ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού της Α.

(Μονάδες7)

A2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών.

(Μονάδες 8)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.

β) Αν f συνεχής σε ένα οποιοδήποτε σύνολο Α και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Α.

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

δ) Αν $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$, τότε $(gof)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Αν $P(x) = a_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots \alpha_1 x + a_0 \; (a_\nu \neq 0)$ ένα πολυώνυμο, τότε ισχύει:

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} (a_\nu x^\nu)$$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{1-x} - 1 \text{ και } g(x) = x^2$$

Β1. Να ορίσετε τις συναρτήσεις gof και fog.

(Μονάδες 6)

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

(Μονάδες 6)

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{4}-g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, πραγματική ρίζα.

(Μονάδες 8)

Β4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συναρτήση f με:

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}, & \alpha\nu\ x<0 \\ \sqrt{x^2+1}-x, & \alpha\nu\ x\geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να εξετάσετε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 8)

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα .

(Μονάδες 6)

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,5)$ τέτοιο, ώστε:

$$9f(\xi)=2f(2)+3f(3)+4f(4)$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ με:

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $f(1)=e$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

(i) $f(0)=1$ **(ii)** $f(-1)=\frac{1}{e}$

(Μονάδες 3+3=6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

(i) η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ **(ii)** η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα

(Μονάδες 3+3=6)

Δ3. **(i)** Αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, να βρεθούν.

(ii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-x)}{f(x)}$

(Μονάδες 4+4=8)

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

έχει μία , τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

(Μονάδες 5)

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Καλή επιτυχία

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ 1ο :

Α1. Θεωρία του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία του σχολικού βιβλίου.

Α3.
α) Σωστό.

β) Λάθος.

γ) Σωστό.

δ) Σωστό.

ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων είναι:

$$\begin{aligned} D_f &= (-\infty,1] \\ D_g &= \mathbb{R} \end{aligned}.$$

Το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \le 1\} = [-1,1]$$

Για κάθε $x \in [-1,1]$ έχουμε:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1-x^2} - 1, x \in [-1,1]$$

Το πεδίο ορισμού της gof είναι:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\} = \{x \le 1 \,/\, \sqrt{1-x} - 1 \in \mathbb{R}\} = (-\infty,1]$$

Για κάθε $(-\infty,1]$ έχουμε:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \left(\sqrt{1-x} - 1\right)^2 = 1 - x + 1 - 2\sqrt{1-x} = 2 - x - 2\sqrt{1-x}, x \in (-\infty,1]$$

Β2. Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη αφού:

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty,1]$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \Rightarrow \sqrt{1-x_1} - 1 > \sqrt{1-x_2} - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$, δηλαδή και «1-1», επομένως η f είναι αντιστέψιμη.

Για την αντίστροφη της f έχουμε:

$y=f(x)\Leftrightarrow y=\sqrt{1-x}-1\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=y+1\Leftrightarrow 1-x=(y+1)^2\Leftrightarrow x=1-(y+1)^2\;(y+1\geq 0\Leftrightarrow y\geq -1)$

Πρέπει ακόμα $1-(y+1)^2\leq 1\Leftrightarrow -(y+1)^2\leq 0$, που αληθεύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Άρα η αντίστροφη f^{-1} της f είναι :

$$f^{-1}(x)=1-(x+1)^2=1-(x^2+2x+1)=-x^2-2x,\,x\geq -1$$

Β3. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=f(x)+g(x)-\frac{1}{4},\; x\in[-1,1]$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την h στο $[-1,1]\subset\mathbb{R}$.

- Η h είναι συνεχής στο $[-1,1]$(ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων)
- $h(-1)=f(-1)+g(-1)-\frac{1}{4}=\sqrt{2}-1+1-\frac{1}{4}=\frac{4\sqrt{2}-1}{4}>0$
  $h(1)=f(1)+g(1)-\frac{1}{4}=-1+1-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}<0$

Επομένως $h(-1)\cdot h(1)<0$ και άρα υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα

$$\xi\in(-1,1):h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{1}{4}-g(\xi)$$

Β4. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ το σύνολο τιμών της θα είναι:

$$\left[f(1),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=[-1,\infty)$$

Ή αλλιώς το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}, δηλαδή το $D_{f^{-1}}=[-1,\infty)$.

