ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 13

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία-Ορισμός σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α3. **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος

Α4. **α)** Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής.

β) Έστω συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} -x-1, & x\geq 0 \\ x, & x<0 \end{cases}.$$

- Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$
- Η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-1\neq \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=0$
- Ωστόσο, η συνάρτηση $(f+g)(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού είναι η σταθερή συνάρτηση 0.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω t1 ο χρόνος που χρειάζεται ο κολυμβητής για να κολυμπήσει από το Κ στο Μ και t_2 ο που χρειάζεται για να περπατήσει από το Μ στο Σ.Έχουμε:

$$t_1=\frac{(KM)}{u_1}=\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3} \quad \text{και} \quad t_2=\frac{(M\Sigma)}{u_2}=\frac{300-x}{5}$$

Επομένως, ο συνολικός χρόνος για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ είναι:

$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3}+\frac{300-x}{5}$$

Β2. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3}+\frac{300-x}{5},\ x\in(0,300)$$

Είναι:

$$T'(x)=\frac{x}{3\sqrt{x^2+100^2}}-\frac{1}{5}$$

Η ρίζα της $T(x)=0$ είναι το 75.

Το πρόσημο της $T'(x)$, η μονοτονία και τα ακρότατα της Τ φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	**0** **75**	**300**
$T'(x)$	$-$	$+$
$\mathrm{T}(x)$	↘	↗

Δηλαδή η συνάρτηση Τ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 75\,ft$

Άρα όταν, $x = 75\,ft$ τότε ο κολυμβητής χρειάζεται το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του.

ΘΕΜΑ Γ: Δεν δίνεται λύση διότι κρίνεται εκτός ύλης (λόγω και της συνάρτησης ολοκλήρωμα).Σε επόμενη έκδοση θα αντικαταστασθεί. Προτείνεται να μην μελετηθεί.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 3x^2 + 6x + 4 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3x^2 + 6x + 4}{3f^2(x) + 1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι συνάρτηση «1-1».

Δ2. α) Έχουμε:

$$f^3(0) + f(0) = 2 \Leftrightarrow f(0) = \frac{2}{f^2(0) + 1} > 0$$

$$f^3(-2) + f(-2) = -2 \Leftrightarrow f(-2) = \frac{-2}{f^2(-2) + 1} < 0$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $[-2, 0]$ (διότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$), σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-2, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0$. Το x_0 είναι μοναδικό αφού η συνάρτηση f είναι «1-1».

β) Έχουμε διαδοσχικά από το γεγονόςότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$:

$$f(f(f(x))) > f(f(0)) \Leftrightarrow f(f(x)) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 + 3x^2 + 4x + 2}{f^2(x) + 1} > 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Η τελευταία ανίσωση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Έχουμε διαδοχικά από το γεγονός ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$:

$$f(g(x) - 4x) = f(3 - x^2) \Leftrightarrow g(x) - 4x = 3 - x^2 \Leftrightarrow g(x) = -x^2 + 4x + 3$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Εύκολα από τον πίνακα προσήμου της g' βρίσκουμε ότι η g παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1 = 2$.

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδον είναι:

$$E(\Omega) = \int_{-2}^{0} |h(x)| dx = \int_{-2}^{0} | f^3(x) + f(x)| dx = \int_{-2}^{0} |x^3 + 3x^2 + 4x + 2| \, dx = -\int_{-2}^{0} (x^3 + 3x^2 + 4x + 2) \, dx = 2 \text{ τ.μ}$$