ΘΕΜΑ Α

i) Θεωρία σχολ. βιβλ. σελ: 34

ii) Θεωρία σχολ. βιβλ. σελ: 21

iii) α) Λ β) Λ

διότι έστω $\vec{\alpha} = \left(\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|, y\right)$

Τότε, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\frac{1}{4}|\vec{\alpha}|^2 + y^2} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{\alpha}|^2 + y^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}|\vec{\alpha}|^2 = y^2$

Άρα, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}|$ ή $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}|$

Αν $\vec{\alpha} = \left(\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|, \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}|\right)$ τότε $\lambda_{\vec{\alpha}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}|}{\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|} = \sqrt{3}$

Οπότε, $\varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3}$, όπου ω η γωνία του $\vec{\alpha}$ με τον $x'x$

Οπότε, $\omega = \frac{\pi}{3}$

ΘΕΜΑ Β

i) Εστω $\Delta(x,0)$ και $E(0,y)$ τα σημεια στα οποια τεμνει η $A\Gamma$ τον αξονα $x'x$ και η AB τον αξονα $y'y$ αντιστοιχα

Ειναι: $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (1-3, 0-2) = (-2,-2)$

$\vec{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) = (0-3, 4-2) = (-3, 2)$

$\vec{A\Delta} = (x_\Delta - x_A, y_\Delta - y_A) = (x-3, 0-2) = (x-3, -2)$

$\vec{AE} = (x_E - x_A, y_E - y_A) = (0-3, y-2) = (-3, y-2)$

Αφου η $A\Gamma$ τεμνει τον αξονα $x'x$ στο σημειο $\Delta(x,0)$ τοτε τα σημεια A, Γ και Δ ειναι συνευθειακα.

Συνεπως, $\vec{A\Gamma} \parallel \vec{A\Delta}$

Τωρα, επειδη $\vec{A\Gamma} \parallel \vec{A\Delta}$ προκυπτει οτι $det(\vec{A\Gamma}, \vec{A\Delta}) = 0$

Ειναι $det(\vec{A\Gamma}, \vec{A\Delta}) = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ x-3 & -2 \end{vmatrix} = (-3)(-2) - 2(x-3) = 6 - 2x + 6 =$

$= 12 - 2x$ Αρα, $det(\vec{A\Gamma}, \vec{A\Delta}) = 0 \Leftrightarrow 12 - 2x = 0 \Leftrightarrow 12 = 2x$

$\Leftrightarrow 2x = 12 \Leftrightarrow \boxed{x = 6}$ Οποτε, $\Delta(6,0)$

Ομοιως, αφου η AB τεμνει τον άξονα $y'y$ στο σημειο $E(0,y)$ προκυπτει οτι $det(\vec{AB}, \vec{AE}) = 0$

Ειναι $det(\vec{AB}, \vec{AE}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & y-2 \end{vmatrix} = -2(y-2) - (-3)(-2) = -2y + 4 - 6 =$

$= -2y - 2 = -2(y+1)$

Αρα, $det(\vec{AB}, \vec{AE}) = 0 \Leftrightarrow -2(y+1) = 0 \Leftrightarrow y+1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = -1}$

Οποτε $E(0,-1)$

Τελικά, $\Delta(6,0)$ και $E(0,-1)$

ii) Εστω $I(x_1,y_1)$, $M(x_2,y_2)$ και $K(x_3,y_3)$ τα μέσα των ευθ. τμηματων ΟΑ, ΒΓ και ΕΔ αντιστοιχα.