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Όταν $x\to+\infty$ είναι $x>0$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = 0$$

Όταν $x \to -\infty$ είναι $x<0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\right) \quad (1)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ και:

$$\left|\frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\right| \le \frac{1}{x^{2016}} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^{2016}} \le \frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}} \le \frac{1}{x^{2016}}$$

$$\text{με } \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{2016}} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^{2016}}\right) = 0$$

Από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}} = 0.$$

Επομένως από την (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}} = 1+0 = 1$$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι:

- Συνεχής στο διάστημα $(-\infty,0)$ (ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων)
- Συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ (ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων)

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο σημείο $x_0 = 0$.

Είναι $f(0) = 1$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 1$$

Ακόμα:

$$\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}} = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^{2016} = 1$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\right) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}} = 0+1=1$$

Οπότε $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$ και άρα $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

Επομένως η f είναι συνεχής και στο 0, αφού $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

Γ3. Επειδή:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = 0-\infty = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) = 1+\infty = +\infty$$

υπάρχουν $x_1>0,\ x_2<0$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $h(x_1)<0,\ h(x_2)>0$.

Επομένως θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x)-x, x\in[x_2,x_1]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[x_2,x_1]\subset\mathbb{R}$ (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων)
- $h(x_1)\cdot h(x_2)<0$

Από το θεώρημα του Bolzano έχουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(x_2,x_1)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$$

Επομένως η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μία , τουλάχιστον, πραγματική λύση.

Γ4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,5]$ και άρα παίρνει μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή, Μ και μ αντίστοιχα, δηλαδή $\mathrm{M}\le f(x)\le\mu$ για κάθε $x\in[0,5]$.

Έχουμε:

$$\mu\le f(2)\le \mathrm{M} \Leftrightarrow 2\mu\le 2f(2)\le 2\mathrm{M}\ (1)$$
$$\mu\le f(3)\le \mathrm{M} \Leftrightarrow 3\mu\le 3f(3)\le 3\mathrm{M}\ (2)$$
$$\mu\le f(4)\le \mathrm{M} \Leftrightarrow 4\mu\le 4f(4)\le 4\mathrm{M}\ (3)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) , (2), (3) κατά μέλη έχουμε:

$$9\mu\le 2f(2)+3f(3)+4f(4)\le 9\mathrm{M} \Leftrightarrow \mu\le\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}\le\mathrm{M}$$

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(1,5)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)=\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9} \Leftrightarrow 9f(\xi)=2f(2)+3f(3)+4f(4)$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. i) Για $x=y=0$ έχουμε:

$$f(0+0)=f(0)\cdot f(0)\Leftrightarrow f(0)=f^2(0)\Leftrightarrow f(0)\big(f(0)-1\big)=0\Leftrightarrow \big(f(0)=0 \text{ ή } f(0)=1\big)$$

Δεκτή τιμή είναι η $f(0)=1\in(0,\infty)$.

ii) Για $x=1, y=-1$ έχουμε:

$$f(1-1)=f(1)\cdot f(-1)\Leftrightarrow f(0)=ef(-1)\Leftrightarrow 1=ef(-1)\Leftrightarrow f(-1)=\frac{1}{e}$$

Δ2. i) Αφού η f είναι συνεχής στο 0 θα είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0\in\mathbb{R}$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ (Ι)

Θέτουμε:

$$\begin{gathered} x-x_0=h\Leftrightarrow x=x_0+h \\ x\to x_0\Leftrightarrow h\to 0 \end{gathered}$$

Τότε η (1) γίνεται:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\big(f(x_0)\cdot f(h)\big)=f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0} f(h)=f(x_0)$$

ii) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, αφού γνωρίζουμε ότι είναι γνησίως μονότονη και $f(0)=1,\ f(-1)=\frac{1}{e}$. Επομένως και η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας (το οποίο πρέπει να αποδείξουμε ως πρόταση και υπάρχει αποδεδειγμένο στις σημειώσεις), δηλαδή η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Δ3. i) Θέτουμε: $\begin{gathered} x-x_0=h\Leftrightarrow x=x_0+h \\ x\to+\infty\Leftrightarrow h\to+\infty \end{gathered}$ $(x_0\in\mathbb{R})$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{h\to+\infty} f(x_0+h)=\lim_{h\to+\infty}\big(f(x_0)\cdot f(h)\big)=f(x_0)\cdot\lim_{h\to+\infty} f(h)=f(x_0)\cdot\lim_{h\to+\infty} f(h)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(x_0)\cdot\lim_{x\to+\infty} f(x)\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)\big(1-f(x_0)\big)=0\Leftrightarrow\Big(\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \text{ ή } f(x_0)=1\Big)$$

Όμως η σχέση $f(x_0)=1$ ισχύει μόνο για $x_0=0$ (αφού $f(0)=1$ και η f είναι συνάρτηση «1-1»).

