ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 11

ΘΕΜΑ Α

A_1: Θεωρία - απόδειξη A_2: Θεωρία - Ορισμός.

A_3: α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B_1) Έστω ότι η $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο, δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$: $g(x_1) > 0$, $g(x_2) < 0$.
Αφού η g είναι συνεχής (ως άθροισμα) συνεχών συναρτήσεων ισχύει το Θ. Bolzano στο $[x_1, x_2]$. Άρα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$:
$g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = -ημx_0$ (1)
Από τη δοθείσα σχέση για $x = x_0$ έχουμε:
$f^2(x_0) + 2f(x_0)ημx_0 + ημ^2x_0 = x_0^2 + συν^2x_0 + ημ^2x_0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x_0) + ημx_0)^2 = x_0^2 + 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 0 = x_0^2 + 1 \Leftrightarrow x_0^2 = -1$ Άτοπο
Άρα η $g(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή
$g(0) = f(0) + 0 = 1 > 0$ είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B_2: Έχουμε:
$f^2(x) + 2f(x)ημx + ημ^2x = x^2 + συν^2x + ημ^2x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x) + ημx)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow g^2(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow g(x) = \sqrt{x^2+1}$
$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - ημx$, $x \in \mathbb{R}$.

B3: Έχουμε:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right]=$ (τα όρια υπάρχουν στο $\mathbb{R}$)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}-1+0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}-1=0-1=-1$

β) $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+1-\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2+1}+\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sqrt{x^2+1}+\eta\mu x}=$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{\eta\mu x}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{\eta\mu x}{x}}=$

$=\dfrac{+\infty\cdot(1+0)}{1+0+1}=+\infty.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(0,e)\cup[e,+\infty)=[g+\alpha]$

Στο διάστημα $(0,e)$ η f είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων) όπως και στο διάστημα $(e,+\infty)$.

Άρα για να είναι η f συνεχής στο A πρέπει να είναι συνεχής στο $x_0=e$.

Έχουμε:

$\lim_{x \to e^-} f(x) = 2+1 = 3$, $\lim_{x \to e^+} f(x) = \lim \left[ax + \ln(x-e+1)\right] =$

$= ae$, $f(e) = 3$

Άρα $ae = 3 \Longleftrightarrow \boxed{a = \frac{3}{e}}$

B) Για $a = \frac{3}{e}$ η f γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \ln^2 x , & 0 < x \leq e \\ \frac{3}{e}x + \ln(x-e+1) , & e < x \end{cases}$$

Έστω η συνάρτηση: $g(x) = f(x) - 6$, $x \in [1, 2e]$.

•) Η f είναι συνεχής στο $[1, 2e]$ (είναι συνεχής και στο $x_0 = e$

•) $g(1) = f(1) - 6 = 2 - 6 = -4 < 0$

$g(2e) = \frac{3}{e} \cdot 2e + \ln(2e - e + 1) = 6 + \ln(e+1) > 0$

Άρα από το Θ. Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (1, 2e)$:

$g(x_0) = 0 \Longleftrightarrow f(x_0) = 6$.

Γ_2 α) Έστω $x_1, x_2 > 0$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Θα αποδείξουμε ότι $x_1 = x_2$. Έχουμε:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} \Rightarrow f(e^{f(x_1)}) = f(e^{f(x_2)}) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\ln x_1 + 3 = 4\ln x_2 + 3 \Rightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

άρα η f είναι "1-1".

β) Έχουμε:

$$f\left(f\left(e^{f(x)}\right)\right) = \ln\left(4\ln x+3\right)^2+1, \quad x > e^{-\frac{3}{4}}$$

$$f\left(4\ln x+3\right) = 2\ln\left(4\ln x+3\right)+1$$

Αν θέσουμε: $u = 4\ln x+3$, $x > e^{-\frac{3}{4}}$ έχουμε:

$$f(u) = 2\ln u+1, \quad u > 0$$

Άρα $f(x) = 2\ln x+1$, $x > 0$

γ) Έχουμε:

$$f\left(f(x)\right) = f\left(e^{x-2014}\right) \underset{1-1}{\overset{f}{\Longleftrightarrow}} f(x) = e^{x-2014} \Longleftrightarrow$$

$$f(x) - e^{x-2014} = 0$$

Έστω $g(x) = f(x) - e^{x-2014}$, $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Έχουμε:

- $g(x)$ συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ (πράξεις συνεχών)
- $g\left(\frac{1}{e}\right) = f\left(\frac{1}{e}\right) - \dfrac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{2014}} = -1 - \dfrac{e^{1/e}}{e^{2014}} = \dfrac{-e^{2014} - e^{1/e}}{e^{2014}} < 0$

$$g(1) = f(1) - e^{-2013} = 1 - \frac{1}{e^{2013}} = \frac{e^{2013}-1}{e^{2013}} > 0$$

Άρα, σύμφωνα με το Θ. Bolzano έχουμε ότι υπάρχει, τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$: $g(x_0) = 0 \Longleftrightarrow f(x_0) = e^{x_0-2014}$

ή $f\left(f(x_0)\right) = f\left(e^{x_0-2014}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

$Δ_1$ Θα αποδείξουμε ότι: $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου
$f(x)=\sqrt{x^2+1}+x,\ x\in\mathbb{R}$.

→ Αν $x>0$, τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι προφανής.
→ Αν $x<0$, τότε $f(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x \underset{-x>0}{\Leftrightarrow} x^2+1>x^2 \Leftrightarrow 1>0$ η οποία είναι
αληθής. Άρα $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$Δ_2$ Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,+\infty)$
(ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(2x)+1=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}>0$$

(λόγω του $Δ_1$ ερωτήματος)
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

$Δ_3$ Έχουμε:

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}-x=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\frac{1}{f(x)}.$$

Για την μονοτονία της f στο $\mathbb{R}$.
→ Για $x\in[0,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα (Ερώτημα $Δ_2$)
→ Για $x<0$ έχουμε ότι η $\frac{1}{f(x)}$ είναι επίσης γν. αύξουσα

διότι αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \xRightarrow[-x_2>0]{-x_1>0} f(-x_1) > f(-x_2) \Rightarrow \frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

Δ4 Έχουμε:

$$\left(\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha\right)\cdot\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)=1 \Leftrightarrow f(\alpha)\cdot f(\beta)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha)=\frac{1}{f(\beta)} \xLeftrightarrow{(\Delta_3)} f(\alpha)=f(-\beta) \xLeftrightarrow{f:\text{"1-1"}} \alpha=-\beta \Leftrightarrow \alpha+\beta=0$$

Δ5 Η συνάρτηση f είναι "1-1" άρα υπάρχει η f^{-1}.

Θέτω $y=f(x) \Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+1}+x$ με $y \geq 0$ και

έχουμε διαδοχικά:

$$y-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (y-x)^2=x^2+1 \Leftrightarrow y^2-2xy+x^2=x^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2-2xy=1 \Leftrightarrow y^2-1=2xy \Leftrightarrow x=\frac{y^2-1}{2y},\ y\neq 0$$

Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{2x},\ x>0$