Τοτε, $x_1 = \frac{x_O + x_A}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$

$$y_1 = \frac{y_O + y_A}{2} = \frac{0+2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{x_B + x_\Gamma}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_3 = \frac{x_E + x_\Delta}{2} = \frac{0+6}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_3 = \frac{y_E + y_\Delta}{2} = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$$

Αρα, $I\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, $M\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ και $K\left(3, -\frac{1}{2}\right)$

Ειναι $\overrightarrow{IM} = (x_M - x_I, y_M - y_I) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}, 2-1\right) = (-1, 1)$

$$\overrightarrow{IK} = (x_K - x_I, y_K - y_I) = \left(3 - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} - 1\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

Παρατηρουμε οτι $\det(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IK}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = (-1)\left(-\frac{3}{2}\right) - 1 \cdot \frac{3}{2} =$

$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$ Αρα, $\overrightarrow{IM} \parallel \overrightarrow{IK}$ και επειδη I κοινο σημειο τότε τα σημεια I, M και K συνευθειακα.

iii) Με σημειο αναφορας το σημειο Γ εχουμε:

$$\vec{M_1A}+2\vec{M_1B}+(\kappa-3)\vec{M_1\Gamma}=\vec{A\Gamma}$$

$$\vec{\Gamma A}-\vec{\Gamma M_1}+2(\vec{\Gamma B}-\vec{\Gamma M_1})-(\kappa-3)\vec{\Gamma M_1}=-\vec{\Gamma A}$$

$$\vec{\Gamma A}-\vec{\Gamma M_1}+2\vec{\Gamma B}-2\vec{\Gamma M_1}-\kappa\vec{\Gamma M_1}+3\vec{\Gamma M_1}=-\vec{\Gamma A}$$

$$\vec{\Gamma A}+2\vec{\Gamma B}-3\vec{\Gamma M_1}-\kappa\vec{\Gamma M_1}+3\vec{\Gamma M_1}=-\vec{\Gamma A}$$

$$\vec{\Gamma A}+2\vec{\Gamma B}-\kappa\vec{\Gamma M_1}=-\vec{\Gamma A}$$

$$\vec{\Gamma A}+2\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma A}=\kappa\vec{\Gamma M_1}$$

$$2\vec{\Gamma A}+2\vec{\Gamma B}=\kappa\vec{\Gamma M_1}$$

$$2(\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B})=\kappa\vec{\Gamma M_1}$$

$$\frac{2\cdot 2\cdot\vec{\Gamma\Lambda}}{\kappa}=\vec{\Gamma M_1}$$, οπου Λ το μεσο του (AB)

$$\frac{4}{\kappa}\vec{\Gamma\Lambda}=\vec{\Gamma M}$$

Αρα, $\vec{\Gamma M_1}\parallel\vec{\Gamma\Lambda}$ και επειδη το Γ κοινο τοτε τα σημεια Γ, Λ και M_1 ειναι συνευθειακα.
Συνεπως, το σημειο M_1 βρισκεται στην ευθεια που οριζει το μεσο Λ του ευθ. τμηματος AB και το σημειο Γ

Αν $M_1\equiv\Lambda$ τοτε $\vec{\Gamma\Lambda}=\vec{\Gamma M}$ Αρα, απο την σχεση $\frac{4}{\kappa}\vec{\Gamma\Lambda}=\vec{\Gamma M}$ προκυπτει $\frac{4}{\kappa}\vec{\Gamma\Lambda}=\vec{\Gamma\Lambda}\Leftrightarrow\frac{4}{\kappa}\vec{\Gamma\Lambda}-\vec{\Gamma\Lambda}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\frac{4}{\kappa}-1\right)\vec{\Gamma\Lambda}=\vec{0}$

$$\overset{\vec{\Gamma\Lambda}\neq\vec{0}}{\Longleftrightarrow}\frac{4}{\kappa}-1=0\Leftrightarrow\frac{4}{\kappa}=1\Leftrightarrow 4=\kappa\Leftrightarrow\boxed{\kappa=4}$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

i) Εχουμε οτι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}=\vec{0}$

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2\vec{\gamma}$$

Αρα, $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|2\vec{\gamma}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=|2\vec{\gamma}|^2 \Leftrightarrow (\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=(2\vec{\gamma})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=4\vec{\gamma}^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=4|\vec{\gamma}|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3^2=4\cdot 2^2 \Leftrightarrow 1+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+9=4\cdot 4 \Leftrightarrow 10+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=16$

