωστό - Λάθος

1. Η συνάρτηση $f(g(x))$ λέγεται «σύνθεση της g με την f.»
2. Η συνάρτηση $g(f(x))$ λέγεται «σύνθεση της f με την g.»
3. Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα είναι τη χρονική στιγμή $x(t)$, τότε η ταχύτητά του είναι
$$\upsilon(t) = x'(t)$$
4. Εάν η συνάρτηση υ είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι η παράγωγος της ταχύτητας. Δηλαδή $\alpha(t) = \upsilon'(t)$ ή, ισοδύναμα, $\alpha(t) = x''(t)$
5. Για να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $f(g(x))$, πρώτα παραγωγίζουμε την f σα να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή τη $g(x)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της g.

Γ. Συνοπτικός πίνακας με τους βασικούς τύπους και κανόνες παραγώγισης

$(c)' = 0$	$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$(c f(x))' = c \cdot f'(x)$
$(x)' = 1$	$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
$(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$	$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(e^x)' = e^x$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

→ Παράγραφος 1.4

Εφαρμογές των παραγώγων

Α.

1. Το κριτήριο της θετικής πρώτης παραγώγου

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο Δ.

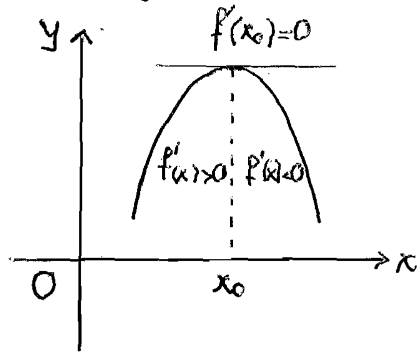
2. Το κριτήριο της αρνητικής πρώτης παραγώγου

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνήσια φθίνουσα στο Δ.

3. Το κριτήριο μεγίστου

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β), για $x=x_0$, μέγιστο.

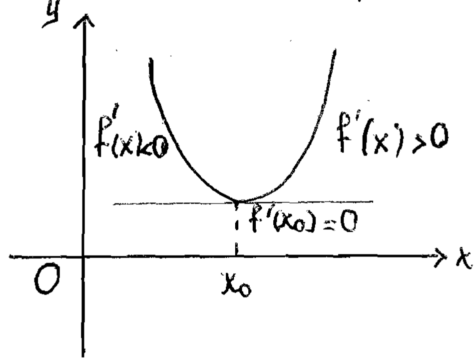
Σχήμα



4. Το κριτήριο ελαχίστου

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β), για $x=x_0$, ελάχιστο.

Σχήμα



Β. Σύντομες προτάσεις για ερωτήσεις Σ – Λ

1. Εάν σε εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο, η παράγωγος $f'(x_0)$ ισούται με το μηδέν.

2. Εάν σε εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο, η παράγωγος της f αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0.

Κεφάλαιο 2

2.1 Βασικές έννοιες στη Στατιστική

1. Τι ονομάζουμε πληθυσμό.

Πληθυσμό ονομάζουμε ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία εξετάζουμε ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά. Τα στοιχεία του πληθυσμού ονομάζονται μονάδες ή άτομα του πληθυσμού.

2. Τι ονομάζουμε μεταβλητή.

Μεταβλητή ονομάζουμε ένα χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζουμε έναν πληθυσμό. Τις διαφορετικές δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή ονομάζουμε τιμές της μεταβλητής

3. Στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις

Είναι η σειρά των δεδομένων που προκύπτει από την εξέταση των ατόμων ενός πληθυσμό ως προς ένα χαρακτηριστικό.
Τα στατιστικά δεδομένα δεν είναι πάντα διαφορετικά

4. Ποιοτικές (κατηγορικές) μεταβλητές

Είναι μεταβλητές των οποίων οι τιμές δεν είναι αριθμοί.
Για παράδειγμα η ομάδα αίματος, το φύλο (άρρεν-θήλυ), η οικογενειακή κατάσταση (άγαμος-έγγαμος).

5. Ποσοτικές μεταβλητές

Είναι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί.

→ α) Διακριτές

Είναι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι μεμονωμένοι αριθμοί.
Για παράδειγμα ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης (με τιμές 1, 2, ...), ο αριθμός των τέκνων μιας οικογένειας (με τιμές 0, 1, 2, ...)

→ β) Συνεχείς

Είναι μεταβλητές που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β) .

Για παράδειγμα η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης, το ύψος και το βάρος των μαθητών της Γ' Λυκείου.

6. Δείγμα

Δείγμα ονομάζεται ένα υποσύνολο του πληθυσμού

7. Αντιπροσωπευτικό δείγμα.

Αντιπροσωπευτικό ενός πληθυσμού θεωρείται ένα δείγμα όταν κάθε μονάδα του πληθυσμού έχει την ίδια δυνατότητα να επιλεγεί.

2.2 Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων

1. Τι ονομάζουμε συχνότητα

Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ οι τιμές μιας μεταβλητής X που προκύπτουν από ένα δείγμα μεγέθους ν, με $\kappa \le \nu$.
Συχνότητα της τιμής x_i ονομάζεται ο φυσικός αριθμός ν_i που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i στο σύνολο των παρατηρήσεων.

2. Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων ισούται με το μέγεθος του δείγματος. Δηλαδή

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = \nu.$$

3. Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα

Σχετική συχνότητα της τιμής x_i, ονομάζουμε το πηλίκο f_i της συχνότητας ν_i της x_i προς το μέγεθος ν του δείγματος. Δηλαδή

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad i = 1, 2, \ldots, \kappa. \quad \left[\text{Άρα } \nu_i = f_i \cdot \nu\right]$$

4. Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες

Ι) $0 \le f_i \le 1$, για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$

ΙΙ) $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$

Απόδειξη

Ι) Είναι $0 \le \nu_i \le \nu$. Άρα $\frac{0}{\nu} \le \frac{\nu_i}{\nu} \le \frac{\nu}{\nu}$, δηλαδή

$$0 \le f_i \le 1$$

ΙΙ) $$f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \ldots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} =$$

$$= \frac{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$$

ΙΙΙ) SOS για ασκήσεις: $f_\kappa = \frac{\nu_\kappa}{\nu}$, $f_\lambda = \frac{\nu_\lambda}{\nu}$

Άρα $$\frac{f_\kappa}{f_\lambda} = \frac{\nu_\kappa/\cancel{\nu}}{\nu_\lambda/\cancel{\nu}} \Rightarrow \frac{f_\kappa}{f_\lambda} = \frac{\nu_\kappa}{\nu_\lambda}$$

και μπορούμε να υπολογίσουμε άγνωστα χωρίς να βρούμε πριν το ν.

5. Τι ονομάζουμε αθροιστική συχνότητα και τι σχετική αθροιστική συχνότητα

- Χρησιμοποιούνται στην περίπτωση <u>ποσοτικών</u> μεταβλητών

- Η αθροιστική συχνότητα N_i εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

$$N_i = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_i, \quad \underline{\text{όταν}} \quad x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_k$$

- Η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i

$$F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i, \quad \underline{\text{όταν}} \quad x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_k$$

[Οι τύποι N_i, F_i ισχύουν δηλαδή όταν οι τιμές της μεταβλητής X είναι σε αύξουσα τάξη]

- Ισχύουν οι σχέσεις :

I) $N_1 = \nu_1$, $N_2 = N_1 + \nu_2$, ..., $N_k = \nu$

$\nu_1 = N_1$, $\nu_2 = N_2 - N_1$, ..., $\nu_k = N_k - N_{k-1}$

II) $F_1 = f_1$, $F_2 = F_1 + f_2$, ..., $F_k = 1$ (ή αλλιώς $F_k\% = 100$)

