ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 12

ΘΕΜΑ Α

A_1: Θεωρία - απόδειξη A_2: Θεωρία - Ορισμός.

A_3: α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B_1 Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Θα αποδείξουμε ότι $g(x_1) < g(x_2)$

Έχουμε:

$x_1 < x_2 \xrightarrow{f\downarrow} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{f\downarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(f(x_1)) + x_1 < f(f(x_2)) + x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left[f(f(x_1)) + x_1\right] < \frac{1}{2}\left[f(f(x_2)) + x_2\right]$

$\Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B_2 Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \xrightarrow{f\downarrow} f(x_1) > f(x_2)$ (1)

Ακόμα: $x_1 < x_2 \xrightarrow[g\uparrow]{} g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow -g(x_1) > -g(x_2)$ (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$f(x_1) - g(x_1) > f(x_2) - g(x_2) \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$ άρα η

h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B_3 α) Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Έχουμε: $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = x_0 - g(x_0)$ (Α)

Ακόμα: $f(f(x_0)) = 2g(x_0) - x_0 \Rightarrow f(x_0) = 2g(x_0) - x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 = 2g(x_0) - x_0 \Rightarrow g(x_0) = x_0$ (Β)

Άρα η (Α) λόγω της (Β) γίνεται: $h(x_0) = x_0 - x_0 \Rightarrow h(x_0) = 0$

Άρα το $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι λύση της $f(x) = g(x)$ η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

β) Έχουμε:

$$f\left(f(x+x_0-2)\right)+x+x_0-2=2f(x+x_0-2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2g(x+x_0-2)=2f(x+x_0-2)\Leftrightarrow g(x+x_0-2)=f(x+x_0-2)$$

$$\Leftrightarrow g(x+x_0-2)-f(x+x_0-2)=0\Leftrightarrow h(x+x_0-2)=0$$

Επειδή η μοναδική ρίζα της $h(x)$ είναι το x_0 έχουμε:

$$h(x+x_0-2)=h(x_0)\xrightarrow{h\text{ 1-1}}x+x_0-2=x_0\Rightarrow\boxed{x=2}$$

γ) Έχουμε:

$$f\left(f(\ln x+x_0+1)\right)+\ln x+1<x_0\Leftrightarrow$$

$$f\left(f(\ln x+x_0+1)\right)+\ln x+1+x_0<x_0+x_0\Leftrightarrow$$

$$2g(\ln x+x_0+1)<2x_0\Leftrightarrow g(\ln x+x_0+1)<x_0\overset{g\uparrow}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow g(\ln x+x_0+1)<g(x_0)\overset{g\uparrow}{\Longleftrightarrow}\ln x+x_0+1<x_0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln x<-1\Leftrightarrow x<e^{-1}\text{ ή }\boxed{x<\frac{1}{e}}\text{ δηλαδή }x\in\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=0$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=\alpha^2+2\alpha+\beta^2+\frac{1}{2}$$

Έχουμε: $$\lim_{x\to0^+}f(x)=\alpha^2+2\alpha+\beta^2+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{1+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2}.$$

Άρα:

$$\alpha^2+2\alpha+\beta^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \iff \alpha^2+2\alpha+\beta^2+1=0 \iff$$

$$\iff (\alpha+1)^2+\beta^2=0 \iff \begin{cases} \alpha+1=0 \\ \beta=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=0 \end{cases}$$

Γ2) Αν $\alpha=-1$ και $\beta=0$

α) $$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)+1}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}+1}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1-\sqrt{x+1}+x}{x}}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)-\sqrt{x+1}}{x(x+1)}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+2x+1-x-1}{x(x+1)\cdot\left[(x+1)+\sqrt{x+1}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+x}{x(x+1)\left[(x+1)+\sqrt{x+1}\right]}=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{(x+1)+\sqrt{x+1}}=$$

$$=\frac{1}{0^+}=+\infty$$ (διότι $\lim_{x\to -1^+}\left[(x+1)+\sqrt{x+1}\right]=0$ και

$(x+1)+\sqrt{x+1}\geq 0 \quad \forall\, x\geq -1$

β) Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία, τουλάχιστον, θετική ρίζα. Ισοδύναμα η εξίσωση γίνεται:

$$\ln(x+e)-2+\frac{1}{2}e^x=0\ ,\ x\geq 0$$

Επειδή $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, υπάρχει ένα τουλάχιστον x_1 "κοντά" στο $+\infty$ όπου $f(x_1)>0$. Επειδή, επιπλέον, $f(0)=-\frac{1}{2}<0$ και η f είναι συνεχής στο $[0, x_1]$ από το Θ. Bolzano έχουμε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0>0$: $f(x_0)=0$