$\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\vec{\beta}=16-10 \Leftrightarrow \cancel{2}\vec{\alpha}\vec{\beta}=8 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4$ (1)

Ομοιως, απο την σχεση $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}=\vec{0}$ παιρνουμε $\vec{\alpha}=2\vec{\gamma}-\vec{\beta}$

Οποτε, $|\vec{\alpha}|=|2\vec{\gamma}-\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2=|2\vec{\gamma}-\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2=(2\vec{\gamma}-\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2=4\vec{\gamma}^2-4\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2=4|\vec{\gamma}|^2-4\vec{\beta}\vec{\gamma}+|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1^2=4\cdot 2^2-4\vec{\beta}\vec{\gamma}+3^2 \Leftrightarrow 1=4\cdot 4-4\vec{\beta}\vec{\gamma}+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1=16-4\vec{\beta}\vec{\gamma}+9 \Leftrightarrow 4\vec{\beta}\vec{\gamma}=16+9-1 \Leftrightarrow 4\vec{\beta}\vec{\gamma}=24 \Leftrightarrow \vec{\beta}\vec{\gamma}=6$ (2)

Επισης, απο την σχεση $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}=\vec{0}$ παιρνουμε $\vec{\beta}=2\vec{\gamma}-\vec{\alpha}$
απο την οποια προκυπτει $|\vec{\beta}|=|2\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|$ και εργαζομαστε οπως προηγουμενως. Βρισκουμε $\cancel{\beta}\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=1$ (3)

Απο (1) − (2) + (3) $\Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=4-6+1=-1$

ii) Απο την σχεση $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}=\vec{0}$ προκυπτει οτι $\vec{\beta}=2\vec{\gamma}-\vec{\alpha}$

Αρα, $|\vec{\beta}|=|2\vec{\gamma}-\vec{\alpha}| \Leftrightarrow 3=|2\vec{\gamma}-\vec{\alpha}| \Leftrightarrow |2\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|=3 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}-2\vec{\gamma}|=3$

ii) Απο την σχεση $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}=\vec{0}$ προκυπτει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2\vec{\gamma}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αρα, } |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|2\vec{\gamma}| \\ \text{Ομως, } |2\vec{\gamma}|=|2|\,|\vec{\gamma}|=2\cdot|\vec{\gamma}|=2\cdot 2=4\end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=4 \quad (4)$$

Παρατηρουμε οτι $|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=1+3=4$

Αρα, απο την σχεση (4) επεται $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ (5)

Απο την σχεση (5) προκυπτει οτι $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

Συνεπως, υπαρχει $\lambda\in\mathbb{R}^{+}$ ωστε $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ (6)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Απο την σχεση (6) προκυπτει } |\vec{\alpha}|=|\lambda\vec{\beta}| \\ \text{Ομως, } |\lambda\vec{\beta}|=|\lambda|\cdot|\vec{\beta}|\end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{\alpha}|=|\lambda|\,|\vec{\beta}| \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow 1=|\lambda|\,3 \Leftrightarrow |\lambda|=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{1}{3} \\ \text{Ομως, } \lambda\in\mathbb{R}^{+}\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{3}$$

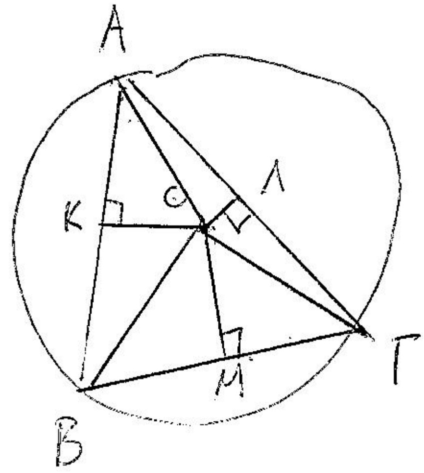
Αρα, $\vec{\alpha}=\frac{1}{3}\vec{\beta}$ ή $3\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\beta}=3\vec{\alpha}}$ (7)

