ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Συγγραφέας: Σωτήριος Περσίδης

Εκδότης: ΕΣΠΙ ΕΚΔΟΤΙΚΗ

Το **Μαθηματικό Τυπολόγιο** που ακολουθεί βρίσκεται ακόμη στο στάδιο της συγγραφής (έντυπης και ηλεκτρονικής). Στόχος είναι η δημιουργία του καλύτερου **Μαθηματικού Τυπολόγιου** σε παγκόσμια κλίμακα (για φοιτητές και επαγγελματίες μαθηματικούς, φυσικούς, μηχανικούς, κτλ.) τόσο σε περιεχόμενο όσο και εμφάνιση, προσιτού σε όγκο και τιμή από όλους, και τελικά η έκδοσή του σε πολλές γλώσσες. Για το λόγο αυτό η βοήθεια του κάθε αναγνώστη σε αυτό το στάδιο είναι πολύτιμη. Τίθενται τα ερωτήματα:

1) Είναι η επιλογή της ύλης σωστή και πλήρης ή μήπως πρέπει κάτι να προστεθεί ή να αφαιρεθεί;

2) Υπάρχει κάτι που πρέπει να τροποποιηθεί (ορισμός, τύπος, κτλ.);

3) Υπάρχει οποιαδήποτε άλλη παρατήρηση για βελτίωση;

Τα όποια σχόλια μπορούν να σταλούν με e-mail με την ένδειξη “Για το Μαθηματικό Τυπολόγιο” σε μια από τις διευθύνσεις

mathbook@ifoes.org ή spersid@espi.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΣΤΑΘΕΡΕΣ

1.1 Μαθηματικές Σταθερές

$\sqrt{2} = 1.41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16887\ 2421\ \ldots$

$\sqrt{3} = 1.73205\ 08075\ 68877\ 29352\ 74463\ 4151\ \ldots$

$\sqrt{5} = 2.23606\ 79774\ 99789\ 69640\ 91736\ 6873\ \ldots$

$\sqrt{6} = 2.44948\ 97427\ 83178\ 09819\ 72840\ 7471\ \ldots$

$\sqrt{7} = 2.64575\ 13110\ 64590\ 59050\ 16157\ 5364\ \ldots$

$\sqrt{8} = 2.82842\ 71247\ 46190\ 09760\ 33774\ 4842\ \ldots$

$\sqrt{10} = 3.16227\ 76601\ 68379\ 33199\ 88935\ 4443\ \ldots$

$\sqrt[3]{2} = 1.25992\ 10498\ 94873\ 16476\ 72106\ 0728\ \ldots$

$\sqrt[3]{3} = 1.44224\ 95703\ 07408\ 38232\ 16383\ 1078\ \ldots$

$\sqrt[5]{2} = 1.14869\ 83549\ 97035\ 00679\ 86269\ 4678\ \ldots$

$\sqrt[5]{3} = 1.24573\ 09396\ 15517\ 32596\ 66803\ 3664\ \ldots$

Τα παρακάτω τετραγωνάκια (που υπάρχουν μόνο στα Κεφ. 1 και 2) είναι links που θα ενεργοποιηθούν.

ÕÐÏ

$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 8328\ \ldots$

$\pi^2 = 9.86960\ 44010\ 89358\ 61883\ 44909\ 9988\ \ldots$

$\pi^{-1} = 0.31830\ 98861\ 83790\ 67153\ 77675\ 26745\ \ldots$

$\sqrt{\pi} = 1.77245\ 38509\ 05516\ 02729\ 81674\ 8334\ \ldots$

$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 028747135\ \ldots$ [βάση φυσικών λογαρίθμων] ÐËÇ

$e^2 = 7.38905\ 60989\ 30650\ 22723\ 04274\ 6058\ \ldots$

$\sqrt{e} = 1.64872\ 12707\ 00128\ 14684\ 86507\ 8781\ \ldots$

$e^{\pi} = 23.14069\ 26327\ 79269\ 00572\ 90863\ 679\ \ldots$

$\pi^{e} = 22.45915\ 77183\ 61045\ 47342\ 71522\ 045\ \ldots$

$e^{e} = 15.15426\ 22414\ 79264\ 18976\ 04302\ 726\ \ldots$

$\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ \ldots$ [σταθερή του Euler]

$e^{\gamma} = 1.78107\ 24179\ 90197\ 98523\ 65041\ 0311\ \ldots$

$\log_{10}2 = 0.30102\ 99956\ 63981\ 19521\ 37388\ 94724\ \ldots$

$\log_{10}3 = 0.47712\ 12547\ 19662\ 43729\ 50279\ 03255\ \ldots$

$\log_{10}\pi = 0.49714\ 98726\ 94133\ 85435\ 12682\ 88291\ \ldots$

$\log_{10}e = 0.43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 112891\ 8917\ \ldots$

$\log_{e}2 = \ln 2 = 0.69314\ 71805\ 59945\ 30941\ 72321\ 21458\ \ldots$

$\log_{e}3 = \ln 3 = 1.09861\ 22886\ 68109\ 69139\ 52452\ 3692\ \ldots$

$\log_{e}10 = \ln 10 = 2.30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\ 5468\ \ldots$

$\log_{e}\pi = \ln\pi = 1.14472\ 98858\ 49400\ 17414\ 34273\ 5135\ \ldots$

$\log_{e}\gamma = \ln\gamma = -0.54953\ 93129\ 81644\ 82233\ 7661768803\ \ldots$

$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} = 1.77245\ 38509\ 05516\ 02729\ 81674\ 8334\ldots$ [$\Gamma(x)$ η συνάρτηση γάμα]

$\Gamma(\tfrac{1}{3}) = 2.67893\ 85347\ 07747\ 63365\ 56929\ 4097\ \ldots$

$\Gamma(\tfrac{1}{4}) = 3.62560\ 99082\ 21908\ 31193\ 06851\ 5587\ \ldots$

1 ακτίνιο $= 180°/\pi = 57.29577\ 95130\ 8232\ \ldots°$

$1° = \pi/180$ ακτίνια $= 0.01745\ 32925\ 19943\ 29576\ \ldots$ ακτίνια

1.2 Φυσικές Σταθερές

Ταχύτητα του φωτός (στο κενό)	$c = 299\,792\,458\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
Μαγνητική διαπερατότητα κενού	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N\,A^{-2}}$
Διηλεκτρική σταθερή κενού	$\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}$
Σταθερή του Faraday	$F = 96485.3\ \mathrm{C\,mol^{-1}}$
Σταθερή βαρύτητας	$G = 6.6726 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^{-3}kg^{-1}s^{-2}}$
Σταθερή του Planck	$h = 6.626075 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$ $= 4.13567 \times 10^{-15}\ \mathrm{eV\,s}$ $\hbar = h/2\pi = 1.054572 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$ $= 6.582122 \times 10^{-16}\ \mathrm{eV s}$

