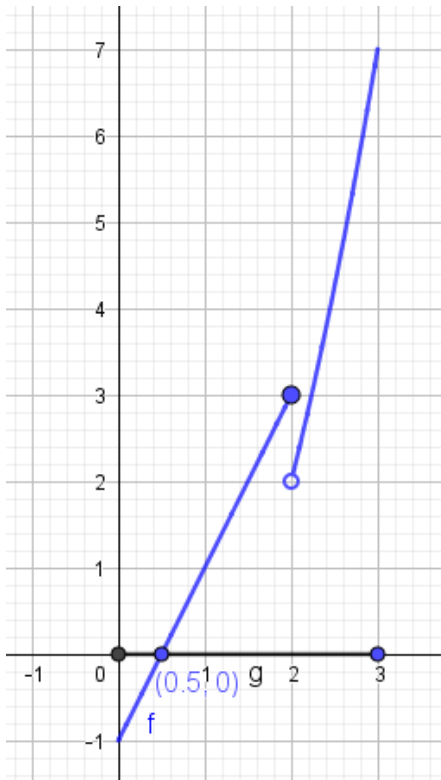


Ασκήσεις στα Θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{αν } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2 & \text{αν } 2 < x \leq 3 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 3]$.

Ερώτημ



α: Γιατί ενώ η f είναι ασυνεχής στο 2, δηλαδή δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano, υπάρχει ο αριθμός

$$\frac{1}{2} \in [0, 2] \subseteq [0, 3] : f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{αν } -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 - 4x + 1 & \text{αν } 0 < x \leq 1 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-1, 1]$.

3.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x^6 = -x + 6$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

4.

Αν $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha \ln x + \pi = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \alpha + \pi]$.

5.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + x = x^2 + 5$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο \mathbb{R} .

6.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^3 - 9x + 1 = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0, 2)$.

7.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2 + 2}{x - 2} = \frac{x^4 + 4}{3 - x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$.

8.

Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $g(x) = 2\eta\mu x - \sqrt{3}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

9.

Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ και $g(x) = -9x^3 - 3x + 1$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(-1, 1)$.

10.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο \mathbb{R} με την ιδιότητα $f(x) + f(x+3) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 3]$ ώστε να ισχύει $f(x_0) = f(x_0 + 2)$.

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{e}{x-1}$ ορισμένη στο $[2,5]$. Να αποδείξετε ότι η

εξίσωση $2011 + f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $[2,5]$.

12.

Δίνεται μία συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0,3]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,3]$ τέτοιο ώστε $f(1) + 2f(2) = 3f(\xi)$.

13.

Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $\Delta = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ για την οποία ισχύει $x^2 + 2f^2(x) = 2$ για κάθε $x \in \Delta = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα Δ .

β) Να δείξετε ότι η $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ αν $f(0) = 1$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.

δ) Να γίνει η γραφική της παράσταση.