γ) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left(x f(x) \etaμ\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left[f(x)\cdot\left(x\etaμ\frac{1}{x}\right)\right] \overset{(*)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} f(x)\cdot \lim_{x\to 0}\left(x\etaμ\frac{1}{x}\right) = f(0)\cdot 0 = -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

, αφού $\left|x\etaμ\frac{1}{x}\right| \leq x$ και $\lim_{x\to 0} x = 0$

(*) Τα όρια $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = -\frac{1}{2}$ και $\lim_{x\to 0}\left(x\etaμ\frac{1}{x}\right)=0$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ και για το λόγο αυτό εφαρμόζεται η ιδιότητα των ορίων.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 α) Έχουμε ότι $f(0)=1$. Αφού f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής στο $x_0=0$. Άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

$$\lim_{x\to 0}\left(x f(x)\right) = 0\cdot f(0) = 0\cdot 1 = 0.$$

β) Έχουμε:

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{f^2(2x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(2x)-1}{x}\cdot\left(f(2x)+1\right)\right] \quad (1)$$

Θέτουμε: $2x=u$ και όταν $x\to 0 \Leftrightarrow u\to 0$

Άρα η (1) γίνεται:

$$A = \lim_{u\to 0}\left[\frac{f(u)-1}{\frac{u}{2}}\cdot\left(f(u)+1\right)\right] = 2\lim_{u\to 0}\left[\frac{f(u)-1}{u}\cdot\left(f(u)+1\right)\right] =$$

$$= 2\cdot\left(f'(0)\cdot 2\right) = 4f'(0),$$ αφού $f'(0) = \lim_{u\to 0}\frac{f(u)-f(0)}{u}$ και $\lim_{u\to 0} f(u) = 1$

Δ2 Έχουμε:

$$f^2(x) - 4f(x) = x^2 - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f^2(x) - 4f(x) + 4 = x^2 - 3 + 4$$

$$\left(f(x) - 2\right)^2 = x^2 + 1. \quad (1)$$

Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ρίζα, αφού αν υποθέσουμε ότι έχει ρίζα x_0 θα έχουμε: $g(x_0) = 0$ ή $f(x_0) - 2$ ή λόγω της (1) είναι: $0 = x_0^2 + 1 \iff x_0^2 = -1$ που είναι άτοπο.
Άρα η $g(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0) = 1 > 0$ θα είναι $g(x) > 0$. Άρα

$$g(x) = \sqrt{x^2+1} \iff f(x) - 2 = \sqrt{x^2+1} \iff f(x) = 2 + \sqrt{x^2+1}$$

, $x \in \mathbb{R}$.

Δ3 α) Οι εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στο σημείο $A(x_1, f(x_1))$ είναι:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \quad (2)$$

Είναι: $f'(x_1) = -\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}}$, $f(x_1) = 2 - \sqrt{x_1^2+1}$

Αφού η (2) διέρχονται από το σημείο $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$ έχουμε:

$$\frac{3}{2} - f(x_1) = f'(x_1)(0 - x_1) \iff$$

$$\iff \frac{3}{2} - 2 + \sqrt{x_1^2+1} = -\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}} \cdot (-x_1) \iff$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{2}+\sqrt{x_1^2+1}=\frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2+1}} \Longleftrightarrow -\frac{\sqrt{x_1^2+1}}{2}+x_1^2+1=x_1^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{x_1^2+1}=2 \Longleftrightarrow x_1^2=3 \Longleftrightarrow x_1=\pm\sqrt{3}$$

Άρα: $f(\pm\sqrt{3})=0$, $f'(\sqrt{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Άρα οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι:

(ε_1): $y-0=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\sqrt{3}) \Longleftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}$

(ε_2): $y-0=\frac{\sqrt{3}}{2}(x+\sqrt{3}) \Longleftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}$

β) Έστω $M(x(t), y(t))$ οι συντεταγμένες του σημείου M καθώς κινείται πάνω στην C_f.

Έχουμε ότι $x'(t)=2\ cm/sec$.

Ακόμα:
$$E_{OAM}=E(t)=\frac{1}{2}(OA)\cdot x(t) \overset{(*)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow E(t)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x(t) \Longleftrightarrow E(t)=\frac{x(t)}{2}$$

Άρα $E'(t)=\frac{1}{2}x'(t) \Longleftrightarrow E'(t)=\frac{1}{2}\cdot 2 \Longleftrightarrow E'(t)=1\ cm^2/sec$

(*) Αφού από ένα απλό σχήμα προκύπτει ότι το ύψος υ του τριγώνου OAM είναι η τετμημένη του M δηλαδή $x(t)$.