Σταθερή του Boltzmann	$k_B = 1.38066 \times 10^{23}\ \mathrm{J K^{-1}}$ $= 8.61739 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV K^{-1}}$
Σταθερή των Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5.67032 \times 10^{-8}\ \mathrm{W m^{-2} K^{-4}}$
Μοριακή σταθερή τέλειων αερίων	$R = 8.31451\ \mathrm{J mol^{-1} K^{-1}}$
Σταθερή του Rydberg	$R_\infty = 10973731.571\ \mathrm{m^{-1}}$
Φορτίο πρωτονίου	$e = 1.602177 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
Μάζα ηλεκτρονίου	$m_e = 9.109389 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Μάζα πρωτονίου	$m_p = 1{,}672623 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Μάζα νετρονίου	$m_n = 1.674928 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Κλασική ακτίνα ηλεκτρονίου	$r_e = 2.817940 \times 10^{-15}\ \mathrm{m}$
Μαγνητική ροπή ηλεκτρονίου	$\mu_e = 1.00115965219 \mu_B$
Μαγνητική ροπή πρωτονίου	$\mu_p = 2.7928474 \mu_N$
Μαγνητική ροπή νετρονίου	$\mu_n = 1.913043 \mu_N$
Ακτίνα του Bohr	$a_B = 0.5291772 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}$
Μαγνητόνη του Bohr	$\mu_B = 9.27401 \times 10^{-24}\ \mathrm{J T^{-1}}$ $= 5.788382 \times 10^{-9}\ \mathrm{eV G^{-1}}$
Πυρηνική μαγνητόνη	$\mu_N = 5.05078 \times 10^{-27}\ \mathrm{J T^{-1}}$ $= 3.152451 \times 10^{-12}\ \mathrm{eV G^{-1}}$
Μήκος κύματος Compton ηλεκτρονίου	$\lambda_C = 2.426310 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}$
Μήκος κύματος Compton πρωτονίου	$\lambda_{Cp} = 1.321410 \times 10^{-15}\ \mathrm{m}$
Μήκος κύματος Compton νετρονίου	$\lambda_{Cn} = 1.3195909 \times 10^{-15}\ \mathrm{m}$?
Λόγος μαζών πρωτονίου και ηλεκτρονίου	$m_p/m_e = 1836.1527$
Λόγος φορτίου προς μάζα ηλεκτρονίου	$e/m_e = 1.758796\ \ 10^{11}\ \mathrm{C kg^{-1}}$
Λόγος (ατομική μάζα)/(μάζα ηλεκτρονίου)	$m_u/m_e = 1822.888$
Ατομική μάζα	$m_u = 1.660540 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Αριθμός του Avogadro	$N_A = 6.022137 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Κβάντο μαγνητικής ροής	$\Phi_0 = 2.067834 \times 10^{-15}\ \mathrm{Wb}$
Σταθερή λεπτής υφής	$\alpha = 1/137.0360$
Κβαντική αντίσταση Hall	$R_H = 25812.81\ \Omega$

2 ΑΛΓΕΒΡΑ

2.1 Ταυτότητες

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$
$$(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$x^4 + y^4 = (x^2 - \sqrt{2}\,xy + y^2)(x^2 + \sqrt{2}\,xy + y^2)$$

$$(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$
$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$
$$(x-y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$$
$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

$$x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$
$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$
$$x^6 - y^6 = (x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$$

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = (x+y)(x^2+y^2)$$
$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2-xy+y^2)\,(x^2+xy+y^2)$$
$$x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5 = (x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$
$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3y^2z + 3yz^2 + 3z^2x + 3zx^2 + 6xyz$$
$$(x+y+z+w)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2xz + 2xw + 2yz + 2yw + 2zw$$

Για ακέραιο θετικό n έχουμε

$$x^{2n} - y^{2n} = (x^2-y^2)(x^{2n-2} + x^{2n-4}y^2 + x^{2n-6}y^4 + \ldots + x^2y^{2n-4} + y^{2n-2})$$
$$= (x^2-y^2)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2xy\cos\frac{k\pi}{n} + y^2\right)$$

$$x^{2n}+y^{2n} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2+2xy\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+y^2\right)$$

$$\begin{aligned} x^{2n+1}-y^{2n+1} &= (x-y)(x^{2n}+x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2+\ldots+y^{2n}) \\ &= (x-y)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2xy\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+y^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{2n+1}+y^{2n+1} &= (x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2-\ldots+y^{2n}) \\ &= (x+y)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2+2xy\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+y^2\right) \end{aligned}$$

2.2 Τύπος του Διώνυμου

Για $n = 1, 2, 3, \ldots$ ισχύει ο *τύπος του διώνυμου*

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots + y^n$$

ή $$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

(Βλέπε και *Διωνυμική σειρά*)

Οι *διωνυμικοί συντελεστές* ορίζονται με τη σχέση

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

όπου n, k ακέραιοι με $0 \le k \le n$, $0! = 1$ και $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n$.

Ιδιότητες των Διωνυμικών Συντελεστών

$$\binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{m}{n}=\binom{m+1}{n+1} \qquad [m\ge n]$$

$$\binom{m}{n}-\binom{m}{n+1}+\binom{m}{n+2}-\binom{m}{n+3}+\cdots+(-1)^{m+n}\binom{m}{m}=\binom{m-1}{n-1} \qquad [m\ge n]$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$$

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

$$\binom{m}{0}\binom{n}{p}+\binom{m}{1}\binom{n}{p-1}+\cdots+\binom{m}{p}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{p}$$

$$1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+3\cdot\binom{n}{3}+\cdots+n\cdot\binom{n}{n}=n\,2^{n-1}$$

$$1\cdot\binom{n}{1}-2\cdot\binom{n}{2}+3\cdot\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}n\cdot\binom{n}{n}=0$$

Πίνακας Διωνυμικών Συντελεστών

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

2.3 Μιγαδικοί Αριθμοί

Αν a, b πραγματικοί αριθμοί και $i = \sqrt{-1}$ η *φανταστική μονάδα*, ο $z = a + bi$ είναι ένας *μιγαδικός αριθμός*. Ο *συζυγής μιγαδικός* του $a + bi$ είναι ο $a - bi$. Το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος του $a + ib$ είναι αντίστοιχα $\text{Re}(z) = a$ και $\text{Im}(z) = b$.

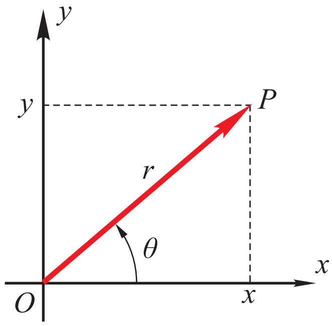
Μιγαδικό επίπεδο

Ο μιγαδικός αριθμός $x + yi$ παριστάνεται από ένα σημείο P με τετμημένη x και τεταγμένη y.

Αν $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι το μήκος του διανύσματος **OP**, τότε η *πολική μορφή* του μιγαδικού αριθμού είναι

$$x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

όπου r το *μέτρο* ή η *απόλυτη τιμή* και θ η *γωνία* ή το *όρισμα* του μιγαδικού αριθμού.



