

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ 1^ο :

A1. Θεωρία του σχολικού βιβλίου.

A2. Θεωρία του σχολικού βιβλίου.

A3.

α) Σωστό.

β) Λάθος.

γ) Σωστό.

δ) Σωστό.

ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ 2^ο

B1. Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων είναι:

$$\begin{aligned} D_f &= (-\infty, 1] \\ D_g &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 1\} = [-1, 1]$$

Για κάθε $x \in [-1, 1]$ έχουμε:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1-x^2} - 1, x \in [-1, 1]$$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \leq 1 / \sqrt{1-x} - 1 \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 1]$$

Για κάθε $x \in (-\infty, 1]$ έχουμε:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{1-x} - 1)^2 = 1 - x + 1 - 2\sqrt{1-x} = 2 - x - 2\sqrt{1-x}, x \in (-\infty, 1]$$

B2. Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη αφού:

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \Rightarrow \sqrt{1-x_1} - 1 > \sqrt{1-x_2} - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, δηλαδή και «1-1», επομένως η f είναι αντιστρέψιμη.

Για την αντίστροφη της f έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = y+1 \Leftrightarrow 1-x = (y+1)^2 \Leftrightarrow x = 1 - (y+1)^2 \quad (y+1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -1)$$

Πρέπει ακόμα $1 - (y+1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -(y+1)^2 \leq 0$, που αληθεύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Άρα η αντίστροφη f^{-1} της f είναι :

$$f^{-1}(x) = 1 - (x+1)^2 = 1 - (x^2 + 2x + 1) = -x^2 - 2x, x \geq -1$$

B3. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) + g(x) - \frac{1}{4}, x \in [-1, 1]$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την h στο $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$.

- Η h είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων)

$$h(-1) = f(-1) + g(-1) - \frac{1}{4} = \sqrt{2} - 1 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{4\sqrt{2} - 1}{4} > 0$$

- $$h(1) = f(1) + g(1) - \frac{1}{4} = -1 + 1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} < 0$$

Επομένως $h(-1) \cdot h(1) < 0$ και άρα υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα

$$\xi \in (-1, 1) : h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{1}{4} - g(\xi)$$

B4. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ το σύνολο τιμών της θα είναι:

$$\left[f(1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [-1, \infty)$$

Ή αλλιώς το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} , δηλαδή το $D_{f^{-1}} = [-1, \infty)$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Γ1. Όταν $x \rightarrow +\infty$ είναι $x > 0$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0$$

Όταν $x \rightarrow -\infty$ είναι $x < 0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{\eta\mu^{2016} x}{x^{2016}} \right) \quad (1)$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ και:

$$\left| \frac{\eta\mu^{2016} x}{x^{2016}} \right| \leq \frac{1}{x^{2016}} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^{2016}} \leq \frac{\eta\mu^{2016} x}{x^{2016}} \leq \frac{1}{x^{2016}}$$

$$\mu\epsilon \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{2016}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^{2016}} \right) = 0$$

Από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu^{2016} x}{x^{2016}} = 0.$$

Επομένως από την (1) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{\eta\mu^{2016} x}{x^{2016}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu^{2016} x}{x^{2016}} = 1 + 0 = 1$$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι:

- Συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 0)$ (ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων)
- Συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$ (ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων)

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο σημείο $x_0 = 0$.

Είναι $f(0) = 1$.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) = 1$$

Ακόμα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu^{2016} x}{x^{2016}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^{2016} = 1$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{\eta \mu^{2016} x}{x^{2016}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu^{2016} x}{x^{2016}} = 0 + 1 = 1$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ και άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Επομένως η f είναι συνεχής και στο 0, αφού $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Γ3. Επειδή:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 1 + \infty = +\infty$$

υπάρχουν $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $h(x_1) < 0$, $h(x_2) > 0$.

Επομένως θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$, $x \in [x_2, x_1]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[x_2, x_1] \subset \mathbb{R}$ (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων)
- $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$

Από το θεώρημα του Bolzano έχουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (x_2, x_1)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία, τουλάχιστον, πραγματική λύση.

Γ4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 5]$ και άρα παίρνει μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή, M και μ αντίστοιχα, δηλαδή $M \leq f(x) \leq \mu$ για κάθε $x \in [0, 5]$.