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Όμοια θέτουμε: $\begin{gathered} x-x_0=h\Leftrightarrow x=x_0+h\ \ (x_0\in\mathbb{R}) \\ x\to-\infty\Leftrightarrow h\to-\infty \end{gathered}$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{h\to-\infty} f(x_0+h) = \lim_{h\to-\infty}\left(f(x_0)\cdot f(h)\right) = f(x_0)\cdot \lim_{h\to-\infty} f(h) = f(x_0)\cdot \lim_{h\to-\infty} f(h)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = f(x_0)\cdot \lim_{x\to-\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)\left(1-f(x_0)\right)=0 \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \text{ ή } f(x_0)=1\right)$$

Όμως η σχέση $f(x_0)=1$ ισχύει μόνο για $x_0=0$ (αφού $f(0)=1$ και η f είναι συνάρτηση «1-1»).

Επομένως $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Σημείωση: Οι ισοδυναμίες που χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση των ορίων $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ στηρίζονται στην μοναδικότητα του ορίου.

(ii) Για $y=-x$ έχουμε:

$$f(x+(-x)) = f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow f(0) = f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow 1 = f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1)\cdot f(-x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1)}{f^2(x)} = f(1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{f^2(x)} = \frac{f(1)}{f^2(0)} = \frac{e}{1} = e$$

Δ4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα παίρνει μία ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή , m και M αντίστοιχα, δηλαδή:

$$m \le f(x) \le M \text{ για κάθε } x\in[0,1]$$

Άρα έχουμε:

$$m \le f\left(\frac{1}{2}\right) \le M \quad (1)$$

$$m \le f\left(\frac{1}{3}\right) \le M \quad (2)$$

$$m \le f\left(\frac{1}{4}\right) \le M \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) ,(2) , (3) είναι:

$$3m \le f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right) \le 3M \Leftrightarrow m \le \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)}{3} \le M$$

Επομένως από το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών έχουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0)=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)}{3}\Leftrightarrow 3f(x_0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)$$

Επιμέλεια λύσεων. Συντακτική Ομάδα www.mathp.gr

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbf{f(x)=\sqrt{1-x}-1}$ και $\mathbf{g(x)=x^2}$.

Β1. Να ορισθούν οι συναρτήσεις $\mathbf{g\circ f}$ και $\mathbf{f\circ g}$. *Μονάδες 6*

Β2. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφή της. *Μονάδες 6*

Β3. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\mathbf{f(x)=\frac{1}{4}-g(x)}$ έχει μία, τουλάχιστον, πραγματική ρίζα. *Μονάδες 8*

Β4. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $\mathbf{f}$. *Μονάδες 5*

Β1. Είναι $D_f=(-\infty,1]$ και $D_g=\mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ είναι: $D_{g\circ f}=\{x\in D_f\,/\,f(x)\in D_g\}=\{x\le 1\,/\,\sqrt{1-x}-1\in\mathbb{R}\}=(-\infty,1]$.

Για κάθε $x\in(-\infty,1]$ είναι: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\left(\sqrt{1-x}-1\right)^2=1-x-2\sqrt{1-x}+1=\mathbf{2-x-2\sqrt{1-x}}$.

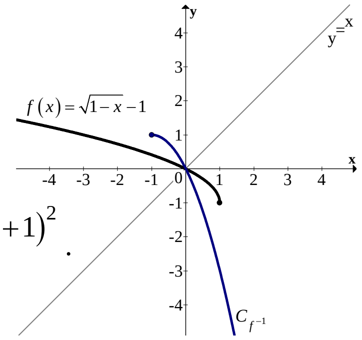
Το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ είναι: $D_{f\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2\le 1\}=[-1,1]$.

Για κάθε $x\in[-1,1]$ είναι: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\mathbf{\sqrt{1-x^2}-1}$.

Β2. Για κάθε $x_1,\ x_2\in(-\infty,1]$ με $x_1<x_2\ \Rightarrow\ -x_1>-x_2\ \Rightarrow\ 1-x_1>1-x_2\ \Rightarrow\ \sqrt{1-x_1}>\sqrt{1-x_2}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \sqrt{1-x_1}-1>\sqrt{1-x_2}-1\ \Rightarrow\ f(x_1)>f(x_2)$. Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$, άρα και $1-1$ και επομένως η f είναι αντιστρέψιμη.