Σχ. 2-1

Πράξεις

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$[r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)] = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Θεώρημα του de Moivre

Αν p πραγματικός αριθμός, τότε

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^p = r^p(\cos p\theta + i\sin p\theta)$$

Ρίζες

Αν n θετικός ακέραιος, τότε οι ρίζες n-στής τάξης του μιγαδικού αριθμού είναι

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{1/n} = r^{1/n}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$$

όπου $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$.

2.4 Δυνάμεις και Λογάριθμοι

Δυνάμεις

Για πραγματικούς a, b, p, q ισχύουν οι εξής σχέσεις (με την προϋπόθεση ότι κάθε όρος έχει νόημα και οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός):

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \qquad a^p / a^q = a^{p-q},$$

$$(a^p)^q = a^{pq}, \qquad a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p},$$

$$a^0 = 1 \ \ (a \neq 0), \qquad a^{-p} = \frac{1}{a^p},$$

$$(ab)^p = a^p b^p, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p},$$

$$\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b}, \qquad \sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$$

Λογάριθμοι

Έστω c θετικός αριθμός διάφορος του 1. Αν $c^x = A$ (A θετικός), τότε ο εκθέτης x καλείται *λογάριθμος* του A με *βάση* το c και συμβολίζεται με $x = \log_c A$.

Αν $c = 10$, έχουμε τους *δεκαδικούς* λογάριθμους. Αν $c = e = 2.71828\ldots$, έχουμε τους *φυσικούς* λογάριθμους, που συμβολίζονται με ln.

$$\log_c c^x = x \qquad \log_c A \cdot B = \log_c A + \log_c B$$

$$(\log_c b)(\log_b c) = 1 \qquad \log_c \frac{A}{B} = \log_c A - \log_c B$$

$$\log_c c = 1, \quad \log_c 1 = 0 \qquad \log_c A^p = p \log_c A$$

Αλλαγή βάσης

$$\log_c A = \frac{\log_b A}{\log_b c} = \log_c b \cdot \log_b A$$

$$\ln A = \ln 10 \cdot \log_{10} A = 2.302585\ldots \cdot \log_{10} A$$

$$\log_{10} A = \log_{10} e \cdot \ln A = 0.434294\ldots \cdot \ln A$$

Με μιγαδικούς αριθμούς

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $\qquad$ $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ $\qquad$ $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$ $\quad$ (k = ακέραιος, περιοδικότητα)

$a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

$(re^{i\theta})(qe^{i\varphi}) = rqe^{i(\theta+\varphi)}$ $\qquad$ $\dfrac{re^{i\theta}}{qe^{i\varphi}} = \dfrac{r}{q}e^{i(\theta-\varphi)}$

$(re^{i\theta})^p = r^p e^{ip\theta}$ $\quad$ (θεώρημα του de Moivre)

$\ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta + 2k\pi i$ $\quad$ (k = ακέραιος)

2.5 Ρίζες Αλγεβρικών Εξισώσεων

Εξίσωση πρώτου βαθμού

$$ax + b = 0$$

Αν $a \neq 0$, υπάρχει *μία* ρίζα, $x = -\dfrac{b}{a}$.

Αν $a = 0$ και $b \neq 0$, δεν υπάρχει ρίζα.

Αν $a = 0$ και $b = 0$, κάθε αριθμός είναι ρίζα.

Εξίσωση δεύτερου βαθμού

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a,\ b,\ c \text{ πραγματικοί, } a \neq 0)$$

Διακρίνουσα: $D = b^2 - 4ac$

Ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Αν $D > 0$, έχουμε δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Αν $D = 0$, έχουμε δύο πραγματικές και ίσες ρίζες.

Αν $D < 0$, έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

Σχέσεις μεταξύ ριζών

Άθροισμα ριζών: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

Γινόμενο ριζών: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Εξίσωση τρίτου βαθμού

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Έστω $$p = \frac{3b - a^2}{9}, \qquad q = \frac{9ab - 27c - 2a^3}{54}$$

$$A = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}, \qquad B = \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$$

Ρίζες $$\begin{cases} x_1 = A + B - \frac{1}{3}a \\ x_2 = -\frac{1}{2}(A+B) - \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(A-B) \\ x_3 = -\frac{1}{2}(A+B) - \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(A-B) \end{cases}$$

Αν a, b, c είναι πραγματικοί και $D = p^3 + q^2$ η διακρίνουσα, τότε

(i) μία ρίζα είναι πραγματική και δύο μιγαδικές, εάν $D > 0$,

(ii) όλες οι ρίζες είναι πραγματικές και τουλάχιστον δύο είναι ίσες, εάν $D = 0$,

(iii) όλες οι ρίζες είναι πραγματικές και άνισες, εάν $D < 0$.

Εάν $D < 0$, οι υπολογισμοί απλουστεύονται.

Ρίζες για $D < 0$: $$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{1}{3}\theta\right) - \frac{1}{3}a \\ x_2 = 2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{1}{3}\theta + 120°\right) - \frac{1}{3}a \\ x_3 = 2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{1}{3}\theta + 240°\right) - \frac{1}{3}a \end{cases} \qquad \text{όπου} \quad \cos\theta = \frac{q}{\sqrt{-p^3}}$$

Σχέσεις μεταξύ ριζών

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b,$$
$$x_1x_2x_3 = -c,$$

όπου x_1, x_2, x_3 είναι οι τρεις ρίζες.

Εξίσωση τέταρτου βαθμού

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad \text{(i)}$$

Ρίζες

Αν y είναι μια πραγματική ρίζα της τριτοβάθμιας εξίσωσης

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + (4bd - c^2 - a^2d) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

τότε οι 4 ρίζες της (i) είναι ρίζες των δύο δευτεροβάθμιων εξισώσεων

$$z^2 + \frac{1}{2}\left\{a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 4y}\right\}z + \frac{1}{2}\left\{y \mp \sqrt{y^2 - 4d}\right\} = 0 \qquad \text{(iii)}$$

Εάν όλες οι ρίζες της (ii) είναι πραγματικές, ο υπολογισμός απλοποιείται, εάν χρησιμοποιήσουμε εκείνη τη ρίζα που δίνει πραγματικούς συντελεστές για τη δευτεροβάθμια εξίσωση (iii).

Σχέσεις μεταξύ ριζών

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = -a \\
&x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 + x_1x_3 + x_2x_4 = b \\
&x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 = -c \\
&x_1x_2x_3x_4 = d
\end{aligned}$$

όπου x_1, x_2, x_3, x_4 είναι οι τέσσερις ρίζες.

2.6 Υπερβολικές Συναρτήσεις

Ορισμοί

Υπερβολικό ημίτονο $\quad \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Υπερβολικό συνημίτονο $\quad \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Υπερβολική εφαπτόμενη $\quad \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Υπερβολική συνεφαπτόμενη $\quad \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Η τέμνουσα sech$x$ = 1/cosh$x$ και η συντέμνουσα csch$x$ = 1/sinh$x$ δε χρησιμοποιούνται συχνά.

