ΥΛΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Γ

ΘΕΜΑ 1ο.

1. Για απόδειξη **(10 μονάδες)**

Σελίδα 28 η απόδειξη του τύπου

$$(x^2)' = 2x$$

2. Για ερώτηση ανάπτυξης **(5 μονάδες)**

Πως ορίζεται το Εύρος R ενός δείγματος; Γιατί δεν θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς;

Απάντηση

Το Εύρος R ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση, δηλαδή:

$$\text{Εύρος R} = (\text{μεγαλύτερη παρατήρηση}) - (\text{μικρότερη παρατήρηση})$$

Δεν θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς γιατί βασίζεται μόνο στις δύο ακραίες παρατηρήσεις.

3. Για να χαρακτηρίσετε ως Αληθή ή Ψευδή **(10 μονάδες)**

Θα ζητηθούν 5 από επόμενα μόνο.

- Σελίδα 33, τον πίνακα βασικών παραγώγων και κανόνων παραγώγισης
- Σελίδα 23, το σχόλιο ότι η συνάρτηση $|x|$ δεν έχει παράγωγο στο 0.
- Σελίδα 95, τα ποσοστά στα αντίστοιχα διαστήματα σε μια περίπου κανονική κατανομή παρατηρήσεων.
- Σελίδα 97: από δύο δείγματα μεγαλύτερη ομοιογένεια έχει εκείνο με τον μικρότερο συντελεστή μεταβλητότητας.

ΘΕΜΑ 3ο.

Θα εξεταστείτε σε μία από τις επόμενες ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1

Η μέση ηλικία των εκπαιδευτικών στην Ελλάδα είναι τα 45 έτη και η μέση ηλικία των εκπαιδευτικών στην Γερμανία είναι τα 40 έτη. Ο πληθυσμός των εκπαιδευτικών της Γερμανίας είναι εννεαπλάσιος από τον πληθυσμό των εκπαιδευτικών της Ελλάδας.

i. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αριθμητικός μέσος για να υπολογιστεί η μέση ηλικία των καθηγητών και στις δύο χώρες; Αιτιολογήστε.

(10 μονάδες)

ii. Να υπολογίσετε την μέση ηλικία των εκπαιδευτικών συγκεντρωτικά στις δύο χώρες.

(15 μονάδες)

Απάντηση

i. Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αριθμητικός μέσος γιατί οι πληθυσμοί των εκπαιδευτικών στις δύο χώρες δεν είναι ίσοι.

ii. Στην περίπτωση αυτή θα χρησιμοποιήσω τον σταθμικό μέσο όρο. Ως συντελεστές βαρύτητας θα χρησιμοποιήσω τους δύο πληθυσμούς.

- Έστω N ο πληθυσμός των εκπαιδευτικών στην Ελλάδα και η μέση ηλικία τους $\bar{x} = 45$
- Από την υπόθεση ο πληθυσμός των εκπαιδευτικών στην Γερμανία είναι ίσος με $9N$. Και η μέση ηλικία τους είναι $\bar{y} = 40$.

Επομένως η μέση ηλικία των εκπαιδευτικών στις δύο χώρες είναι :

$$\bar{z} = \frac{N \cdot \bar{x} + 9N \cdot \bar{y}}{N + 9N} = \frac{45N + 40 \cdot 9N}{10N} = \frac{45N + 360N}{10N} = \frac{405N}{10N} = \frac{405}{10} = 40{,}5\ έτη$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Μια μεταβλητή είναι περίπου κανονική

Το διάστημα $(-17, -13)$ έχει κέντρο την μέση τιμή και περιέχει το 95% των τιμών του δείγματος

i. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s.

(15 μονάδες)

ii. Εξετάστε την ομοιογένεια του δείγματος

(10 μονάδες)

Απάντηση

i. Από την υπόθεση έχω ότι: $\begin{cases} \bar{x} + 2s = -13 & (1) \\ \bar{x} - 2s = -17 & (2) \end{cases}$.