$f_1 = F_1$, $f_2 = F_2 - F_1$, ..., $f_k = F_k - F_{k-1}$

III) $N_1 \le N_2 < \ldots \le N_k = \nu$, $F_1 \le F_2 \le \ldots \le F_k = 1$

- Γενική μορφή πίνακα συχνοτήτων ποσοτικής μεταβλητής

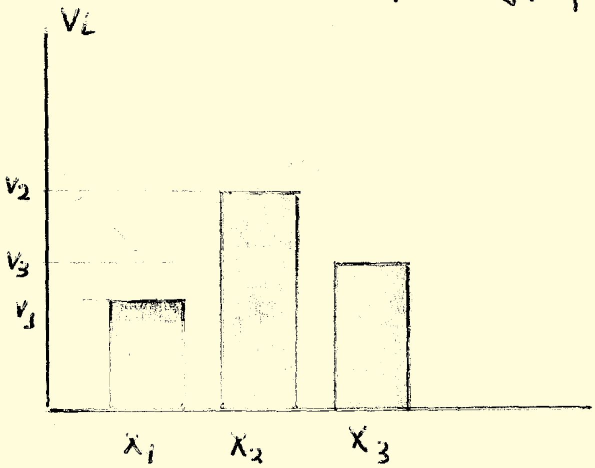
μεταβλητή (x_i)	Συχνότητα ν_i	Σχετ. Συχνότητα f_i	Σχετ. Συχνότ. $f_i\%$	Αθρ. Συχνότ. N_i	Αθρ. Σχετ. Συχν. F_i	Αθροιστική Σχετ. Συχν. $F_i\%$
x_1	ν_1	f_1	$f_1\%$	N_1	F_1	$F_1\%$
x_2	ν_2	f_2	$f_2\%$	N_2	F_2	$F_2\%$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_k	ν_k	f_k	$f_k\%$	ν	1	100
Σύνολο	ν	1	100	—	—	—

6. Γραφική παράστασης κατανομής συχνοτήτων

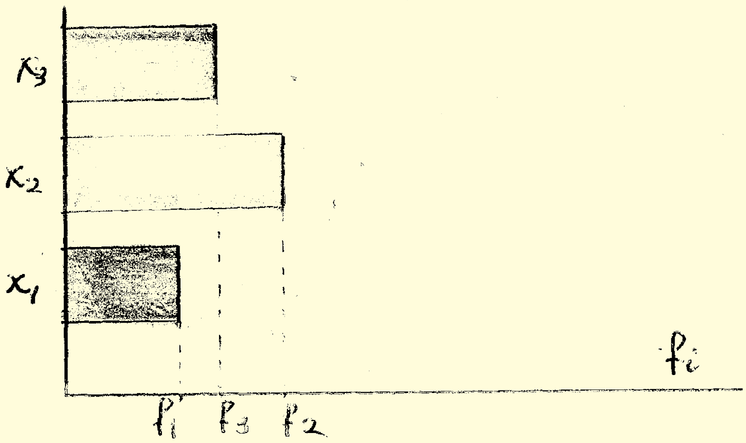
α) Ραβδόγραμμα

- Χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας <u>ποιοτικής</u> μεταβλητής.
- Αποτελείται από ορθογώνιες στήλες με βάση πάνω στον οριζόντιο ή τον κατακόρυφο άξονα.

- Σε κάθε τιμή της μεταβλητής X αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη με αυθαίρετο πλάτος στη βάση της κι αυθαίρετη απόσταση μεταξύ τους.
- Στο ραβδόγραμμα συχνοτήτων το ύψος κάθε στήλης ισούται με την αντίστοιχη συχνότητα.
- Στο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων το ύψος κάθε στήλης ισούται με την σχετική συχνότητα.
- Στο ίδιο ραβδόγραμμα μπορούν να παρασταθούν γραφικά οι τιμές μιας μεταβλητής για δύο ή περισσότερους πληθυσμούς.
- Γενική μορφή ραβδογράμματος



Ραβδόγραμμα συχνοτήτων

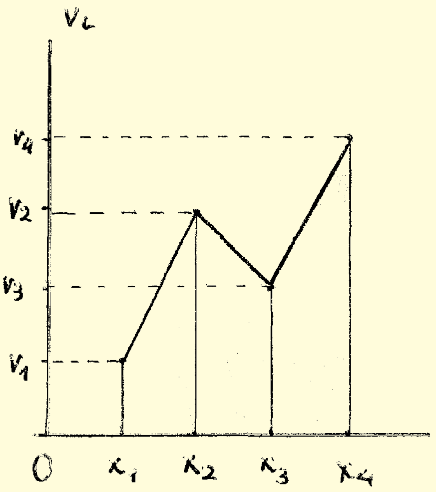


Ραβδόγραμμα συχνοτήτων <u>σχετικών</u> της ίδιας μεταβλητής στο ίδιο δείγμα (ραβδοι με βάσεις στον κατακόρυφο άξονα)

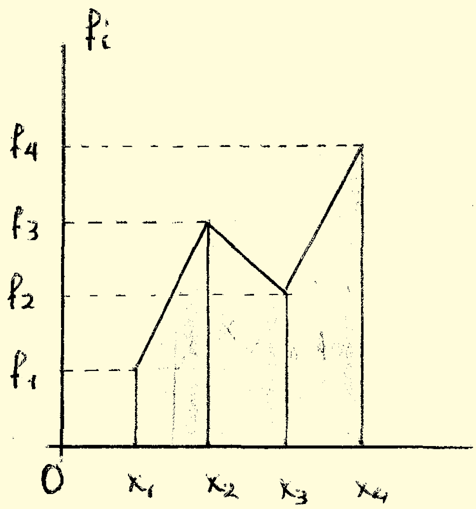
(Τα δύο σχήματα, όταν αναφέρονται στο ίδιο δείγμα και για την ίδια μεταβλητή, πρέπει να είναι όμοια)

β) Διάγραμμα συχνοτήτων

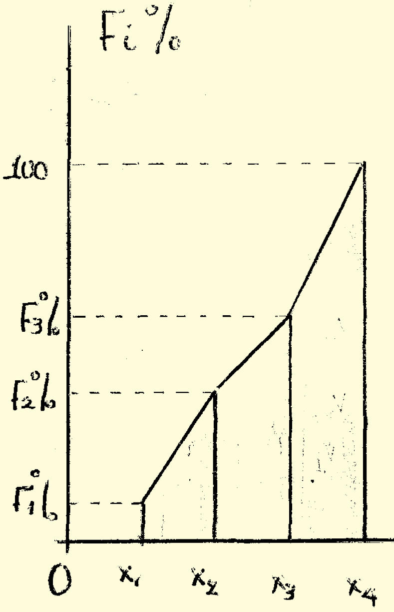
- Χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποσοτικής μεταβλητής.
- Στον οριζόντιο άξονα τοποθετούνται οι τιμές της μεταβλητής κατά αύξουσα τάξη (Δηλαδή $x_1 < x_2 < \dots < x_k$)
- Στο διάγραμμα συχνοτήτων, στην τιμή x_i υψώνεται μια κατακόρυφη γραμμή με μήκος ίσο με τη συχνότητα v_i.
- Στο διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, στην τιμή x_i υψώνεται μια κατακόρυφη γραμμή με μήκος ίσο με τη συχνότητα f_i.
- Στο διάγραμμα αθρ. σχετ. συχνοτήτων, στην τιμή x_i υψώνεται μια κατακόρυφη γραμμή με μήκος ίσο με την αθρ. σχετ. συχν. F_i
- Ενώνοντας τα σημεία (x_i, v_i), (x_i, f_i), (x_i, F_i) προκύπτουν τα αντίστοιχα πολύγωνα συχνοτήτων, σχ. συχνοτ, αθρ. σχ. συχνοτ.