Ταυτότητες

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\sinh x + \cosh x = \dfrac{1}{\cosh x - \sinh x}$

$(\sinh x + \cosh x)^n = \sinh nx + \cosh nx$

$\sinh(-x) = -\sinh x$

$\cosh(-x) = \cosh x$

$\tanh(-x) = -\tanh x$

$\coth(-x) = -\coth x$

$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$

$\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$

$\coth 2x = \dfrac{\coth^2 x + 1}{2\coth x}$

$\sinh 3x = 3\sinh x + 4\sinh^3 x$

$\cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x$

$\tanh 3x = \dfrac{3\tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3\tanh^2 x}$

$\coth 3x = \dfrac{\coth^3 x + 3\coth x}{3\coth^2 x + 1}$

$\sinh 4x = 8\sinh^3 x \cosh x + 4\sinh x \cosh x$

$\cosh 4x = 8\cosh^4 x - 8\cosh^2 x + 1$

$\tanh 4x = \dfrac{4\tanh x + 4\tanh^3 x}{1 + 6\tanh^2 x + \tanh^4 x}$

$\tanh x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{\sinh 2x} = \dfrac{\sinh 2x}{\cosh 2x + 1}$

$\sinh^2 x = \frac{1}{2}\cosh 2x - \frac{1}{2}$

$\cosh^2 x = \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{2}$

$\sinh^3 x = \frac{1}{4}\sinh 3x - \frac{3}{4}\sinh x$

$\cosh^3 x = \frac{1}{4}\cosh 3x + \frac{3}{4}\cosh x$

$\sinh^4 x = \frac{1}{8}\cosh 4x - \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{3}{8}$

$\cosh^4 x = \frac{1}{8}\cosh 4x + \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{3}{8}$

$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

$$\coth(x \pm y) = \frac{\coth x \coth y \pm 1}{\coth y \pm \coth x}$$

$\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{1}{2}(x + y)\cosh\frac{1}{2}(x - y)$

$\sinh x - \sinh y = 2\cosh\frac{1}{2}(x + y)\sinh\frac{1}{2}(x - y)$

$\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{1}{2}(x + y)\cosh\frac{1}{2}(x - y)$

$\cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{1}{2}(x + y)\sinh\frac{1}{2}(x - y)$

$$\tanh x \pm \tanh y = \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh x \cosh y}$$

$\sinh^2 x - \sinh^2 y = \sinh(x + y)\sinh(x - y)$

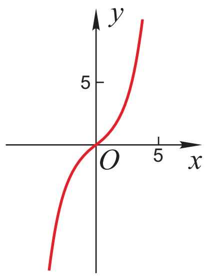
$\sinh^2 x + \cosh^2 y = \cosh(x + y)\cosh(x - y)$

$\sinh x \sinh y = \frac{1}{2}\{\cosh(x + y) - \cosh(x - y)\}$

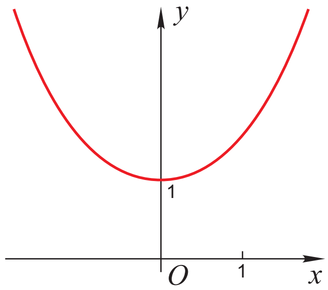
$\cosh x \cosh y = \frac{1}{2}\{\cosh(x + y) + \cosh(x - y)\}$

$\sinh x \cosh y = \frac{1}{2}\{\sinh(x + y) + \sinh(x - y)\}$

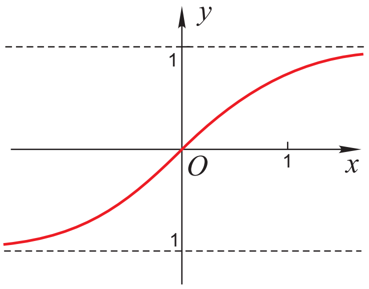
Γραφικές παραστάσεις



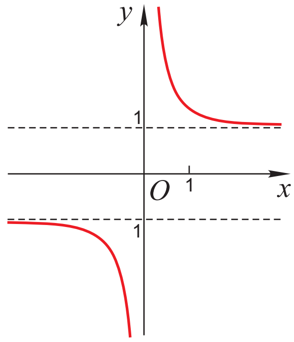
Σχ. 2-2 $y = \sinh x$



Σχ. 2-3 $y = \cosh x$



Σχ. 2-4 $y = \tanh x$



Σχ. 2-5 $y = \coth x$

Σχέσεις με τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$\sin(ix) = i\sinh x \qquad \cos(ix) = \cosh x$

$\tan(ix) = i\tanh x \qquad \cot(ix) = -i\coth x$

$\sinh(ix) = i\sin x \qquad \cosh(ix) = \cos x$

$\tanh(ix) = i\tan x \qquad \coth(ix) = -i\cot x$

$$\sinh(x \pm iy) = \sinh x\cos y \pm i\cosh x\sin y$$

$$\cosh(x \pm iy) = \cosh x\cos y \pm i\sinh x\sin y$$

$$\tanh(x \pm iy) = \frac{\sinh 2x \pm i\sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$$

$$\coth(x \pm iy) = \frac{\sinh 2x \mp i\sin 2y}{\cosh 2x - \cos 2y}$$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Αν $x = \sinh y$, τότε η *αντίστροφη* συνάρτηση συμβολίζεται με $y = \sinh^{-1} x$. Όμοια για τις άλλες υπερβολικές συναρτήσεις.

Με το συμβολισμό αυτό νοούνται οι πρωτεύοντες κλάδοι, που εκφράζονται με λογαρίθμους ως εξής:

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad x \geq 1 \quad [\cosh^{-1} x > 0 \text{ είναι η πρωτεύουσα τιμή}]$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad x < -1 \text{ ή } x > 1$$

Ιδιότητες

$\sinh^{-1}(-x) = -\sinh^{-1} x$

$\cosh^{-1}(-x) = \cosh^{-1} x$

$\tanh^{-1}(-x) = -\tanh^{-1} x$

$\coth^{-1}(-x) = -\coth^{-1} x$

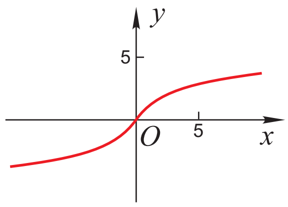
$\coth^{-1} x = \tanh^{-1}(1/x)$

Για k ακέραιο

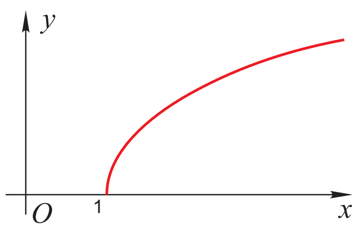
$\sinh(x + 2k\pi i) = \sinh x \qquad \cosh(x + 2k\pi i) = \cosh x$