Είναι: $y=f(x)\ \Leftrightarrow\ y=\sqrt{1-x}-1\ \Leftrightarrow\ \sqrt{1-x}=y+1\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}1-x=(y+1)^2\\ y+1\ge 0\end{cases}\ \Leftrightarrow$



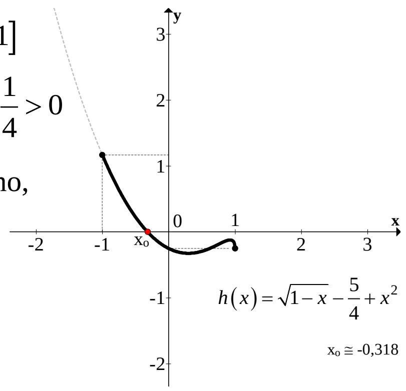
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-(y+1)^2\\ 1-(y+1)^2\le 1\\ y\ge -1\end{cases}\ \Leftrightarrow\begin{cases}x=1-(y+1)^2\\ -(y+1)^2\le 0\\ y\ge -1\end{cases}\ \Leftrightarrow\begin{cases}x=1-(y+1)^2\\ y\in\mathbb{R}\\ y\ge -1\end{cases}\ \Leftrightarrow\begin{cases}x=1-(y+1)^2\\ y\ge -1\end{cases}.$$

Άρα η αντίστροφη f^{-1} της f είναι: $f^{-1}(x)=1-(x+1)^2=1-\left(x^2+2x+1\right)=\mathbf{-x^2-2x}$, $x\ge -1$.

Β3. Είναι $f(x)=\frac{1}{4}-g(x)\ \Leftrightarrow\ f(x)-\frac{1}{4}+g(x)=0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{1-x}-1-\frac{1}{4}+x^2=0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{1-x}-\frac{5}{4}+x^2=0$,

με $x\in D_f\cap D_g=(-\infty,1]$. Έστω η συνάρτηση $h(x)=\sqrt{1-x}-\frac{5}{4}+x^2$, με $x\in[-1,1]$.

Η h είναι συνεχής στο $[-1,1]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών στο $[-1,1]$ συναρτήσεων και ισχύει: $h(-1)=\sqrt{1-(-1)}-\frac{5}{4}+(-1)^2=\sqrt{2}-\frac{5}{4}+1=\sqrt{2}-\frac{1}{4}>0$ και $h(1)=\sqrt{1-1}-\frac{5}{4}+1^2=-\frac{5}{4}+1=-\frac{1}{4}<0$. Άρα, από το θεώρημα Bolzano, προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{1-x_0}-\frac{5}{4}+x_0^2=0$, οπότε η εξίσωση $\sqrt{1-x}-\frac{5}{4}+x^2=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)\subseteq\mathbb{R}$.



Β4. Το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}, οπότε $f(D_f)=[-1,+\infty)$.

2ος τρόπος: Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ το σύνολο τιμών της είναι το: $f(D_f)=\left[f(1),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f}$ με: $\mathbf{f\left(x\right)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}, & \alpha\nu\ x<0 \\ \sqrt{x^2+1}-x, & \alpha\nu\ x\geq 0 \end{cases}}$.

Γ1. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια: $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)}$, $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)}$. *Μονάδες 6*

Γ2. Να εξεταστεί η συνέχεια της $\mathbf{f}$ στο πεδίο ορισμού της. *Μονάδες 8*

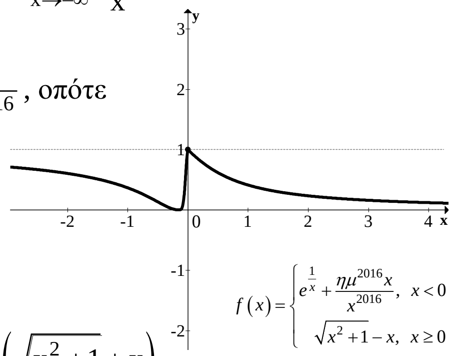
Γ3. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\mathbf{f\left(x\right)=x}$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα. *Μονάδες 6*

Γ4. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\mathbf{\xi\in\left(1,\ 5\right)}$ τέτοιο, ώστε: $\mathbf{9f\left(\xi\right)=2f\left(2\right)+3f\left(3\right)+4f\left(4\right)}$. *Μονάδες 5*