Διάγραμμα - πολύγωνο συχνοτήτων



Διάγραμμα - πολύγωνο σχετ. συχνοτήτων



Διάγραμμα - πολύγωνο αθρ. σχετ. συχνοτήτων

όμοια σχήματα

ΠΡΟΣΟΧΗ

Αυτή η γραμμή, δεν κατεβαίνει ποτέ προς τα δεξιά. (το πολύ - πολύ να είναι οριζόντια)

γ) Κυκλικό διάγραμμα

- Χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.
- Σε κάθε τιμή x_i της μεταβλητής, αντιστοιχεί από έναν κυκλικό δίσκο ένας κυκλικός τομέας του οποίου το εμβαδό ή το τόξο είναι ανάλογο με τη συχνότητα ν_i (ή με τη σχετική συχνότητα f_i) της x_i

I) Αν α_i είναι το μέτρο του τόξου, τότε $\alpha_i = \nu_i \dfrac{360^\circ}{\nu} = 360^\circ f_i$

II) Αν l_i είναι το μήκος του τόξου, τότε $l_i = \nu_i \dfrac{2\pi\rho}{\nu} = 2\pi\rho f_i$

III) Αν E_i είναι το εμβαδό του κυκ. τομέα, τότε $E_i = \nu_i \cdot \dfrac{\pi\rho^2}{\nu} = \pi\rho^2 f_i$

[Οι τύποι στα II, III θα πρέπει να αποδεικνύονται πρώτα με την απλή μέθοδο των τριών]

δ) Σημειόγραμμα

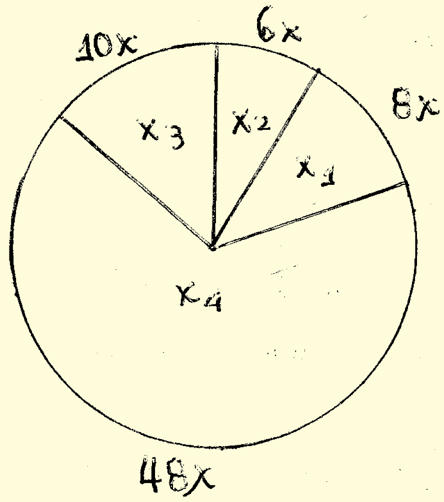
- Χρησιμοποιείται όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις μιας μεταβλητής (⚠ το βιβλίο, αφού δεν το καθορίζει, εννοεί ότι αφορά και ποιοτική και ποσοτική)
- Σε οριζόντιο άξονα τοποθετούνται οι τιμές της μεταβλητής
- Στην κατακόρυφο πάνω από την τιμή x_i σημειώνονται τόσα σημεία όσα και η συχνότητα της x_i.
- Το άθροισμα των σημείων του σημειογράμματος ισούται με το μέγεθος ν του δείγματος.

⚠ Παρατήρηση: Εάν τυχόν δοθεί σημειόγραμμα <u>σχετικών</u> συχνοτήτων τότε οι σχετ. συχνότητες υπολογίζονται με την απλή μέθοδο των τριών και <u>όχι</u> με απαρίθμηση των κουκίδων.

Στις επόμενες σελίδες θα βρείτε δύο παραδείγματα λυμένα

γ_2) Παράδειγμα στο κυκλικό διάγραμμα

Στο κυκλικό διάγραμμα δεξιά αναγράφονται τα μήκη τόξων των αντίστοιχων κυκλικών τομέων.
Να βρείτε τις σχετικές συχνότητες $f_i\%$



Απάντηση

- Το μήκος του κύκλου είναι

$$L = 8x + 6x + 10x + 48x = 72x$$

- Για την f_1: $f_1 = \frac{l_1}{L} = \frac{8x}{72x} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9} \simeq 0,11$

Δηλαδή $f_1\% = 11$

- Για την f_2: $f_2 = \frac{l_2}{L} = \frac{6x}{72x} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12} \sim 0,08$

Δηλαδή $f_2\% = 0,08$

- Για την f_3: $f_3 = \frac{l_3}{L} = \frac{10x}{72x} = \frac{10}{72} \simeq 0,14$

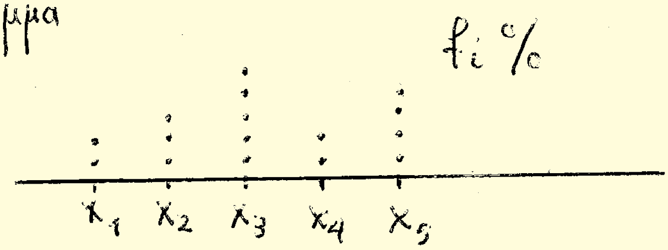
Δηλαδή

$f_3\% = 14$

- $f_4\% = 100 - f_1\% - f_2\% - f_3\%$ (η τελευταία συχνότητα πάντα με αφαίρεση υπολογίζεται)

$= 100 - 11 - 8 - 14 = 67$

δ_2) Παράδειγμα στο σημειόγραμμα



Στο σημειόγραμμα δεξιά, σημειώνονται οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό.
Εάν το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu = 400$, να βρείτε τις συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_5$

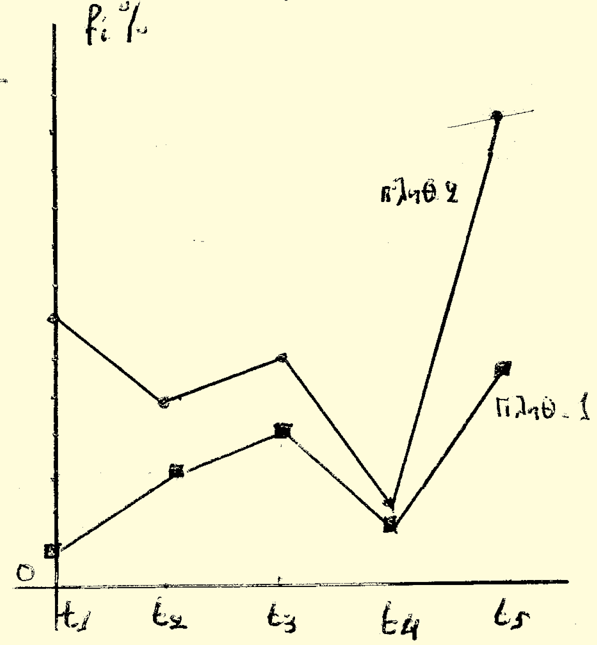
Απάντηση

- Το πλήθος των κουκίδων αντιστοιχεί στο 100
  Δηλαδή 16 κουκίδες αντιστοιχούν στο 100.
- $f_1\% = \frac{2}{16} \cdot 100 = 12,5 \Rightarrow \nu_1 = f_1 \cdot \nu = 0,125 \cdot 400 = 50$
- $f_2\% = \frac{3}{16} \cdot 100 = 18,75 \Rightarrow \nu_2 = f_2 \cdot \nu = 0,1875 \cdot 400 = 75$
- $f_3\% = \frac{5}{16} \cdot 100 = 31,25 \Rightarrow \nu_3 = f_3 \cdot \nu = 0,3125 \cdot 400 = 125$
- $f_4\% = f_1\% = 12,5$ και $\nu_4 = \nu_1 = 50$
- $\nu_5 = \nu - (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4) = 100$

ε) Χρονόγραμμα (ή χρονολογικό διάγραμμα)

- Χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός μεγέθους (π.χ. οικονομικού)
- Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται ως άξονας μέτρησης του χρόνου και ο κατακόρυφος ως άξονας μέτρησης της εξεταζόμενης μεταβλητής.
- Στο ίδιο χρονόγραμμα μπορεί να απεικονίζεται η εξέλιξη στο χρόνο ενός μεγέθους σε δύο ξεχωριστούς πληθυσμούς.

Γενικό σχήμα για χρονόγραμμα σχετικής συχνότητας, για δύο διαφορετικούς πληθυσμούς. →



→ <u>Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων</u> SOS

- Εφαρμόζεται όταν το πλήθος των τιμών μιας μεταβλητής είναι αρκετό μεγάλο
- Ειδική <u>εφαρμογή γίνεται</u> στην περίπτωση συνεχών μεταβλητών, όπου αυτές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα ορισμού τους.
- Τα δεδομένα ταξινομούνται (ομαδοποιούνται) σε έναν αριθμό από κλάσεις (διαστήματα πραγματικών αριθμών) ώστε:

« <u>κάθε τιμή ανήκει σε μία μόνο κλάση</u> »

- Ο αριθμός κ των κλάσεων εξαρτάται από το πλήθος των παρατηρήσεων (δηλαδή το μέγεθος ν του δείγματος) και καθορίζεται εκ των προτέρων)
- Οι κλάσεις είναι διαδοχικά διαστήματα, κλειστά αριστερά και ανοικτά δεξιά. Δηλαδή

$[\alpha_1, \alpha_2)$, $[\alpha_2, \alpha_3)$, ..., $[\alpha_\kappa, \alpha_{\kappa+1})$

Τα άκρα των διαστημάτων αυτών λέγονται και « όρια » των κλάσεων.