Προσθέτω κατά μέλη και έχω:

$$2\bar{x} = -30 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{-30}{2} = -15$$

Αντικαθιστώ στην (1):

$$-15 + 2s = -13 \Leftrightarrow 2s = 15 - 13 \Leftrightarrow 2s = 2 \Leftrightarrow s = 1$$

ii. Θα υπολογίσω τον συντελεστή μεταβλητότητας:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{1}{15} < \frac{1}{10}$$

Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΣΤΗΝ ΕΠΟΜΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ Η ΑΣΚΗΣΗ 3

ΑΣΚΗΣΗ 3

Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται ευθύγραμμα δίνεται από τον τύπο

$$x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t$$

όπου $t \geq 0$ ο χρόνος σε δευτερόλεπτα και $x = x(t)$ η τετμημένη του σημείου πάνω άξονα σε μέτρα.

i. Να βρείτε τη συνάρτηση ταχύτητας $\upsilon = \upsilon(t)$.

ii. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το σημείο είναι ακίνητο.

iii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία κινείται προς την θετική κατεύθυνση και σε ποια προς την αρνητική κατεύθυνση.

iv. Να υπολογίσετε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στα πρώτα 10 δευτερόλεπτα.

Απάντηση

i. Η συνάρτηση της ταχύτητας είναι

$$\upsilon(t) = x'(t) = 2 \cdot 3t^2 - 15 \cdot 2t + 24 \cdot 1 = 6t^2 - 30t + 24$$

ii. Λύνω την εξίσωση:

$\upsilon(t) = 0$

Δηλαδή

$$6t^2 - 30t + 24 = 0 \overset{\div 6}{\Leftrightarrow} \frac{6t^2}{6} - \frac{30t}{6} + \frac{24}{6} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3 \quad \kappa\alpha\iota \quad 2 \cdot a = 2 \cdot 1 = 2$$

Άρα

$$t = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 \geq 0 \ \delta\epsilon\kappa\tau ή \\ ή \\ \frac{2}{2} = 1 \geq 0 \ \delta\epsilon\kappa\tau ή \end{cases}$$

Δηλαδή το σημείο μένει στιγμιαία ακίνητο τις χρονικές στιγμές 1 sec και 4sec

iii. Θα κάνω τον πίνακα προσήμου της ταχύτητας

$$\upsilon(t) = 6t^2 - 30t + 24, t \geq 0$$

$$\rho_1 = 1, \rho_2 = 4, \alpha = 6 > 0$$

t	0		1		4		$+\infty$
$\upsilon(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα στα διαστήματα $[0,1)$ και $(4, +\infty)$ κινείται προς την θετική κατεύθυνση και στο διάστημα $(1,4)$ κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση.

iv.

t	0		1		4		10
$\upsilon(t)$		$\longrightarrow$	0	$\longleftarrow$		$\longrightarrow$	

Βρίσκω την θέση του σημείου τις στιγμές $t = 0, t = 1, t = 4, t = 10$ αντικαθιστώντας στην συνάρτηση θέσης.

$x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t$

$x(0) = 0$

$x(1) = 2 - 15 + 24 = 11$

$x(4) = 2 \cdot 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 = 2 \cdot 64 - 15 \cdot 16 + 96 = 128 - 240 + 96$

$= 224 - 240 = -16$

$x(10) = 2 \cdot 10^3 - 15 \cdot 10^2 + 24 \cdot 10 = 2000 - 1500 + 240 = 740$

- Στο διάστημα $[0,1]$ το διάστημα που κάλυψε είναι

$$S_1 = x(1) - x(0) = 11 - 0 = 11m$$

- Στο διάστημα $[1,4]$ το διάστημα που κάλυψε είναι

$$S_2 = x(1) - x(4) = 11 - (-16) = 11 + 16 = 27m$$

- Στο διάστημα $[4,10]$ το διάστημα που κάλυψε είναι

$$S_3 = x(10) - x(4) = 740 - (-16) = 740 + 16 = 756m$$

- Το συνολικό διάστημα είναι το άθροισμα:

$$S_{ολικό} = S_1 + S_2 + S_3 = 11 + 27 + 756 = 794m$$