Έχουμε:

$$\mu \leq f(2) \leq M \Leftrightarrow 2\mu \leq 2f(2) \leq 2M \quad (1)$$

$$\mu \leq f(3) \leq M \Leftrightarrow 3\mu \leq 3f(3) \leq 3M \quad (2)$$

$$\mu \leq f(4) \leq M \Leftrightarrow 4\mu \leq 4f(4) \leq 4M \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1), (2), (3) κατά μέλη έχουμε:

$$9\mu \leq 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) \leq 9M \Leftrightarrow \mu \leq \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} \leq M$$

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (1, 5)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} \Leftrightarrow 9f(\xi) = 2f(2) + 3f(3) + 4f(4)$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δ1. i) Για $x = y = 0$ έχουμε:

$$f(0+0) = f(0) \cdot f(0) \Leftrightarrow f(0) = f^2(0) \Leftrightarrow f(0)(f(0)-1) = 0 \Leftrightarrow (f(0) = 0 \text{ ή } f(0) = 1)$$

Δεκτή τιμή είναι η $f(0) = 1 \in (0, \infty)$.

ii) Για $x = 1, y = -1$ έχουμε:

$$f(1-1) = f(1) \cdot f(-1) \Leftrightarrow f(0) = ef(-1) \Leftrightarrow 1 = ef(-1) \Leftrightarrow f(-1) = \frac{1}{e}$$

Δ2. i) Αφού η f είναι συνεχής στο 0 θα είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$. Θα αποδείξουμε ότι η

$$f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ δηλαδή } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ (I)}$$

Θέτουμε:

$$x - x_0 = h \Leftrightarrow x = x_0 + h$$

$$x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$$

Τότε η (1) γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0) \cdot f(h)) = f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(x_0)$$

ii) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, αφού γνωρίζουμε ότι είναι γνησίως μονότονη

και $f(0) = 1, f(-1) = \frac{1}{e}$. Επομένως και η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας (το οποίο

πρέπει να αποδείξουμε ως πρόταση και υπάρχει αποδεδειγμένο στις σημειώσεις), δηλαδή η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Δ3. i) Θέτουμε: $x - x_0 = h \Leftrightarrow x = x_0 + h$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) και έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{h \rightarrow +\infty} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} (f(x_0) \cdot f(h)) = f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow +\infty} f(h) = f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow +\infty} f(h)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)(1 - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ ή } f(x_0) = 1 \right)$$

Όμως η σχέση $f(x_0) = 1$ ισχύει μόνο για $x_0 = 0$ (αφού $f(0) = 1$ και η f είναι συνάρτηση «1-1»).

Επομένως $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Όμοια θέτουμε: $x - x_0 = h \Leftrightarrow x = x_0 + h$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) και έχουμε:

$$x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow h \rightarrow -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{h \rightarrow -\infty} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow -\infty} (f(x_0) \cdot f(h)) = f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow -\infty} f(h) = f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow -\infty} f(h)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)(1 - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ ή } f(x_0) = 1 \right)$$

Όμως η σχέση $f(x_0) = 1$ ισχύει μόνο για $x_0 = 0$ (αφού $f(0) = 1$ και η f είναι συνάρτηση «1-1»).

Επομένως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Σημείωση: Οι ισοδυναμίες που χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση των ορίων

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ στηρίζονται στην μοναδικότητα του ορίου.

(ii) Για $y = -x$ έχουμε:

$$f(x + (-x)) = f(x) \cdot f(-x) \Leftrightarrow f(0) = f(x) \cdot f(-x) \Leftrightarrow 1 = f(x) \cdot f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) \cdot f(-x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1)}{f^2(x)} = f(1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f^2(x)} = \frac{f(1)}{f^2(0)} = \frac{e}{1} = e$$

Δ4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, αφού είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα παίρνει μία ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή, m και M αντίστοιχα, δηλαδή:

$$m \leq f(x) \leq M \text{ για κάθε } x \in [0,1]$$

Άρα έχουμε:

$$m \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq M \quad (1)$$

$$m \leq f\left(\frac{1}{3}\right) \leq M \quad (2)$$

$$m \leq f\left(\frac{1}{4}\right) \leq M \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2), (3) είναι:

$$3m \leq f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) \leq 3M \Leftrightarrow m \leq \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)}{3} \leq M$$

Επομένως από το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών έχουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)}{3} \Leftrightarrow 3f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)$$

Επιμέλεια λύσεων. Συντακτική Ομάδα www.mathp.gr