- « Κεντρική τιμή » μιας κλάσης ονομάζεται το κέντρο του αντίστοιχου διαστήματος. Δηλαδή

Κεντρική τιμή της κλάσης $[\alpha_1, \alpha_2)$ είναι η

$$x_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \qquad \underline{\underline{SOS}}$$

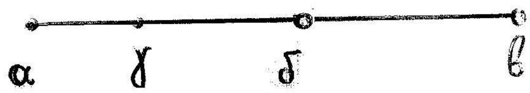
- Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης θεωρούνται όμοιες <u>SOS</u> Γι' αυτό το λόγο, εκπροσωπούνται [στους υπολογισμούς (μετά την ομαδοποίηση)] από την κεντρική τιμή της κλάσης <u>SOS</u>
- « Συχνότητα της κεντρικής τιμή x_i », ή αλλιώς « συχνότητα της κλάσης i » ονομάζεται ο αριθμός ν_i που δείχνει πόσες παρατηρήσεις ανήκουν στην κλάση i <u>SOS</u>
- Σε κάθε κλάση υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις είναι « ομοιόμορφα κατανεμημένες » <u>SOS και για θεωρία και στα προβλήματα</u>

• Γενικό παράδειγμα στην υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής των παρατηρήσεων μέσα σε κάθε κλάση. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ - ⚠ΠΡΟΣΟΧΗ

Η σχ. συχνότητα μιας κλάσης $[\alpha,\beta)$ είναι $f_i\%$.
Βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων στο υποδιάστημα $[\gamma,\delta)$ του $[\alpha,\beta)$

Απάντηση

• Έστω $x\%$ η άγνωστη σχ. συχνότητα επί τοις εκατό.



Σε διάστημα $[\gamma,\delta)$, που έχει μήκος $\delta-\gamma$, βρίσκεται ποσοστό $x\%$
Στο διάστημα $[\alpha,\beta)$, που έχει μήκος $\beta-\alpha$, βρίσκεται ποσοστό $f_i\%$

Επειδή η κατανομή των παρατηρήσεων στην κλάση $[\alpha,\beta)$ είναι ομοιόμορφη, τα παραπάνω μεγέθη είναι <u>ανάλογα</u>

Άρα $\dfrac{x}{f_i} = \dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha} \iff x = \dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha} \cdot f_i$

Δηλαδή $\boxed{x = \dfrac{\text{μήκος υποδιαστήματος}}{\text{μήκος διαστήματος}} f_i}$

Αυτός ο τύπος συνδέει όλα τα μεγέθη:

→ συχνότητα — επιμέρους συχνότητα

→ σχ. συχνότητα — επιμέρους σχ. συχνότητα

Κλάσεις ίσου πλάτους

- «Εύρος» R του δείγματος:

Ονομάζεται η διαφορά της μικρότερης στο δείγμα παρατήρησης από τη μεγαλύτερη στο δείγμα παρατήρηση.

Δηλαδή $R = X_{max} - X_{min}$

- Πλάτος c των κλάσεων

Είναι το πηλίκο του εύρους R προς τον αριθμό κ των κλάσεων

Δηλαδή $c = \frac{R}{\kappa}$

Το αποτέλεσμα της διαίρεσης στρογγυλεύεται πάντα προς τα πάνω

- Κατασκευή των κλάσεων

Με αρχή την μικρότερη παρατήρηση (ή κάποιον ελάχιστα μικρότερο αριθμό) και προσθέτοντας κάθε φορά το πλάτος c, κατασκευάζονται οι κ διαδοχικές κλάσεις

1) Οι κεντρικές τιμές διαδοχικών κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους κατά το πλάτος c.
2) Μια παρατήρηση που συμπίπτει με το άνω όριο μια κλάσης κατανέμεται στην επόμενη
3) Καμμία παρατήρηση δεν μπορεί να βρεθεί εκτός όλων των κλάσεων.
4) Η μεγαλύτερη τιμή του δείγματος ανήκει στην τελευταία κλάση

- ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΑΠΟ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ

Κλάσεις [,)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότ. ν_i	Σχ. συχν. f_i	Αθρ. Συχν. N_i	Σχετ. Αθρ. Συχν. $F_i\%$
$[a, a+c)$	$\frac{2a+c}{2}$	ν_1	f_1	N_1	$F_1\%$
$[a+c, a+2c)$	$\frac{2a+3c}{2}$	ν_2	f_2	N_2	$F_2\%$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$[a+\kappa c, a+\kappa c+c)$	$\frac{2a+2\kappa c+c}{2}$	ν_κ	f_κ	ν	100
Σύνολο	—	ν	1	—	—

Γραφική αναπαράσταση ταξινομημένων δεδομένων

→ Ιστόγραμμα

- Είναι η γραφική αναπαράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα
- Αντίστοιχα, η γραφική αναπαράσταση του πίνακα σχετικών συχνοτήτων λέγεται ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, και του πίνακα αθροιστικών σχετ. συχνοτήτων λέγεται ιστόγραμμα αθροιστ. σχετ. συχνοτήτων

→ Κατασκευή ιστογράμματος

- Στον οριζόντιο άξονα σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα τα όρια των κλάσεων.
- Με βάση κάθε μία κλάση, κατασκευάζουμε ορθογώνια παραλληλόγραμμα (ιστούς).
- Το ύψος κάθε ιστού είναι τέτοιο ώστε:
  « το εμβαδό του ιστού να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης »

→ Ιστόγραμμα για κλάσεις ίσου πλάτους. (SOS)

- Μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού στον οριζόντιο άξονα είναι το πλάτος c.
- Το ύψος κάθε ιστού ισούται με τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης
- Πριν την πρώτη κλάση και μετά την τελευταία υποτίθεται υπάρχουν δύο κλάσεις συχνότητας μηδενικής.

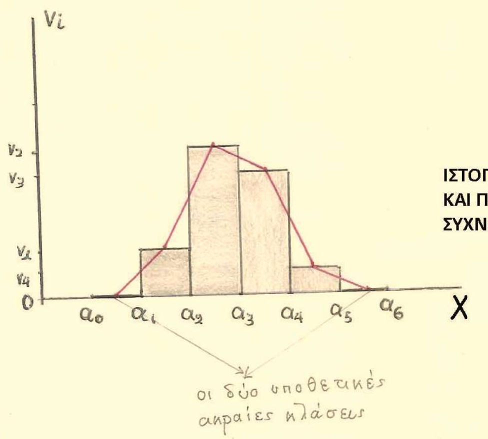
→ Πολύγωνο συχνοτήτων

- Ενώνουμε διαδοχικά τα μέσα των άνω βάσεων, και των υποθετικών.
- Η τεθλασμένη γραμμή που σχηματίζεται είναι το πολύγωνο συχνοτήτων (ομοίως κατασκευάζεται το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων)
- Το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο και τον οριζόντιο άξονα ισούται με το μέγεθος ν του δείγματος.

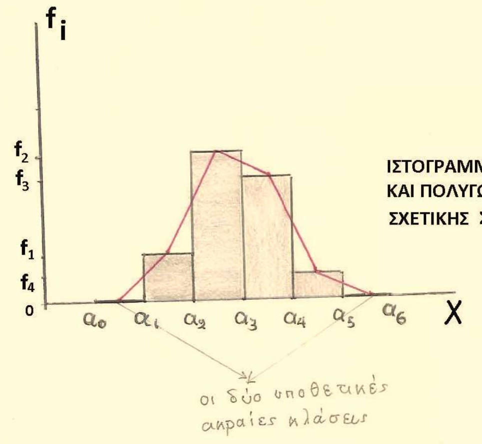
→ Πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων

- Ενώνουμε τα δεξιά άκρα των άνω βάσεων, από την αριστερή υποθετική έως την τελευταία κλάση.
- Η τεθλασμένη γραμμή που σχηματίζεται είναι το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων (ομοίως κατασκευάζεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων)

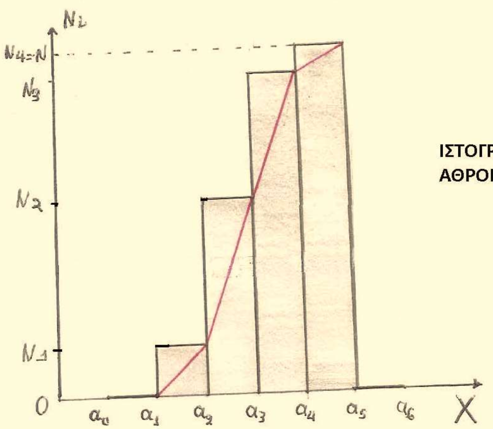
Γενικά σχήματα ιστογραμμάτων – πολυγώνων



ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ
ΚΑΙ ΠΟΛΥΓΩΝΟ
ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

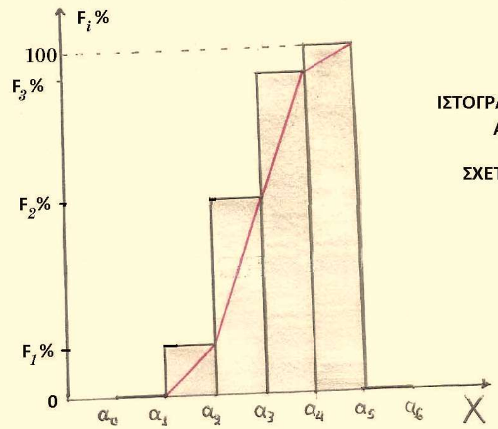


ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ
ΚΑΙ ΠΟΛΥΓΩΝΟ
ΣΧΕΤΙΚΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ



ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΟ - ΠΟΛΥΓΩΝΟ
ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

2.2 _ 13α



ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΟ - ΠΟΛΥΓΩΝΟ
ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΩΝ

ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

2.2 _ 13β

2.3 A ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ

1. Τι είναι τα μέτρα θέσης;

Απάντηση

Είναι αριθμητικά μεγέθη που δίνουν τη θέση του «κέντρου» των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα, εκφράζοντας την κατά «μέσο όρο» απόστασή τους από την αρχή O των αξόνων

2. Ποια είναι τα πιο συνηθισμένα μέτρα θέσης;

Απάντηση

Είναι η μέση τιμή (αλλιώς αριθμητικός μέσος), η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή (αλλιώς κορυφή)

3. Πως ορίζεται η μέση τιμή;

Απάντηση

Η μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων δια του πλήθους των παρατηρήσεων.
Η μέση τιμή συμβολίζεται με $\bar{x}$ και επομένως δίνεται από τη σχέση:

$$(1) \quad \bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_\nu}{\nu}$$

(δεν ξεχνάμε δίπλα να γράφουμε τη μονάδα μέτρησης σε ασκήσεις)

όπου ν είναι το μέγεθος του δείγματος και
$t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις του δείγματος

• Άλλες γραφές:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$$

όπου το σύμβολο $\sum_{i=1}^{\nu} t_i$, ή πιο απλά το $\sum t_i$,
είναι συντομογραφία του αθροίσματος $\sum_{i=1}^{\nu} t_i$

4. Τύπος μέσης τιμής από μία κατανομή συχνοτήτων

- $$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k}{v_1 + v_2 + \cdots + v_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i v_i}{\sum_{i=1}^{k} v_i} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{k} x_i v_i \quad (2)$$

όπου $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι οι τιμές της μεταβλητής
και $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι οι αντίστοιχες συχνότητες.

- Η ισότητα (2) γράφεται ισοδύναμα

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{v_i}{v} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i \quad (3)$$

όπου $f_1, f_2, \ldots, f_k$ είναι οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες.

5. Τύπος μέσης τιμής από ομαδοποιημένα δεδομένα σε κ κλάσεις

- $$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{v_i}{v} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i \quad (4)$$

όπου $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι τα <u>κέντρα</u> των κλάσεων
και $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι οι συχνότητες των κλάσεων
($f_1, f_2, \ldots, f_k$ είναι οι σχετ. συχνότητες των κλάσεων)

6. Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις

I) $\bar{x} = \frac{\sum t_i}{v} \Rightarrow \sum t_i = \bar{x} \cdot v \quad (5)$

Χρησιμοποιούμε αυτόν τον τύπο, όταν γνωρίζουμε τη μέση τιμή και το μέγεθος του δείγματος και θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των παρατηρήσεων.

II) Σε ένα δείγμα έχουμε για παράδειγμα τρεις ομάδες παρατηρήσεων: Α, Β και Γ.
Η μέση τιμή των παρατηρήσεων στην ομάδα Α είναι $\bar{x}_A$
Η μέση τιμή των παρατηρήσεων στην ομάδα Β είναι $\bar{x}_B$
Η μέση τιμή των παρατηρήσεων στην ομάδα Γ είναι $\bar{x}_\Gamma$
Ζητούμενη είναι η μέση τιμή του δείγματος.

Εργαζόμαστε ως εξής:

$$\bar{x} = \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\kappa)+(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_\lambda)+(\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_\mu)}{\kappa+\lambda+\mu}$$

όπου $\alpha_1, \dots, \alpha_\kappa$ είναι τα μέλη της ομάδας Α,
$\beta_1, \dots, \beta_\lambda$ είναι τα μέλη της ομάδας Β
$\gamma_1, \dots, \gamma_\mu$ είναι τα μέλη της ομάδας Γ.

Είναι $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\kappa}{\kappa} = \bar{x}_A$. Άρα $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\kappa = \bar{x}_A \cdot \kappa$

$\frac{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_\lambda}{\lambda} = \bar{x}_B$. Άρα $\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_\lambda = \bar{x}_B \cdot \lambda$

$\frac{\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_\mu}{\mu} = \bar{x}_\Gamma$. Άρα $\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_\mu = \bar{x}_\Gamma \cdot \mu$

Με αντικατάσταση στον τύπο του $\bar{x}$ έχουμε

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_A \cdot \kappa + \bar{x}_B \cdot \lambda + \bar{x}_\Gamma \cdot \mu}{\kappa+\lambda+\mu}$$

Αυτός είναι ο τύπος που συνδέει τις επιμέρους μέσες τιμές με τη μέση τιμή όλου του δείγματος

* Αριθμητικό παράδειγμα

Ο μέσος μισθός των εργαζομένων σε ένα εργοστάσιο είναι 800€.
Οι εργαζόμενοι χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες Α, Β, Γ.

Α: με μέσο μισθό $\bar{x}_A = 700$€. 50% των εργαζόμενων ανήκουν στην κατηγορία Α

Β: με μέσο μισθό $\bar{x}_B = 1000$€. 25% των εργαζόμενων ανήκουν στην κατηγορία Β.

Να υπολογίσετε το μέσο μισθό στην κατηγορία Γ.

Απάντηση

- Έστω κ τα άτομα στην ομάδα Α, λ τα άτομα στην ομάδα Β και μ τα άτομα στην ομάδα Γ. Τότε $\nu = \kappa + \lambda + \mu$

→ 50% των εργαζόμενων είναι στην ομάδα Α $\Rightarrow \frac{\kappa}{\nu} = \frac{50}{100} \Rightarrow \kappa = \frac{50}{100}\nu$ (1)

→ 25% των εργαζόμενων είναι στην ομάδα Β $\Rightarrow \frac{\lambda}{\nu} = \frac{25}{100} \Rightarrow \lambda = \frac{25}{100}\nu$ (2)

→ Στην ομάδα Γ είναι επομένως το

$(100 - 50 - 25)\% = 25\%$. Δηλαδή $\frac{\mu}{\nu} = \frac{25}{100} \Rightarrow \mu = \frac{25}{100}\nu$. (3)

- $\bar{x}_A = 700 \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_\kappa}{\kappa} = 700 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_\kappa = 700\kappa$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} a_1 + a_2 + \cdots + a_\kappa = 700 \cdot \frac{50}{100}\nu \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_\kappa = 350\nu$ (4)

- $\bar{x}_B = 1000 \Leftrightarrow \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_\lambda}{\lambda} = 1000 \Leftrightarrow b_1 + b_2 + \cdots + b_\lambda = 1000\lambda$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} b_1 + b_2 + \cdots + b_\lambda = 1000 \cdot \frac{25}{100}\nu \Leftrightarrow b_1 + b_2 + \cdots + b_\lambda = 250\nu$ (5)

- $\bar{x}_\Gamma = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu}{\mu} \Leftrightarrow \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu = \bar{x}_\Gamma \cdot \mu \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$

$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu = \bar{x}_\Gamma \cdot \frac{25}{100}\nu$. (6)

- $\bar{x} = 800 \Leftrightarrow \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_\kappa) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_\lambda) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu)}{\nu} = 800$

$\overset{(4,5,6)}{\Leftrightarrow} \frac{350\nu + 250\nu + \bar{x}_\Gamma \frac{25}{100}\nu}{\nu} = 800 \Leftrightarrow$

$600\nu + \bar{x}_\Gamma \frac{25}{100}\nu = 800\nu \Leftrightarrow$

$\underbrace{\bar{x}_\Gamma \cdot \frac{25}{100}\cancel{\nu} = 200\cancel{\nu}}_{\text{απλοποιείται το } \nu} \Leftrightarrow \bar{x}_\Gamma = 200 \cdot \frac{100}{25} = \boxed{800}$

7. Πως ορίζεται ο σταθμικός μέσος;

Απάντηση

Ο σταθμικός μέσος χρησιμοποιείται όταν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ δοθεί διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές βαρύτητας $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$.