Απο την υποθεση $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}=\vec{0}$ λογω της σχεσης (7) προκυ-
πτει η σχεση $\vec{\alpha}+3\vec{\alpha}-2\vec{\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}-2\vec{\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}=2\vec{\gamma}$

$\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}=\vec{\gamma} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}}$

ΘΕΜΑ Δ

i) Έστω Κ, Λ και Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ



Γνωρίζουμε ότι $\vec{OA}+\vec{OB}=2\vec{OK}$ (1)

$\vec{OA}+\vec{O\Gamma}=2\vec{O\Lambda}$ (2)

$\vec{OB}+\vec{O\Gamma}=2\vec{OM}$ (3)

Από την υπόθεση για το σημείο Η έχουμε $\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}$. Λόγω της σχέσης (3) παίρνουμε την σχέση $\vec{OH}=\vec{OA}+2\vec{OM} \Leftrightarrow \vec{OH}-\vec{OA}=2\vec{OM}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{OH}-\vec{OA}=2\vec{OM} \\ \text{Όμως, } \vec{OH}-\vec{OA}=\vec{AH}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{AH}=2\vec{OM} \quad (4)$$

Ομοίως, από την υπόθεση για το σημείο Η και τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε αντίστοιχα τις σχέσεις: $\vec{\Gamma H}=2\vec{OK}$ (5)

$\vec{BH}=2\vec{O\Lambda}$ (6)

Από τις σχέσεις (4), (5) και (6) προκύπτει ότι $\vec{AH}\parallel\vec{OM}$, $\vec{\Gamma H}\parallel\vec{OK}$ και $\vec{BH}\parallel\vec{O\Lambda}$

Από την Ευκλείδια Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι $(OM)\perp(B\Gamma)$ $(OK)\perp(AB)$ και $(O\Lambda)\perp(A\Gamma)$

Άρα, $\vec{OM}\perp\vec{B\Gamma}$ Αφού $\vec{AH}\parallel\vec{OM}$ και $\vec{OM}\perp\vec{B\Gamma}$ έπεται $\vec{AH}\perp\vec{B\Gamma}$

Ομοίως, $\vec{\Gamma H}\perp\vec{AB}$ και $\vec{BH}\perp\vec{A\Gamma}$

Συνεπώς, το σημείο Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ

ii) Έχουμε ότι $|\vec{OH}|=|\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}|=|(\vec{OA}+\vec{OB})+\vec{O\Gamma}|$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \text{Όμως, } |(\vec{OA}+\vec{OB})+\vec{O\Gamma}|\le|\vec{OA}+\vec{OB}|+|\vec{O\Gamma}|\le|\vec{OA}|+|\vec{OB}|+|\vec{O\Gamma}|\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow |\vec{OH}|\le|\vec{OA}|+|\vec{OB}|+|\vec{O\Gamma}| \Leftrightarrow |\vec{OH}|\le R+R+R \Leftrightarrow |\vec{OH}|\le 3R$ (7)

Επίσης, $|\overrightarrow{OH}| \geq 0$ (8)

Από τις σχέσεις (7) και (8) έπεται ότι $0 \leq |\overrightarrow{OH}| \leq 3R$

Αν $|\overrightarrow{OH}| = 0$ τότε $\overrightarrow{OH} = \vec{0}$ δηλ. $O \equiv H$

Από την Ευκλείδια Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι, όταν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ το ορθόκεντρο του τριγώνου και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου ταυτίζονται τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο

Συνεπώς, αν $|\overrightarrow{OH}| = 0$ τότε $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισόπλευρο

iii) Από την σχέση (4) προκύπτει: $|\overrightarrow{AH}| = |2\overrightarrow{OM}|$

Όμως, $|2\overrightarrow{OM}| = |2|\,|\overrightarrow{OM}| = 2|\overrightarrow{OM}|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AH}| = 2|\overrightarrow{OM}|$ (9)

Τώρα, το τρίγωνο $\overset{\triangle}{BO\Gamma}$ είναι ισοσκελές διότι $(OB) = (O\Gamma) = R$