$\tanh(x + k\pi i) = \tanh x \qquad \coth(x + k\pi i) = \coth x$

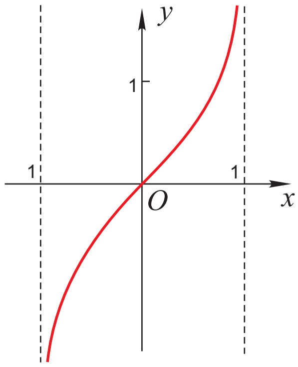
Γραφικές Παραστάσεις



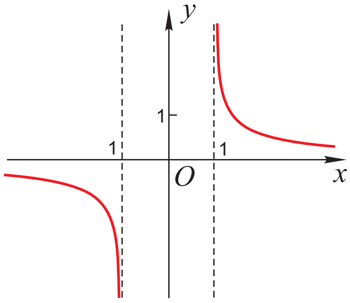
Σχ. 2-6 $\quad y = \sinh^{-1} x$



Σχ. 2-7 $\quad y = \cosh^{-1} x$



Σχ. 2-8 $y = \tanh^{-1} x$



Σχ. 2-9 $y = \coth^{-1} x$

Σχέσεις με αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$\sin^{-1}(ix) = i\sinh^{-1} x$ $\qquad$ $\sinh^{-1}(ix) = i\sin^{-1} x$

$\cos^{-1} x = \pm i\cosh^{-1} x$ $\qquad$ $\cosh^{-1} x = \pm i\cos^{-1} x$

$\tan^{-1}(ix) = i\tanh^{-1} x$ $\qquad$ $\tanh^{-1}(ix) = i\tan^{-1} x$

$\cot^{-1}(ix) = -i\coth^{-1} x$ $\qquad$ $\coth^{-1}(ix) = -i\cot^{-1} x$

3 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.1 Ορισμοί

Το τρίγωνο ABC έχει ορθή γωνία (90°) στο C. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας A ορίζονται ως εξής:

Ημίτονο $\sin B = \dfrac{b}{a}$

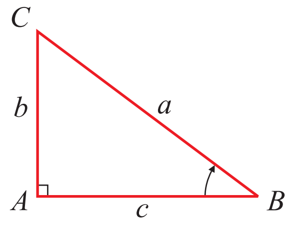
Συνημίτονο $\cos B = \dfrac{c}{a}$

Εφαπτόμενη $\tan B = \dfrac{b}{c}$

Συνεφαπτόμενη $\cot B = \dfrac{c}{b}$

Τέμνουσα $\sec B = \dfrac{a}{c}$

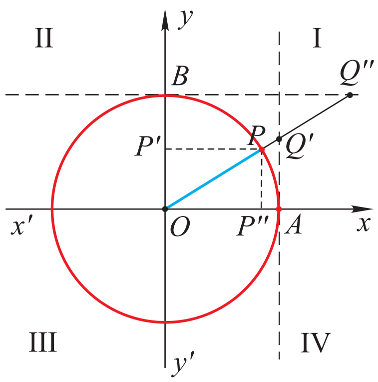
Συντέμνουσα $\csc B = \dfrac{a}{b}$



Σχ. 3-1

Τριγωνομετρικός κύκλος

Σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων (Σχ. 3-2) οι άξονες έχουν θετικές κατευθύνσεις από x' προς x και από y' προς y. Ο κύκλος με κέντρο το O και ακτίνα 1 καλείται *τριγωνομετρικός κύκλος*. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου $\tau = \overset{\frown}{AP}$ ορίζονται από τις συντεταγμένες x και y του σημείου P ως εξής:



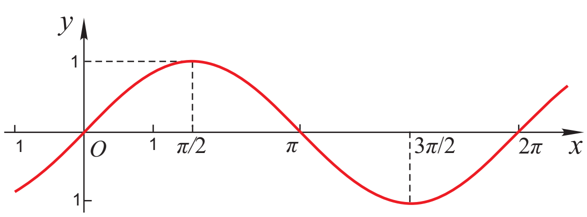
Σχ. 3-2

Ημίτονο	$\sin\tau = OP' = y$	$-1 \le \sin\tau \le 1$
Συνημίτονο	$\cos\tau = OP'' = x$	$-1 \le \cos\tau \le 1$
Εφαπτόμενη	$\tan\tau = AQ' = \dfrac{y}{x}$	$-\infty < \tan\tau < +\infty$
Συνεφαπτόμενη	$\cot\tau = BQ'' = \dfrac{x}{y}$	$-\infty < \cot\tau < +\infty$

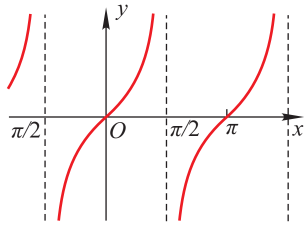
Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου $\tau = \overset{\frown}{AP}$ ταυτίζονται με εκείνους της γωνίας $\varphi = \widehat{AOP}$. Οι προηγούμενοι ορισμοί ισχύουν και για τόξα (ή γωνίες) μεγαλύτερα από 90°.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

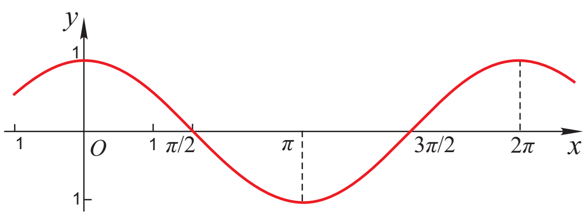
Για x σε ακτίνια οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ έχουν τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις.



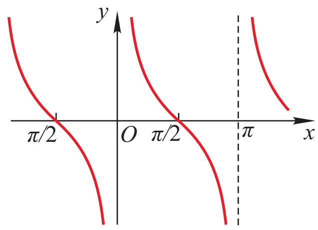
Σχ. 3-3 $y = \sin x$



Σχ. 3-5 $y = \tan x$



Σχ. 3-4 $y = \cos x$



Σχ. 3-6 $y = \cot x$

Τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων

x σε μοίρες	x σε ακτίνια	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
0°	0	0	1	0	∞
15°	$\pi/12$	$(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$
30°	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
75°	$5\pi/12$	$(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$	0

Για γωνίες σε άλλα τεταρτημόρια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους μετασχηματισμού της Παραγ. 3.2.