Τότε ο σταθμικός μέσος δίνεται από τον τύπο

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \cdots + w_\nu}$$

1ο Παράδειγμα: Σε μια κατανομή συχνοτήτων, η μέση τιμή είναι ακριβώς ο σταθμικός μέσος των τιμών $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ με αντίστοιχα βάρη τις συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$ ή τις σχετ. συχνότητες $f_1, f_2, \ldots, f_\kappa$.

2ο Παράδειγμα: Εάν σε ένα δείγμα μεγέθους ν, έχω τρεις κατηγορίες

⚠ A: μεγέθους κ και μέση τιμή $\bar{x}_A$

B: μεγέθους λ και μέση τιμή $\bar{x}_B$

Γ: μεγέθους μ και μέση τιμή $\bar{x}_\Gamma$

τότε η μέση τιμή του δείγματος είναι

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_A \cdot \kappa + \bar{x}_B \cdot \lambda + \bar{x}_\Gamma \cdot \mu}{\kappa + \lambda + \mu}$$ όπως είδαμε

δηλαδή ο σταθμικός μέσος των επιμέρους μέσων τιμών με αντίστοιχα βάρη τους πληθυσμούς των ομάδων.

Προσοχή: Τον τύπο στο 2ο παράδειγμα τον χρησιμοποιούμε σε ασκήσεις όπως στην υποενότητα 6, και στην ανάγκη έλλειψης χρόνου χωρίς απόδειξη

8. Πως ορίζεται η διάμεσος ενός δείγματος ν παρατηρήσεων;

<u>Απάντηση</u>

Εάν έχουμε ν παρατηρήσεις οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, τότε διάμεσος δ του δείγματος ορίζεται να είναι:

I) η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός

II) το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

⚠ Παρατηρήσεις-μεθοδολογία (απαραίτητες για τις ασκήσεις)

• I) Πως εργαζόμαστε όταν ν : περιττός

Όταν ν περιττός, η μεσαία παρατήρηση είναι στη θέση $\frac{\nu+1}{2}$ (και αφήνει δεξιά και αριστερά $\frac{\nu-1}{2}$ παρατηρήσεις)

Δηλαδή $\delta = x_{\frac{\nu+1}{2}}$ και είναι παρατήρηση επίσης του δείγματος

• II) Πως εργαζόμαστε όταν ν : άρτιος

Όταν ν άρτιος, οι μεσαίες παρατηρήσεις είναι στη θέση $\frac{\nu}{2}$ και $\frac{\nu}{2}+1$.

Τότε $\delta = \dfrac{x_{\frac{\nu}{2}} + x_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}$, που δεν είναι πάντα παρατήρηση του δείγματος.

(Δεξιά και αριστερά του δ υπάρχουν $\frac{\nu}{2}$ παρατηρήσεις)

• III) Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων τοποθετημένων με σειρά τάξης μεγέθους, σε δύο ίσα μέρη. (και για θεωρία)

• IV) Όταν έχουμε μια κατανομή συχνοτήτων (x_i, ν_i), χρειαζόμαστε τη στήλη F_i των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για να υπολογίσουμε τη διάμεσο δ.

Αυτό γίνεται ως εξής :

→ <u>1η περίπτωση</u>

Εάν $F_i\% = 50$ για κάποιο δείκτη i, τότε $\delta = x_i$.

→ <u>2η περίπτωση</u>

Εάν $F_i\% < 50$ και $F_{i+1}\% > 50$ για κάποιο δείκτη i, τότε $\delta = x_{i+1}$

• v) Η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτή και το πολύ το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες απ' αυτή. (και για θεωρία)

• vi) Όταν έχουμε δεδομένα ομαδοποιημένα σε κλάσεις, τότε χρειαζόμαστε τη στήλη πάλι των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων F_i (ή $F_i\%$). Η διάμεσος δ έχει αθροιστική συχνότητα $F\% = 50$.
Αυτό γίνεται ως εξής :

→ Εάν $F_i\% = 50$ για κάποιο δείκτη i, τότε $\delta = b_i$, όπου b_i είναι το δεξιό άκρο της αντίστοιχης κλάσης $[a_i, b_i)$

→ Εάν $F_i\% < 50$ ενώ για την επόμενη αθρ. σχετ. συχνότητα ισχύει $F_{i+1}\% > 50$, τότε η διάμεσο δ είναι σημείο της κλάσης $[a_{i+1}, b_{i+1})$

• Στην κλάση $[a_{i+1}, b_{i+1})$ ανήκει ποσοστό επί τοις %: $F_{i+1} - F_i$
• Στο διάστημα $[a_{i+1}, \delta)$ ανήκει ποσοστό επί τοις %: $50 - F_i$
Επειδή σε κάθε κλάση οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα, ισχύει η αναλογία :

$$\frac{\delta - a_{i+1}}{b_{i+1} - a_{i+1}} = \frac{50 - F_i}{F_{i+1} - F_i}.$$

Από αυτήν την απλή εξίσωση, βρίσκουμε πάντα τη διάμεσο δ.

2.3 B ΜΕΤΡΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

1. Τι είναι τα μέτρα διασποράς;

Απάντηση

Είναι αριθμητικά μεγέθη που δείχνουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης.

→ **1α. Τι είναι το Εύρος (R)**

Απάντηση

- Το Εύρος ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση. Δηλαδή

$$\text{Εύρος } R = (\text{Μεγαλύτερη παρατήρηση}) - (\text{Μικρότερη παρατήρηση})$$

- Όταν τα δεδομένα είναι ομαδοποιημένα, το εύρος ορίζεται ως η διαφορά του κατώτερου ορίου της πρώτης κλάσης από το ανώτερο όριο της τελευταίας κλάσης.

Τότε δηλαδή ισχύει

$$R = c \cdot k, \quad c \text{ το πλάτος των κλάσεων}, \quad k \text{ το πλήθος των κλάσεων}$$

Το εύρος δεν είναι αξιόπιστο μέτρο διασποράς, γιατί βασίζεται μόνο στις δύο ακραίες παρατηρήσεις του δείγματος.

→ **1β. Γιατί δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο διασποράς ο μέσος όρος των διαφορών των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή;**

Απάντηση

Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αριθμητικός μέσος των διαφορών των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή, γιατί ισούται πάντα με μηδέν.

απόδειξη

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_\nu - \bar{x})}{\nu} =$$

$$= \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_\nu - \nu\bar{x}}{\nu} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_\nu}{\nu} - \frac{\nu \cdot \bar{x}}{\nu}$$

$$= \bar{x} - \bar{x} = 0$$

→ 1γ. Τι ονομάζουμε διακύμανση ή διασπορά

Απάντηση

Διακύμανση (ή διασπορά) ονομάζεται ο αριθμητικός μέσος των τετραγώνων των αποκλίσεων των τιμών t_i του δείγματος από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$.

Δηλαδή δίνεται από τον τύπο

$$s^2 = \frac{(t_1-\bar{x})^2+(t_2-\bar{x})^2+\dots+(t_\nu-\bar{x})^2}{\nu}$$

$$= \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2$$

• Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα τότε η διακύμανση δίνεται από τη σχέση

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\bar{x})^2\nu_i = \sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\bar{x})^2 f_i$$

όπου $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ είναι οι τιμές της μεταβλητής (ή τα κέντρα των κλάσεων) και $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\kappa$ οι αντίστοιχες συχνότητες ($f_1, f_2, \dots, f_\kappa$ οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες)

⚠ Προσοχή!

Οι επόμενοι τύποι αν χρειαστεί θα δίνονται, δηλαδή δεν χρειάζεται απομνημόνευση.