Οπότε, η (ΟΜ) είναι διχοτόμος και ισχύει:

$$B\hat{O}M = M\hat{O}\Gamma = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2}$$

Όμως, $B\hat{O}\Gamma = 2\hat{A}$ διότι $B\hat{O}\Gamma$ και $\hat{A}$ είναι επίκεντρη και εγγεγραμμένη γωνία αντίστοιχα που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$. Άρα, $B\hat{O}M = M\hat{O}\Gamma = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{2\hat{A}}{2} = \hat{A}$

Επίσης, στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{BO\Gamma}$ η ΟΜ είναι ύψος

Συνεπώς, το τρίγωνο ΒΟΜ είναι ορθογώνιο με $\hat{M} = 90^{o}$

και ισχύει $\sigma\upsilon\nu(B\hat{O}M) = \frac{(OM)}{(OB)} \Leftrightarrow |\sigma\upsilon\nu\hat{A}| = \frac{|\overrightarrow{OM}|}{R} \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM}| = R|\sigma\upsilon\nu\hat{A}|$

Άρα, από την σχέση (9) παίρνουμε $|\overrightarrow{AH}| = 2R|\sigma\upsilon\nu\hat{A}|$

2ος τρόπος:

Από την σχέση $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}$ παίρνουμε $\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}$

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}$$

Άρα, $|\overrightarrow{AH}|^2=|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}|^2$

Όμως, $|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}|^2=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})^2=\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Gamma}^2=|\overrightarrow{OB}|^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}+$

$+|\overrightarrow{O\Gamma}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+2\cdot|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{O\Gamma}|\cdot\sigma\upsilon\nu(B\hat{O}\Gamma)+|\overrightarrow{O\Gamma}|^2=R^2+2RR\,\sigma\upsilon\nu 2\hat{A}+R^2=$

$=2R^2+2R^2\sigma\upsilon\nu 2\hat{A}=2R^2(1+\sigma\upsilon\nu 2\hat{A})=2R^2(\eta\mu^2\hat{A}+\sigma\upsilon\nu^2\hat{A}+\sigma\upsilon\nu^2\hat{A}-\eta\mu^2\hat{A}$

$=2R^2\cdot 2\sigma\upsilon\nu^2\hat{A}=4R^2\sigma\upsilon\nu^2\hat{A}=(2R\,\sigma\upsilon\nu\hat{A})^2$

Άρα, $|\overrightarrow{AH}|^2=(2R\,\sigma\upsilon\nu\hat{A})^2\Rightarrow\sqrt{|\overrightarrow{AH}|^2}=\sqrt{(2R\,\sigma\upsilon\nu\hat{A})^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow||\overrightarrow{AH}||=|2R\,\sigma\upsilon\nu\hat{A}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{AH}|=2R|\sigma\upsilon\nu\hat{A}|$

β) Από την σχέση

β) Απο την σχεση της υποθεσης για το σημειο Η παιρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma} \Leftrightarrow \vec{OH}-\vec{OA}=\vec{OB}+\vec{O\Gamma} \\ \text{Ομως, } \vec{OH}-\vec{OA}=\vec{AH}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{AH}=\vec{OB}+\vec{O\Gamma}$$

Αρα, $\vec{AH}\cdot\vec{AO}=\vec{AO}\cdot\vec{AH}=(-\vec{OA})(\vec{OB}+\vec{O\Gamma})=-\vec{OA}\cdot\vec{OB}-\vec{OA}\cdot\vec{O\Gamma}=-|\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|συν(\widehat{\vec{OA},\vec{OB}})$

$-|\vec{OA}||\vec{OB}|συν(\widehat{\vec{OA},\vec{O\Gamma}})=-R\cdot R\,συν(B\hat{O}A)-R\cdot R\,συν(\Gamma\hat{O}A)=-R^2συν2\hat{\Gamma}-R^2συν2\hat{B}$