3.2 Ταυτότητες

Βασικές

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 1$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \cot^2 x = 1$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Μετασχηματισμοί

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cot(-x) = -\cot x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\cot x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\sin x \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\tan x$$

$$\sin(\pi \pm x) = \mp\sin x \qquad \tan(\pi \pm x) = \pm\tan x$$

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos x \qquad \cot(\pi \pm x) = \pm\cot x$$

$$\sin(2\pi \pm x) = \pm\sin x \qquad \tan(2\pi \pm x) = \pm\tan x$$

$$\cos(2\pi \pm x) = \cos x \qquad \cot(2\pi \pm x) = \pm\cot x$$

Αθροίσματα

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y}$$

$\sin x + \sin y = 2\sin\tfrac{1}{2}(x + y)\cos\tfrac{1}{2}(x - y)$

$\sin x - \sin y = 2\cos\tfrac{1}{2}(x + y)\sin\tfrac{1}{2}(x - y)$

$\cos x + \cos y = 2\cos\tfrac{1}{2}(x + y)\cos\tfrac{1}{2}(x - y)$

$\cos x - \cos y = 2\sin\tfrac{1}{2}(x + y)\sin\tfrac{1}{2}(y - x)$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

$$\cot x \pm \cot y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$$

$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$

$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$

$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x + y)\sin(x - y)$

$\cos^2 x - \cos^2 y = \sin(x + y)\sin(y - x)$

$\cos^2 x - \sin^2 y = \cos(x + y)\cos(x - y)$

$\sin(x \pm iy) = \sin x\cosh y \pm i\cos x\sinh y$

$\cos(x \pm iy) = \cos x\cosh y$ #06 $i\sin x\sinh y$

$$\tan(x \pm iy) = \frac{\sin 2x \pm i\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

$$\cot(x \pm iy) = \frac{\sin 2x \mp i\sinh 2y}{\cosh 2y - \cos 2x}$$

Πολλαπλές γωνίες

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$$

$$\sin 4x = 4\sin x\cos x - 8\sin^3 x\cos x$$

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$\tan 4x = \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1-6\tan^2 x + \tan^4 x}$$

$$\sin 5x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x$$

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

$$\tan 5x = \frac{\tan^5 x - 10\tan^3 x + 5\tan x}{1-10\tan^2 x + 5\tan^4 x}$$

$$\sin nx = \sin x\left\{2^{n-1}\cos^{n-1} x - \binom{n-2}{1}2^{n-3}\cos^{n-3} x + \binom{n-3}{2}2^{n-5}\cos^{n-5} x - \cdots\right\}$$

$$\cos nx = 2^{n-1}\cos^n x - \frac{n}{1}2^{n-3}\cos^{n-2} x + \frac{n}{2}\binom{n-3}{1}2^{n-5}\cos^{n-4} x - \frac{n}{3}\binom{n-4}{2}2^{n-7}\cos^{n-6} x + \cdots$$

Δυνάμεις

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x$$

$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$

$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$

$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

$\sin^5 x = (5/8)\sin x - (5/16)\sin 3x + (1/16)\sin 5x$

$\cos^5 x = (5/8)\cos x + (5/16)\cos 3x + (1/16)\cos 5x$

$$\sin^{2n-1} x = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-1}{k} \sin(2n-2k-1)x$$

$$\cos^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} \cos(2n-2k-1)x$$

$$\sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)x$$

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)x$$

3.3 Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Αν $x = \sin y$, τότε η *αντίστροφη* συνάρτηση συμβολίζεται με $y = \sin^{-1} x$. Όμοια για τις άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Με το συμβολισμό αυτό νοούνται οι συναρτήσεις που παίρνουν τιμές στα εξής διαστήματα (συχνά καλούνται *πρωτεύοντες κλάδοι*):

$-\pi/2 \le \sin^{-1} x \le \pi/2$ $\qquad$ $0 \le \cos^{-1} x \le \pi$

$-\pi/2 < \tan^{-1} x < \pi/2$ $\qquad$ $0 < \cot^{-1} x < \pi$

Ιδιότητες

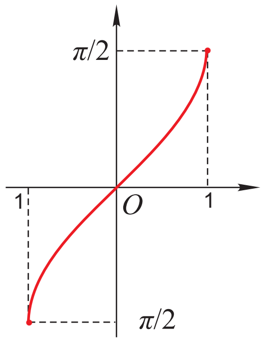
$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$ $\qquad$ $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$

$\cot^{-1} x = \tan^{-1}(1/x)$

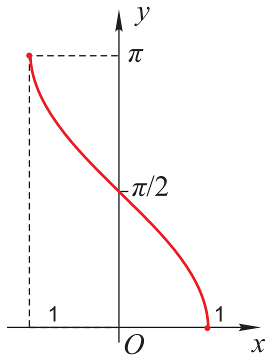
$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$ $\qquad$ $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$ $\qquad$ $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$

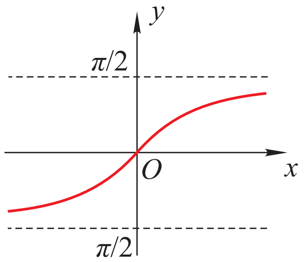
Γραφικές παραστάσεις



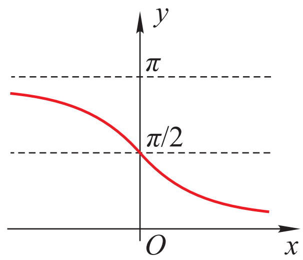
Σχ. 3-7 $y = \sin^{-1}x$



Σχ. 3-8 $y = \cos^{-1}x$



Σχ. 3-9 $y = \tan^{-1}x$



Σχ. 3-10 $y = \cot^{-1}x$

3.4 Επίπεδο Τρίγωνο

Σε κάθε επίπεδο τρίγωνο οι πλευρές a, b, c και οι γωνίες A, B, C συνδέονται με τις εξής σχέσεις:

$A + B + C = 180°, \qquad |a - b| < c < a + b$

Νόμος του ημίτονου

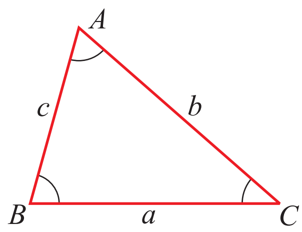
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Νόμος του συνημίτονου

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad \text{κτλ.}$$

Νόμος της εφαπτόμενης

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$$



Σχ. 3-11

Τύπος προβολής

$$c = a\cos B + b\cos A$$

Τύποι με περίμετρο

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ κτλ.

όπου $2s = a + b + c$ είναι η περίμετρος του τριγώνου.

Ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου $\quad r = \dfrac{a}{2\sin A}$

Ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου $\quad \rho = (s-a)\tan\dfrac{A}{2}$

3.5 Σφαιρικό Τρίγωνο

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο οι πλευρές a, b, c (τόξα μέγιστων κύκλων) και οι γωνίες A, B, C (δίεδρες γωνίες) συνδέονται με τις εξής σχέσεις:

Νόμος του ημίτονου

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

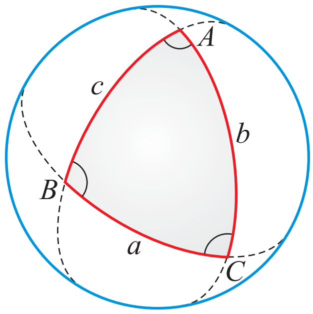
Νόμος του συνημίτονου

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a$$ κτλ.