Γ1. Η f έχει $D_f=\mathbb{R}$ και είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}=1+0=\mathbf{1}$, διότι:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u}{=}\lim\limits_{u\to0}e^u=e^0=1$ και $\left|\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\right|=\dfrac{\left|\eta\mu^{2016}x\right|}{\left|x^{2016}\right|}=\dfrac{\left|\eta\mu^{2016}x\right|}{x^{2016}}\leq\dfrac{1}{x^{2016}}$, οπότε

$-\dfrac{1}{x^{2016}}\leq\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\leq\dfrac{1}{x^{2016}}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x^{2016}}\right)=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^{2016}}$,



από το θεώρημα παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}=0$.

Επίσης ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=}0$.

Γ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left(-\infty,\ 0\right)$ και $\left(0,\ +\infty\right)$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών στο $\left(-\infty,\ 0\right)$ και $\left(0,\ +\infty\right)$, αντίστοιχα, συναρτήσεων. Θα εξεταστεί η συνέχεια της f στο $x_0=0$.

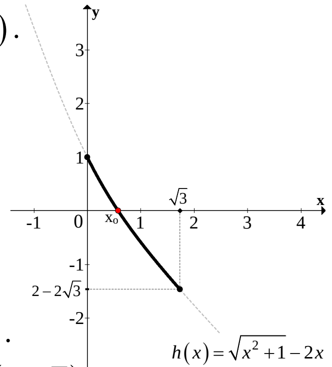
Ισχύει: $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\right)=\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}=0+1=1$, διότι: $\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=\varphi}{=}\lim\limits_{\varphi\to-\infty}e^{\varphi}=0$

και $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^{2016}=\left(\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^{2016}=1^{2016}=1$. Επίσης ισχύει:

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\sqrt{0^2+1}-0=1$. Δηλαδή $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+} f\left(x\right)=1$, οπότε είναι $\lim\limits_{x\to0} f\left(x\right)=1$ και επειδή $f\left(0\right)=1$, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού ισχύει $\lim\limits_{x\to0} f\left(x\right)=f\left(0\right)$.

Επομένως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$.

Γ3. Έστω η συνάρτηση $h\left(x\right)=f\left(x\right)-x$, $x\in\left[0,\ \sqrt{3}\right]$. Η h είναι συνεχής στο $\left[0,\ \sqrt{3}\right]$, ως διαφορά συνεχών στο $\left[0,\ \sqrt{3}\right]$ συναρτήσεων και ισχύουν:



$h\left(0\right)=f\left(0\right)-0=\sqrt{0^2+1}-0-0=1>0$ και

$h\left(\sqrt{3}\right)=f\left(\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1}-\sqrt{3}-\sqrt{3}=2-2\sqrt{3}<0$, οπότε $h\left(0\right)\cdot h\left(\sqrt{3}\right)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano, προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\ \sqrt{3}\right)$ τέτοιο, ώστε $h\left(x_0\right)=0\Leftrightarrow f\left(x_0\right)-x_0=0\Leftrightarrow f\left(x_0\right)=x_0$. Επομένως η εξίσωση $f\left(x\right)=x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\ \sqrt{3}\right)\subset\mathbb{R}$.

Γ4. Για $x \geq 0$ είναι:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\sqrt{x^2+1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

Ισχύει: $0 \leq \underline{x_1 < x_2} \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow x_1^2+1 < x_2^2+1 \Rightarrow \sqrt{x_1^2+1} < \sqrt{x_2^2+1}$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων $x_1 < x_2$ και $\sqrt{x_1^2+1} < \sqrt{x_2^2+1}$ προκύπτει: $\sqrt{x_1^2+1} + x_1 < \sqrt{x_2^2+1} + x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2+1}+x_1} > \dfrac{1}{\sqrt{x_2^2+1}+x_2} \Rightarrow \underline{f(x_1) > f(x_2)}$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Άρα: $1<2<3<4<5 \Leftrightarrow f(1)>f(2)>f(3)>f(4)>f(5)$, οπότε είναι:

$f(1)>f(2)>f(5) \Leftrightarrow 2f(5)<2f(2)<2f(1)$ *(1)*,

$f(1)>f(3)>f(5) \Leftrightarrow 3f(5)<3f(3)<3f(1)$ *(2)*,

$f(1)>f(4)>f(5) \Leftrightarrow 4f(5)<4f(4)<4f(1)$ *(3)*.