$=-R^2(συν2\hat{\Gamma}+συν2\hat{B})=-R^2(1-2ημ^2\hat{\Gamma}+1-2ημ^2\hat{B})=-R^2(2-2ημ^2\hat{\Gamma}-2ημ^2$

$=R^2(-2+2ημ^2\hat{\Gamma}+2ημ^2\hat{B})=-2R^2(1-ημ^2\hat{\Gamma}-ημ^2\hat{B})=-2R^2(1-ημ^2\hat{\Gamma}-ημ^2\hat{B}+$

$+ημ^2\hat{B}ημ^2\hat{\Gamma}-ημ^2\hat{B}ημ^2\hat{\Gamma})=-2R^2((1-ημ^2\hat{\Gamma})(1-ημ^2\hat{B})-ημ^2\hat{B}ημ^2\hat{\Gamma})=$

$=-2R^2(συν^2\hat{\Gamma}\cdotσυν^2\hat{B}-ημ^2\hat{B}ημ^2\hat{\Gamma})=-2R^2(συν^2\hat{\Gamma}συν^2\hat{B}-ημ^2\hat{\Gamma}\cdotημ^2\hat{B})=$

$=-2R^2((συν\hat{\Gamma}συν\hat{B}+ημ\hat{\Gamma}ημ\hat{B})(συν\hat{\Gamma}συν\hat{B}-ημ\hat{\Gamma}\cdotημ\hat{B}))=-2R^2(συν(\hat{\Gamma}-\hat{B})\cdotσυν(\hat{\Gamma}+\hat{B})$

$=-2R^2(συν(-(\hat{B}-\hat{\Gamma}))\cdotσυν(180^\circ-\hat{A}))=-2R^2(συν(\hat{B}-\hat{\Gamma})\cdot(-συν\hat{A}))=$

$=2R^2συν(B-\Gamma)\,συνA$

γ) Εχουμε οτι $|\vec{OH}|=|\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}|\Leftrightarrow|\vec{OH}|^2=|\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}|^2\Leftrightarrow|\vec{OH}|^2=(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma})$

$\Leftrightarrow|\vec{OH}|^2=\vec{OA}^2+\vec{OB}^2+\vec{O\Gamma}^2+2\vec{OA}\vec{OB}+2\vec{OA}\vec{O\Gamma}+2\vec{OB}\vec{O\Gamma}$

$\Leftrightarrow|\vec{OH}|^2=|\vec{OA}|^2+|\vec{OB}|^2+|\vec{O\Gamma}|^2+2|\vec{OA}||\vec{OB}|συν(\vec{OA},\vec{OB})+2|\vec{OA}||\vec{O\Gamma}|συν(\vec{OA},\vec{O\Gamma})+$

$2|\vec{OB}||\vec{O\Gamma}|συν(\vec{OB},\vec{O\Gamma})=R^2+R^2+R^2+2R\cdot Rσυν2\Gamma+2RR\cdotσυν2\hat{B}+2RRσυν2A$

$=3R^2+2R^2συν2\Gamma+2R^2συν2B+2R^2συν2A=R^2(3+2συν2\hat{\Gamma}+2συν2\hat{B}+2συν2\hat{A})$

$$= R^2\left(3+2\left(\text{συν}2\Gamma+\text{συν}2B+\text{συν}2A\right)\right) = R^2\left(3+2\left(-1-4\,\text{συν}A\cdot\text{συν}B\cdot\text{συν}\Gamma\right)\right)$$

$$= R^2\left(3-2-8\,\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma\right) = R^2\cdot\left(1-8\,\text{συν}A\cdot\text{συν}B\cdot\text{συν}\Gamma\right))$$

Άρα, $|\overrightarrow{OH}| = R^2\left(1-8\left(\text{συν}A\,\text{συν}B\cdot\text{συν}\Gamma\right)\right)$

Αφού $|\overrightarrow{OH}| \geq 0$ τότε $R^2\left(1-8\,\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma\right) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1-8\,\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma \geq 0 \Leftrightarrow \text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma \leq \frac{1}{8}$$