Νόμος της εφαπτόμενης

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}(a-b)}$$



Σχ. 3-12

Τύποι με την περίμετρο

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin b\sin c}$$

$$\sin a = \frac{2\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{\sin B\sin C}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}$$

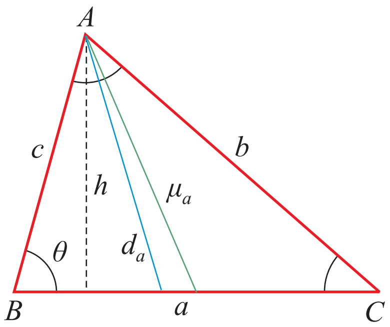
$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}\qquad\text{κτλ.}$$

όπου $2s = a + b + c$ και $2S = A + B + C$.

4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

4.1 Σε δύο Διαστάσεις



Σχ. 4-1

Τρίγωνο

Περίμετρος $\Pi = 2s = a + b + c$

'Υψος $h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Διάμεσος $\mu_a{}^2 = \dfrac{1}{2}(b^2 + c^2) - \dfrac{1}{4}a^2$

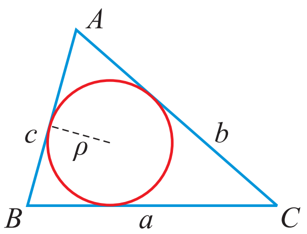
Εσωτερική διχοτόμος $d_a = \dfrac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$

Εξωτερική διχοτόμος $D_a = \dfrac{2\sqrt{bc(s-b)(s-c)}}{|\,b-c\,|}$ $[b \neq c]$

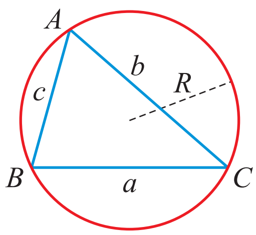
Εμβαδό $E = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{1}{2}ac\sin\theta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Ακτίνα εγγραμμένου κύκλου $\rho = \dfrac{1}{s}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

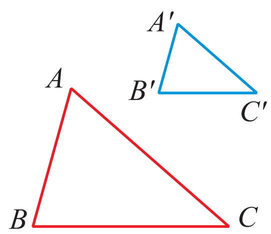
Ακτίνα περιγραμμένου κύκλου $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$



Σχ. 4-2



Σχ. 4-3



Σχ. 4-4

Όμοια τρίγωνα (Σχ. 4-3)

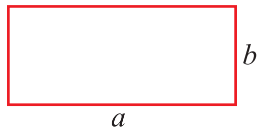
$$A = A' \qquad B = B' \qquad C = C'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Ορθογώνιο

Περίμετρος $\Pi = 2a + 2b$

Εμβαδό $E = ab$

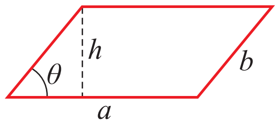


Σχ. 4-5

Παραλληλόγραμμο

Περίμετρος $\Pi = 2a + 2b$

Εμβαδό $E = ah = ab\sin\theta$

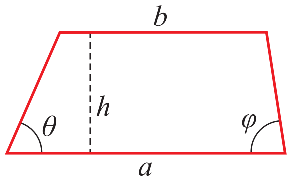


Σχ. 4-6

Τραπεζοειδές

Περίμετρος $\Pi = a + b + h\left(\dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\sin\varphi}\right)$

Εμβαδό $E = \frac{1}{2}h(a + b)$



Σχ. 4-7

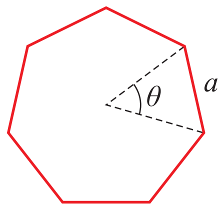
Κανονικό πολύγωνο

Περίμετρος $\Pi = na$

Κεντρική γωνία $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$

Εμβαδό $E = \dfrac{1}{4}na^2 \cot\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{1}{4}na^2 \dfrac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$

όπου n το πλήθος των πλευρών και a το μήκος κάθε πλευράς.



Σχ. 4-8

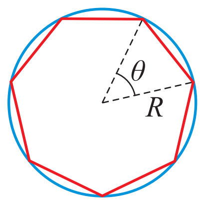
Κανονικό πολύγωνο γραμμένο σε κύκλο

Περίμετρος $\Pi = 2nR\sin\dfrac{\pi}{n} = 2nR\sin\dfrac{180°}{n}$

Κεντρική γωνία $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$

Εμβαδό $E = \dfrac{1}{2}nR^2 \sin\dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{1}{2}nR^2 \sin\dfrac{360°}{n}$

όπου n το πλήθος των πλευρών και R η ακτίνα του περιγραμμένου κύκλου.



Σχ. 4-9

Κανονικά πολύγωνα γραμμένα σε κύκλο ακτίνας R

Πολύγωνο	Πλευρά	Απόστημα	Εμβαδό
$n=3$	$\sqrt{3}\,R$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,R$	$\frac{3}{4}\sqrt{3}\,R^2$
$n=4$	$\sqrt{2}\,R$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,R$	$2R^2$
$n=5$	$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,R$	$\frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}\,R$	$\frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,R^2$
$n=6$	R	$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,R$	$(3/2)\sqrt{3}\,R^2$
$n=8$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}\,R$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\,R$	$2\sqrt{2}\,R^2$
$n=10$	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,R$	$(5/4)\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,R^2$
$n=12$	$\sqrt{2-\sqrt{3}}\,R$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\,R$	$3R^2$

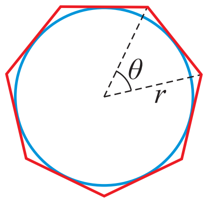
Κανονικό πολύγωνο γραμμένο γύρω από κύκλο

Περίμετρος $\quad \Pi = 2nr\tan\frac{\pi}{n} = 2nr\tan\frac{180°}{n}$

Κεντρική γωνία $\quad \theta = \frac{2\pi}{n}$

Εμβαδό $\quad E = nr^2\tan\frac{\pi}{n} = nr^2\tan\frac{180°}{n}$

όπου n το πλήθος των πλευρών και r η ακτίνα του κύκλου.



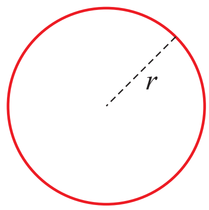
Σχ. 4-10

Κύκλος

Περίμετρος $\quad \Pi = 2\pi r$

Εμβαδό $\quad E = \pi r^2$

όπου r η ακτίνα του κύκλου.



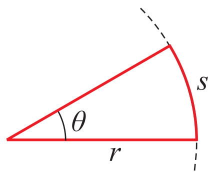
Σχ. 4-11

Τομέας κύκλου

Μήκος τόξου $\quad s = r\theta$

Εμβαδό $\quad E = \frac{1}{2}r^2\theta \quad$ [θ σε ακτίνια]

όπου r η ακτίνα του κύκλου και θ η γωνία του τομέα.

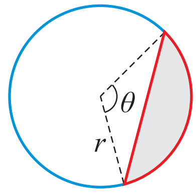


Σχ. 4-12

Τμήμα κύκλου

Εμβαδό σκιασμένου τμήματος $E = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$

όπου r η ακτίνα του κύκλου.