Από την πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων *(1)*, *(2)* και *(3)* προκύπτει:

$$9f(5) < 2f(2)+3f(3)+4f(4) < 9f(1) \Leftrightarrow f(5) < \frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9} < f(1).$$

Επομένως, αφού η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 5]$, ως συνεχής στο $\mathbb{R}$, από το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών προκύτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 5)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi) = \frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9} \Leftrightarrow 9f(\xi) = 2f(2)+3f(3)+4f(4).$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $\mathbf{f:\mathbb{R}\to(0,\ +\infty)}$ με: $\mathbf{f(x+y)=f(x)\cdot f(y)}$ για κάθε $\mathbf{x, y\in\mathbb{R}}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbf{x_0=0}$ και $\mathbf{f(1)=e}$.

Δ1. Να αποδειχθεί ότι: *i)* $\mathbf{f(0)=1}$, *ii)* $\mathbf{f(-1)=\frac{1}{e}}$. *Μονάδες 6*

Δ2. Να αποδειχθεί ότι: *i)* η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, *ii)* η $\mathbf{f^{-1}}$ είναι γνησίως αύξουσα. *Μονάδες 6*

Δ3. *i)* Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια: $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}$, $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)}$.

ii) Να βρεθεί το όριο $\mathbf{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1-x)}{f(x)}}$. *Μονάδες 8*

Δ4. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $\mathbf{f(x)=\frac{1}{3}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)\right)}$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $\mathbf{(0,\ 1)}$. *Μονάδες 5*

Δ1. ***i)*** Για $x=y=0$ είναι: $f(0+0)=f(0)\cdot f(0)\Leftrightarrow f(0)=f^2(0)\Leftrightarrow f^2(0)-f(0)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(0)\big(f(0)-1\big)=0\Leftrightarrow\Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f(0)-1=0\Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f(0)=1$.
Η τιμή $f(0)=0$ απορρίπτεται διότι $f(\mathbb{R})\subseteq(0,\ +\infty)$, άρα είναι $f(0)=1$.

ii) Για $x=1,\ y=-1$ είναι: $f(1-1)=f(1)\cdot f(-1)\Leftrightarrow f(0)=e\cdot f(-1)\Leftrightarrow 1=e\cdot f(-1)\Leftrightarrow f(-1)=\frac{1}{e}$.

Δ2. ***i)*** Αφού η f είναι συνεχής στο 0 θα ισχύει $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=1$ *(1)*. Θα δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $x_0\in\mathbb{R}$, δηλαδή ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Θέτω $x-x_0=h\Leftrightarrow x=x_0+h$, οπότε $x\to x_0\Leftrightarrow h\to0$.
Άρα: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to0}\big(f(x_0)\cdot f(h)\big)=\Big(\lim\limits_{h\to0}f(x_0)\Big)\cdot\Big(\lim\limits_{h\to0}f(h)\Big)=f(x_0)\cdot\lim\limits_{h\to0}f(h)\overset{(1)}{=}$
$=f(x_0)\cdot1=f(x_0)$.

ii) Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f(0)=1$ και $f(-1)=\frac{1}{e}$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς η f είναι $1-1$ και άρα αντιστρέφεται, δηλαδή ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} με πεδίο ορισμού το $f(\mathbb{R})$ και ισχύει $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, για $x\in\mathbb{R}$ και $y\in f(\mathbb{R})$.
Έστω $y_1, y_2\in D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})$, με $y_1<y_2\Rightarrow f\big(f^{-1}(y_1)\big)<f\big(f^{-1}(y_2)\big)\overset{\text{f: γν.αύξ.}}{\Rightarrow}f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$.
Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(\mathbb{R})$.

Δ3. ***i)*** Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Θέτω $x-x_0=h\Leftrightarrow x=x_0+h$, οπότε $x\to+\infty\Leftrightarrow h\to+\infty$.
Άρα: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{h\to+\infty}f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to+\infty}\big(f(x_0)\cdot f(h)\big)=\Big(\lim\limits_{h\to+\infty}f(x_0)\Big)\cdot\Big(\lim\limits_{h\to+\infty}f(h)\Big)=f(x_0)\cdot\lim\limits_{h\to+\infty}f(h)=$
$=f(x_0)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Επομένως: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(x_0)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-f(x_0)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\big[1-f(x_0)\big]=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ή $1-f(x_0)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ή $f(x_0)=1$.
Η σχέση $f(x_0)=1$ ισχύει μόνο όταν $x_0=0$, αφού $f(0)=1$ και η f είναι συνάρτηση $1-1$.
Επομένως είναι: $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

$(*)$: *Οι ισοδυναμίες βασίζονται στην μοναδικότητα του ορίου.*

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Θέτω $x - x_0 = t \Leftrightarrow x = x_0 + t$, οπότε $x \to -\infty \Leftrightarrow t \to -\infty$.