I) $$S^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2 - \frac{\left(\sum_1^{\nu}t_i\right)^2}{\nu}\right]$$

$t_1, t_2, \dots, t_\nu$ είναι όλες οι τιμές του δείγματος

II) $$S^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right]$$

$x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ είναι οι τιμές της μεταβλητής (ή τα κέντρα των κλάσεων) και $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\kappa$ οι αντίστοιχες συχνότητες. Χρησιμοποιούνται όταν το $\bar{x}$ δεν είναι ακέραιος

→ Άσκηση όπου από τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες υπολογίζουμε τη μέση τιμή και τη διακύμανση

Δίνεται ο πίνακας κατανομής αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

x_i	$F_i\%$
10	10
20	25
30	45
40	60
50	90
60	100

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διακύμανση.

Απάντηση

- Υπολογίζουμε τις σχετικές συχνότητες

$f_1\% = F_1\% = 10$

$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 25-10 = 15$

$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 45-25 = 20$

$f_4\% = F_4\% - F_3\% = 60-45 = 15$

$f_5\% = F_5\% - F_4\% = 90-60 = 30$

$f_6\% = F_6\% - F_5\% = 100-90 = 10$

- $\bar{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 + f_6x_6}{}$

$= \dfrac{10\cdot 10 + 15\cdot 20 + 20\cdot 30 + 15\cdot 40 + 30\cdot 50 + 10\cdot 60}{100}$

$= \dfrac{3700}{100} = 37$

- $s^2 = \dfrac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{6} x_i^2 v_i - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{6} x_i v_i\right)^2}{v}\right]$

Δεν γνωρίζουμε όμως το v.

Κάνουμε το εξής: $\dfrac{v_i}{v} = f_i \Rightarrow v_i = f_i \cdot v$

(1) $s^2 = \dfrac{1}{v}\left[\underbrace{x_1^2 f_1 v + x_2^2 f_2 v + \dots + x_6^2 f_6 \cdot v}_{A} - \dfrac{\left(\overbrace{x_1 f_1 v + x_2 f_2 v + \dots + x_6 f_6 v}^{B}\right)^2}{v}\right]$

Το άθροισμα $A = x_1^2 f_1 v + x_2^2 f_2 v + \dots + x_k^2 v$ = (κοινός παράγοντας το v)
$= v(x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + \dots + x_6^2 f_6)$.

Την παρένθεση μπορούμε να την υπολογίσουμε από τα δεδομένα ήδη, ή θα δίνεται στην υπόθεση της άσκησης.

Εδώ είναι $x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + x_3^2 f_3 + x_4^2 f_4 + x_5^2 f_5 + x_6^2 f_6 =$

$$= \frac{10^2 \cdot 10 + 20^2 \cdot 15 + 30^2 \cdot 20 + 40^2 \cdot 15 + 50^2 \cdot 30 + 60^2 \cdot 10}{100}$$

$$= \frac{1000 + 6000 + 18000 + 24000 + 75000 + 36000}{100}$$

$$= 10 + 60 + 180 + 240 + 750 + 360 = 1600$$

Άρα $A = 1600\nu$ ②

Το άθροισμα $B = x_1 f_1 \nu + x_2 f_2 \nu + x_3 f_3 \nu + x_4 f_4 \nu + x_5 f_5 \nu + x_6 f_6 \nu$

(κοινός παράγων το ν) $= \nu(\underbrace{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5 + x_6 f_6}_{})$

$= \nu \cdot 37$ ③

το έχουμε ήδη υπολογίσει
ή θα δίνεται.
Ισούται με $\nu \cdot \bar{x}$

Από τις ①, ② και ③ έχουμε :

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left[1600\nu - \frac{(37\nu)^2}{\nu}\right] = \frac{1}{\nu}\left[1600\nu - \frac{37^2 \cdot \nu^2}{\nu}\right]$$

$$= \frac{1}{\nu}\left[1600\nu - 1369\nu\right] = \frac{1}{\nu} 231\nu = 231$$

1δ → Ποιο είναι μειονέκτημα στη χρήση της διακύμανσης;

Απάντηση

Το μειονέκτημα της διακύμανσης είναι ότι δεν εκφράζεται με τις μονάδες που εκφράζονται οι παρατηρήσεις, αλλά με τις αντίστοιχες τετραγωνικές μονάδες.

1ε → Τι ονομάζεται τυπική απόκλιση;

Απάντηση

Τυπική απόκλιση (s) ονομάζεται η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης. Δηλαδή δίνεται από τη σχέση

$$s = \sqrt{s^2}.$$

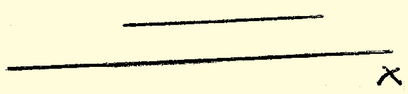
2) Καμπύλες συχνοτήτων

Εάν ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό (τείνει στο μηδέν) τότε «καμπύλη συχνοτήτων» ονομάζεται η μορφή ομαλής καμπύλης που τείνει να πάρει η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων

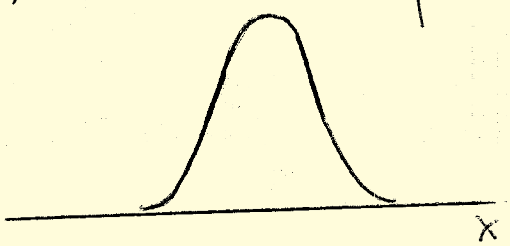
3) Είδη κατανομών συχνοτήτων και οι αντίστοιχες καμπύλες.

Η μορφή μια κατανομής συχνοτήτων εξαρτάται από την κατανομή των παρατηρήσεων σε όλη την έκταση του εύρους τους.

(α) Ομοιόμορφη κατανομή

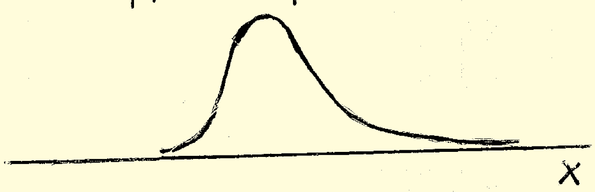


(β) Κανονική κατανομή (κωδωνοειδής)



$\bar{x} = \delta$

(γ) Ασύμμετρη με θετική ασυμμετρία



$\bar{x} > \delta$

(δ) Ασύμμετρη με αρνητική ασυμμετρία

$\bar{x} < \delta$

4) Ποσοστά στην κανονική κατανομή

Εάν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζεται είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

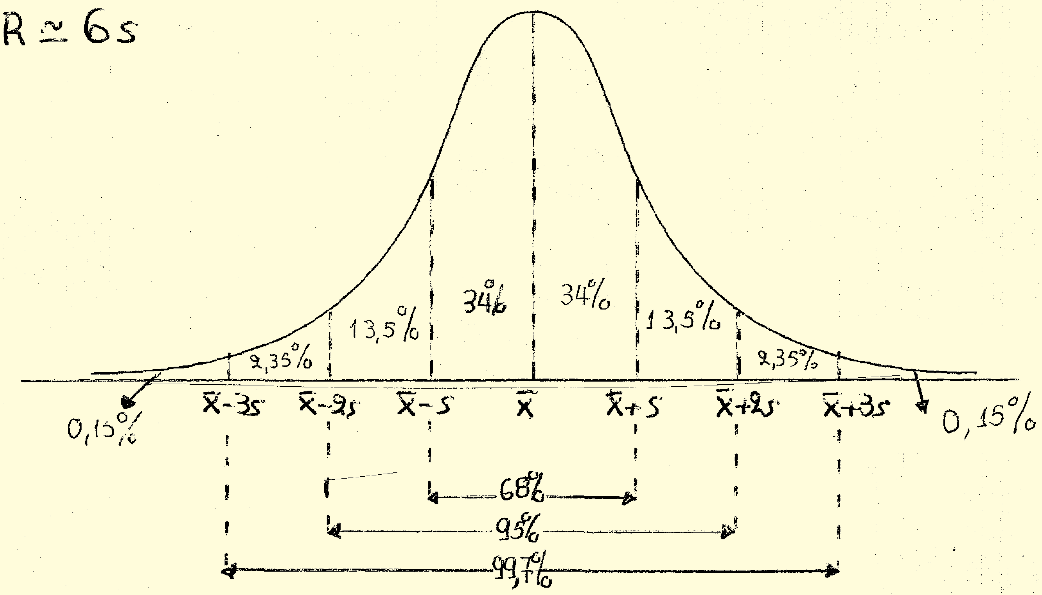
α) Το 68% των παρατηρήσεων, περίπου, βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$

