

Τρίτη 17 Δεκεμβρίου 2019

Εξεταζόμενο μάθημα

Μαθηματικά προσανατολισμού

Θετικών και Οικονομικών σπουδών

Β Τάξης Γενικού Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ Α

I. Έστω $\vec{\alpha} = (\kappa, \lambda)$ ένα διάνυσμα του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}$

Μονάδες 6

II. Να διατυπώσετε τον ορισμό του γινομένου αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ με ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$

Μονάδες 5

III. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές γράφοντας την ένδειξη Σ ή λανθασμένες με την ένδειξη Λ

a) Αν $\vec{\alpha}$ τότε το διάνυσμα $\vec{\beta} = -\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}$ έχει μέτρο -1

b) Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ με τετμημένη $\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|$ τότε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σχηματίζει με τον άξονα

$x'x$ γωνία $\frac{\pi}{6}$

Μονάδες 14

ΘΕΜΑ Β

Στο σύστημα αναφοράς Οxy θεωρούμε τα σημεία Α(3,2), Β(1,0) και Γ(0,4). Η ΑΓ τέμνει τον άξονα Οx στο Δ και η ΑΒ τον άξονα Οy' στο σημείο Ε

I. Να βρείτε την τετμημένη του Δ και την πεταγμένη του Ε

Μονάδες 8

II. Αν Ι το μέσο του ΟΑ, Μ το μέσο του ΒΓ και Κ το μέσο του ΕΔ να αποδείξετε ότι τα σημεία Ι, Μ και Κ είναι συνευθειακά

Μονάδες 8

III. Να προσδιορίσετε σημείο M_1 του επιπέδου ώστε

$$\overrightarrow{M_1A} + 2\overrightarrow{M_1B} + (\kappa - 3)\overrightarrow{M_1\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R} \text{ με } \kappa \neq 0$$

Να προσδιορίσετε τον αριθμό κ στην περίπτωση που το σημείο M_1 ταυτίζεται με το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Αν $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=3, |\vec{\gamma}|=2$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 2\vec{\gamma} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι

I. $\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\alpha}\vec{\gamma} = -1$

Μονάδες 10

II. $\vec{\beta} = 3\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha}$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $B > \Gamma$ και έστω O το κέντρο του περιγεγραμμένου του κύκλου ακτίνας R. Αν H το σημείο του επιπέδου που ορίζεται από την σχέση $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OG}$ τότε

I. Να αποδείξετε ότι το σημείο H είναι το ορθόκентρο του τριγώνου ABΓ

Μονάδες 5

II. Να βρείτε ανάμεσα σε ποιες τιμές μεταβάλλεται το μέτρο του διανύσματος \vec{OH}
Ποιο είναι το συμπέρασμά σας όταν το μέτρο του διανύσματος \vec{OH} παίρνει την μικρότερη τιμή;

Μονάδες 4

III. Να αποδείξετε ότι

a) $|\vec{AH}| = 2R|\sin A|$

b) $\vec{AH} \cdot \vec{AO} = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin(B - \Gamma)$

Μονάδες 9

IV. Αν επιπλέον ισχύει $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2\Gamma = -1 - 4\sin A \sin B \sin \Gamma$ να εκφράσετε το μέτρο του διανύσματος \vec{OH} συναρτήσει των γωνιών του τριγώνου ABΓ και της ακτίνας R του περιγεγραμμένου του κύκλου και να αποδείξετε ότι

$$\sin A \sin B \sin \Gamma \leq \frac{1}{8}$$

Μονάδες 7

Καλή επιτυχία!!!

Οι τετράδες ήταν έργο του Hamilton... και αποδείχτηκαν ένα σκέτο βάσανο για όσους τις ακούμπησαν με οποιονδήποτε τρόπο. Το διάνυσμα είναι ένα άχρηστο απομεινάρι τους... και δεν έχει φανεί ποτέ χρήσιμο, έστω και στο παραμικρό, σε κανένα πλάσμα.

Lord Kelvin