Άρα: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} f(x_0 + t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \left(f(x_0)\cdot f(t)\right) = \left(\lim\limits_{t\to-\infty} f(x_0)\right)\cdot\left(\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)\right) = f(x_0)\cdot \lim\limits_{t\to-\infty} f(t) =$

$= f(x_0)\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Επομένως: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = f(x_0)\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - f(x_0)\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\left[1 - f(x_0)\right] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ή $1 - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ή $f(x_0) = 1$.

Η σχέση $f(x_0) = 1$ ισχύει μόνο όταν $x_0 = 0$, αφού $f(0) = 1$ και η f είναι συνάρτηση $1-1$.

Επομένως είναι: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

Δ3. ***ii)*** Από τη δοθείσα σχέση για $y = -x$ προκύπτει: $f(x + (-x)) = f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow f(0) = f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ *(2)*.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)\cdot f(-x)}{f(x)} \overset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)\cdot\dfrac{1}{f(x)}}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)}{f^2(x)} = \dfrac{f(1)}{f^2(0)} = \dfrac{e}{1^2} = \mathbf{e}$.

Δ4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 1]$, αφού είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή $0 < \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} < 1$, ισχύουν: $f(0) < f\left(\dfrac{1}{2}\right) < f(1)$ *(1)*, $f(0) < f\left(\dfrac{1}{3}\right) < f(1)$ *(2)*

και $f(0) < f\left(\dfrac{1}{4}\right) < f(1)$ *(3)*.

Από την πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων *(1)*, *(2)* και *(3)* προκύπτει:

$$3f(0) < f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) < 3f(1) \Leftrightarrow f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)}{3} < f(1).$$

Επομένως, από το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών, προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$

τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)}{3} \Leftrightarrow f(x_0) = \dfrac{1}{3}\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{3}\right) + f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)$.

Ερωτήσεις κατανόησης κεφ. 1 σελίδας 201 - 203

Ι

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώστε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας.

1.

Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε

α) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in R^*$ Α Ψ

β) $(f \circ g)(x) = -x$, $x \in R$ Α Ψ

Αιτιολογία

α) Είναι ψευδής διότι

$D_f = (0, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι το σύνολο

$D_{gof} = \{ x \in D_f$ με $f(x) \in D_g \}$, δηλαδή $x > 0$ με $\ln x \in R \Rightarrow x > 0$

Άρα $D_{gof} = (0, +\infty)$ και όχι το R^*

β) Είναι αληθής διότι

$D_{fog} = \{ x \in D_g$ με $g(x) \in D_f \}$, δηλαδή $x \in \mathbb{R}$ με $e^{-x} > 0$, οπότε

$D_{fog} = \mathbb{R}$ και $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln e^{-x} = -x$

2.

Αν $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$ Α Ψ

Αιτιολογία

Θέτω $\dfrac{f(x)}{x-1} = g(x)$ με $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \ell$.

Τότε $f(x) = (x-1)g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x-1)g(x) = 0 \cdot \ell = 0$

3.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}=0$ Α Ψ

Αιτιολογία

Είναι ψευδής, διότι ο πολλαπλασιασμός $0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}$ δε δίνει αποτέλεσμα 0,

αφού είναι η απροσδιόριστη μορφή $0(+\infty)$ ή $0(-\infty)$

4.

Αν $f(x)>1$ για κάθε $x\in R$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, τότε

κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to 0}f(x)>1$ Α Ψ

Αιτιολογία

Είναι ψευδής, διότι μπορεί να είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

Π. x Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases}$

είναι $f(x)>1$ για κάθε $x\in R$ και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

5.

Ισχύει : α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot ημ\dfrac{1}{x}\right)=1$ Α Ψ

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ημx}{x}=1$ Α Ψ

Αιτιολογία

Το (α) είναι αληθής διότι :

Θέτω $\dfrac{1}{x}=u$, οπότε $u\to 0$.