β) Το 95% των παρατηρήσεων, περίπου, βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$

γ) Το 99,7% των παρατηρήσεων, περίπου, βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$

δ) Το εύρος ισούται, περίπου, με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή

$R \simeq 6s$



5) Συντελεστής Μεταβολής (CV)

α) Τι είναι ο συντελεστής μεταβολής

Απάντηση

Συντελεστής μεταβολής (ή συντελεστής μεταβλητότητας) ονομάζεται ο λόγος της τυπικής απόκλισης προς τη μέση τιμή. Δηλαδή

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

- Εάν $\bar{x} < 0$, χρησιμοποιούμε στον τύπο την $|\bar{x}|$.
- Είναι αριθμός καθαρός, δηλαδή ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης και εκφράζεται επί τοις εκατό.
- Είναι ένα μέτρο «σχετικής διασποράς»

β) Πότε χρησιμοποιούμε το συντελεστή μεταβολής;

Απάντηση

Χρησιμοποιούμε το συντελεστής μεταβολής όταν να συγκρίνουμε ομάδες τιμών οι οποίες

- εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης, ή
- εκφράζονται στην ίδια μονάδα μέτρησης αλλά οι μέσες τιμές διαφέρουν σημαντικά.

γ) Πότε δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών είναι ομοιογενές;

Απάντηση

Δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές όταν ο συντελεστής μεταβολής δεν υπερβαίνει το 10%.

Δηλαδή $CV \leq \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$

δ) Πότε λέμε ότι ένα δείγμα τιμών Α είναι περισσότερο ομοιογενές από ένα δείγμα τιμών Β;

Απάντηση

Συγκρίνουμε τους συντελεστές μεταβλητότητας. Λέμε ότι το δείγμα Α είναι περισσότερο ομοιογενές από το δείγμα Β, όταν έχει μικρότερο συντελεστή μεταβλητότητας. Δηλαδή

$$CV_A < CV_B$$

6) Βασικές εφαρμογές που χρειάζονται στις ασκήσεις χωρίς να τις αποδεικνύουμε

→ A) Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ένα δείγμα με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση S_x,

I) Εάν σε κάθε μία από τις παρατηρήσεις x_i, προσθέσουμε μια σταθερά c, τότε προκύπτει ένα νέο δείγμα $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ που έχει

$$\bar{y} = \bar{x} + c \quad \text{και} \quad S_y = S_x$$

II) Εάν κάθε μία από τις παρατηρήσεις x_i, την πολλαπλασιάσουμε επί μία σταθερά c, τότε προκύπτει ένα νέο δείγμα $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ που έχει

$$\bar{y} = c \cdot \bar{x} \quad \text{και} \quad S_y = |c| \cdot S_x$$

• ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

⚠ III) Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ένα δείγμα με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση S_x.
Εάν κάθε μία από τις παρατηρήσεις x_i, την πολλαπλασιάσουμε επί μια σταθερά c, και μετά προσθέσουμε μια σταθερά d, τότε προκύπτει ένα νέο δείγμα $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ που έχει

$$\bar{z} = c\bar{x} + d \quad \text{και} \quad S_z = |c|\, S_x$$

Απόδειξη

• Είναι $z_1 = c\, x_1 + d$, $z_2 = c\, x_2 + d$, $\ldots$, $z_\nu = c\, x_\nu + d$

Αν θέσουμε $y_1 = c x_1$, $y_2 = c x_2$, $\ldots$, $y_\nu = c x_\nu$, (1)

τότε $z_1 = y_1 + d$, $z_2 = y_2 + d$, $\ldots$, $z_\nu = y_\nu + d$ (2)

Επομένως : $\bar{z} \overset{(2)}{=} \overline{y+d} \overset{(1)}{=} c \cdot \bar{x} + d$

και $S_z \overset{(2)}{=} S_y \overset{(1)}{=} |c| \cdot S_x$

⚠ iv) Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ένα δείγμα με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s

Εάν σε κάθε μία από τις παρατηρήσεις x_i προσθέσουμε μια σταθερά c και μετά πολλαπλασιάσουμε επί μια σταθερά d, τότε προκύπτει ένα νέο δείγμα $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_\nu$ που έχει

$$\bar{z} = d(\bar{x} + c) \quad \text{και} \quad s_z = |d| \cdot s_x$$

Απόδειξη

- Είναι $z_1 = d(x_1 + c)$, $z_2 = d(x_2 + c)$, $\ldots$, $z_\nu = d(x_\nu + c)$

Αν θέσουμε $y_1 = x_1 + c$, $y_2 = x_2 + c$, $\ldots$, $y_\nu = x_\nu + c$, (1)

τότε $z_1 = d \cdot y_1$, $z_2 = d \cdot y_2$, $\ldots$, $z_\nu = d y_\nu$ (2)

Επομένως: $\bar{z} \overset{(2)}{=} d \cdot \bar{y} \overset{(1)}{=} d \cdot (\bar{x} + c)$

και $s_z \overset{(2)}{=} |d| \cdot s_y \overset{(1)}{=} |d| \cdot s_x$.

⚠ v) Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ένα δείγμα τιμών τοποθετημένων κατά αύξουσα τάξη, με διάμεσο δ_x

Εάν κάθε μια παρατήρηση x_i πολλαπλασιαστεί επί μια θετική σταθερά c, και μετά προσθέσουμε μια σταθερά d, τότε προκύπτει ένα ένα δείγμα: $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ που έχει διάμεσο

$$\delta_z = c\,\delta_x + d.$$

Απόδειξη

Είναι $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_\nu$, (1)

$$\text{Η (1)} \Rightarrow c \cdot x_1 \le c x_2 \le \ldots \le c x_\nu$$

$$\Rightarrow c x_1 + d \le c x_2 + d \le \ldots \le c x_\nu + d$$

Δηλαδή $z_1 \le z_2 \le \ldots \le z_\nu$.

Αφού η διάταξη διατηρήθηκε, αν $x_\kappa = \delta_x$ ή $\dfrac{x_\kappa + x_{\kappa+1}}{2} = \delta_x$

τότε $z_\kappa = \delta z$

$\Leftrightarrow c x_\kappa + d = \delta z$

$\Leftrightarrow c \delta x + d = \delta z$

ή

$\dfrac{z_\kappa + z_{\kappa+1}}{2} = \delta z \Leftrightarrow$

$\dfrac{c x_\kappa + d + c x_{\kappa+1} + d}{2} = \delta z \Leftrightarrow$

$c\dfrac{(x_\kappa + x_{\kappa+1})}{2} + d = \delta z \Leftrightarrow$

$c \cdot \delta x + d = \delta z$

2.3 - 16

B) Η συνάρτηση

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\lambda)^2 = (x_1-\lambda)^2+(x_2-\lambda)^2+\dots+(x_\nu-\lambda)^2$$

γίνεται ελάχιστη όταν $\lambda = \bar{x}$

⚠ **Άσκηση**

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ ένα δείγμα με μέση τιμή $\bar{x}$.

Εάν $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ είναι το δείγμα που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ επί έναν αριθμό c και μετά προσθέσουμε μια σταθερή ποσότητα d, να βρείτε την τιμή του λ, για την οποία η συνάρτηση

$$f(\lambda) = (y_1-\lambda)^2 + (y_2-\lambda)^2 + \dots + (y_\nu-\lambda)^2$$

γίνεται ελάχιστη.

Απάντηση

Η f γίνεται ελάχιστη για $\lambda = \bar{y}$ σύμφωνα με τη βασική εφαρμογή

Αφού $y_1 = cx_1 + d$, $y_2 = cx_2 + d$, $\dots$, $y_\nu = cx_\nu + d$

αν θέσουμε $z_1 = cx_1$, $z_2 = cx_2$, $\dots$, $z_\nu = cx_\nu$ (1)

τότε $y_1 = z_1 + d$, $y_2 = z_2 + d$, $\dots$, $y_\nu = z_\nu + d$ (2)

Άρα $\bar{y} \underset{(2)}{=} \bar{z} + d \underset{(1)}{=} c\bar{x} + d$

Άρα η f γίνεται ελάχιστη όταν $\lambda = c\bar{x} + d$.