Αλλά $\dfrac{1}{u}=x$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot ημ\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{1}{u}\cdot ημu\right)=\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{ημu}{u}\right)=1$

Το (β) είναι ψευδής διότι :

$$\left|\frac{ημx}{x}\right|=\frac{1}{|x|}|ημx|\leq\frac{1}{|x|}\quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{|x|}\leq\frac{ημx}{x}\leq\frac{1}{|x|}$$

Επειδή όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$, από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ημx}{x}=0$

6.

Αν $0 \leq f(x) \leq 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim_{x\to 0}(x^2 f(x)) = 0$ Α Ψ

Αιτιολογία

Είναι αληθής διότι :

$0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 f(x) \leq x^2$ και επειδή $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x\to 0}(x^2 f(x)) = 0$.

7.

Αν $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$, $x \in (\alpha, +\infty)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι Α Ψ

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

Λύση

Είναι ψευδής . Μπορεί η f να μην έχει καν όριο στο $+\infty$

8.

Αν υπάρχει το $\lim_{x\to 6}(f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6)g(6)$ Α Ψ

Αιτιολογία

Είναι ψευδής διότι δεν ξέρουμε αν η $f(x)g(x)$ είναι συνεχής στο 6.

9.

Αν $\lim_{x\to x_o}|f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι Α Ψ

$\lim_{x\to x_o} f(x) = 1$ ή $\lim_{x\to x_o} f(x) = -1$

Αιτιολογία

Είναι ψευδής διότι μπορεί το $\lim_{x\to x_o} f(x)$ μπορεί να μην υπάρχει.

Π .χ Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$ έχουμε

$\lim_{x\to 0}|f(x)| = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{|x|}$ =1 ενώ το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει

10.

Αν $\lim_{x\to x_o}|f(x)|=0$ τότε $\lim_{x\to x_o} f(x)=0$ Α Ψ

Αιτιολογία

Από τον ορισμό του ορίου (είναι εκτός ύλης) έχουμε

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}[f(x)-\ell]=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}|f(x)-\ell|=0$$

Για $\ell=0$ προκύπτει το ζητούμενο

11.

Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x\neq 4$ ισχύει Α Ψ

$f(x)=\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$, τότε $f(4)=1$

Αιτιολογία

Είναι αληθής διότι :

$$\text{f συνεχής} \Rightarrow f(4)=\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-7x+12}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-3)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4}(x-3)=1$$

12.

Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,\ 1]$ και $f(-1)=4$, $f(1)=3$,

τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_o\in(-1,\ 1)$ έτσι ώστε Α Ψ

$f(x_o)=\pi$

Αιτιολογία

Είναι αληθής διότι :

Η f συνεχής στο $[-1,\ 1]$, $f(-1)\neq f(1)$ και $3<\pi<4$

Από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_o\in(-1,\ 1)$ έτσι ώστε $f(x_o)=\pi$

II

Κυκλώστε την σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις

1.

Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell$ και $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = m$, $\ell, m \in \mathbb{R}$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_o

τότε κατ' ανάγκη θα είναι :

Α) $\ell < m$ Β) $\ell \le m$ Γ) $\ell \le m$

Δ) $\ell = m$ Ε) $m < \ell$

2.

Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με

Α. 8 Β. 1 Γ. 0 Δ. $+\infty$ Ε -8

3.

Το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x^3 - x^2 - 1| - x^3 + x^2}{x^2}$ είναι ίσο με

Α. $+\infty$ Β. $-\infty$ Γ. 1 Δ. -1 Ε 0

4.

Αν το $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x}$ δεν υπάρχει, τότε

Α. $x_o = 0$ Β. $x_o = 2$ Γ. $x_o = -1$ Δ $x_o = 1$

III

1.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} + 1$ και $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο :

Α) η g είναι συνεχής στο 2

Β) η f είναι συνεχής στο 1

Γ η g έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

Δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

2.

Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλά ορισμένα;

A $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x+1}$ B. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x-1}$

Γ $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{3x^{9}+x-1}$ Δ. $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{3x^{9}+x-1}$

E $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(x^{3}+x+1)]$ ΣΤ. $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(x^{3}+x-1)]$

3.

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\Delta=[0,\ 3]$ με

$f(0)=2$, $f(1)=1$ και $f(3)=-1$

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

A. Υπάρχει $x_o\in(0,\ 3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o)=0$

B. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-1$

Γ. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

Δ. $[-1,\ 2]\subseteq f(\Delta)$

E Η μέγιστη τιμή της f στο $[0,\ 3]$ είναι το 2 και η ελάχιστη το -1