Σχ. 4-13

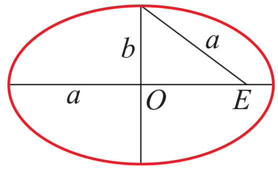
Έλλειψη

Περίμετρος

$$\Pi = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta \cong \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

Εμβαδό $E = \pi ab$

όπου $k = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}$. Βλέπε σελ. ??? για αριθμητικούς πίνακες.



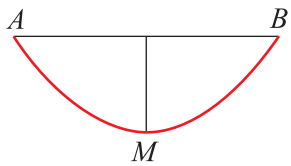
Σχ. 4-14

Τμήμα παραβολής

Μήκος τόξου AMB

$$(AMB) = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+16a^2} + \frac{b^2}{8a}\ln\left(\frac{4a+\sqrt{b^2+16a^2}}{b}\right)$$

Εμβαδό $E = \frac{2}{3}ab$



Σχ. 4-15

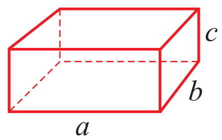
4.2 Σε τρεις Διαστάσεις

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Εμβαδό επιφάνειας $E = 2(ab + ac + bc)$

Όγκος $V = abc$

όπου a, b, c είναι το μήκος, πλάτος και ύψος του παραλληλεπίπεδου αντίστοιχα.



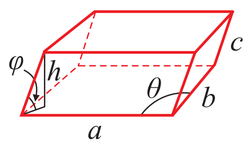
Σχ. 4-16

Πλάγιο παραλληλεπίπεδο

Ύψος $h = c\sin\varphi$

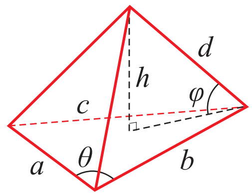
Όγκος $V = Ah = abc\sin\theta\sin\varphi$

όπου A είναι η οριζόντια διατομή του παραλληλεπίπεδου.



Σχ. 4-17

Πυραμίδα



Σχ. 4-18

Ύψος $h = d\sin\theta$

Όγκος $V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{6}abd\sin\theta\sin\varphi$

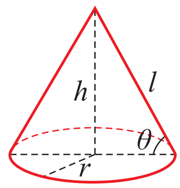
όπου A το εμβαδό της βάσης.

Κανονικά πολύεδρα

Στα 5 κανονικά πολύεδρα του πίνακα είναι a η ακμή, R η ακτίνα της περιγραμμένης σφαίρας, E το εμβαδό της επιφάνειας, V ο όγκος. Η ακτίνα της εγγραμμένης σφαίρας είναι πάντα $\rho = 3V/E$.

Πολύεδρο	Ακτίνα R	Εμβαδό E	Όγκος V
Τετράεδρο (4 ισόπλευρα τρίγωνα)	$\frac{1}{4}\sqrt{6}\,a$	$\sqrt{3}\,a^2$	$(1/12)\sqrt{2}\,a^3$
Κύβος (6 τετράγωνα)	$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$	$6a^2$	a^3
Οκτάεδρο (8 ισόπλευρα τρίγωνα)	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a$	$2\sqrt{3}\,a^2$	$\frac{1}{3}\sqrt{2}\,a^3$
Δωδεκάεδρο (12 κανονικά πεντάγωνα)	$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\sqrt{3}\,a$	$3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\,a^2$	$\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})a^3$
Εικοσάεδρο (20 ισόπλευρα τρίγωνα)	$\frac{1}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\,a$	$5\sqrt{3}\,a^2$	$(5/12)(3+\sqrt{5})a^3$

Ορθός κυκλικός κώνος



Σχ. 4-19

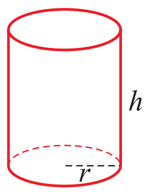
Ύψος $h = l\sin\theta$

Εμβαδό κωνικής επιφάνειας $E = \pi rl = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$

Όγκος $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

όπου r η ακτίνα της βάσης και h το ύψος του κώνου.

Ορθός κυκλικός κύλινδρος



Σχ. 4-20

Εμβαδό κυλινδρικής επιφάνειας $E = 2\pi rh$

Όγκος $V = \pi r^2 h$

όπου r η ακτίνα και h το ύψος του κυλίνδρου.

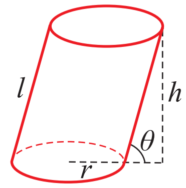
Πλάγιος κυκλικός κύλινδρος

Ύψος $h = l\sin\theta$

Εμβαδό κυλινδρικής επιφάνειας $E = 2\pi r l = \dfrac{2\pi r h}{\sin\theta}$

Όγκος $V = \pi r^2 h = \pi r^2 l \sin\theta$

όπου r η ακτίνα της βάσης, h το ύψος και l η γενέτειρα του κυλίνδρου.



Σχ. 4-21

Ορθός κόλουρος κώνος

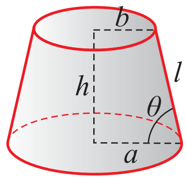
Ύψος $h = l\sin\theta = \sqrt{l^2 - (a-b)^2}$

Εμβαδό κωνικής επιφάνειας

$$E = \pi(a+b)l = \pi(a+b)\sqrt{h^2 + (a-b)^2}$$

Όγκος $V = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$

όπου a, b οι ακτίνες των βάσεων και h το ύψος του κώνου.

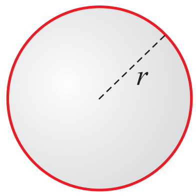


Σχ. 4-22

Σφαίρα

Εμβαδό επιφάνειας $E = 4\pi r^2$

Όγκος $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



Σχ. 4-23

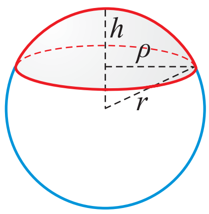
Σφαιρικό τμήμα

Ακτίνα βάσης $\rho = \sqrt{h(2r-h)}$

Εμβαδό σφαιρικής επιφάνειας $E = 2\pi r h$

Όγκος σκιασμένου τμήματος $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$

όπου r η ακτίνα της σφαίρας και h το ύψος του τμήματος.

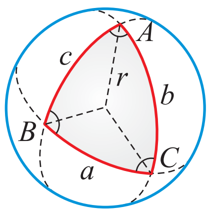


Σχ. 4-24

Σφαιρικό τρίγωνο

Εμβαδό τριγώνου ABC $E = (A + B + C - \pi)r^2$

όπου r η ακτίνα της σφαίρας και A, B, C οι γωνίες του σφαιρικού τριγώνου.



Σχ. 4-25

Ελλειψοειδές

Όγκος $V = \frac{4}{3}\pi abc$

όπου a, b, c οι ημιάξονες του ελλειψοειδούς.

Αν $a = b > c$, τότε

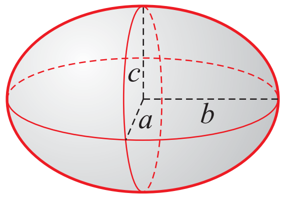
Εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$

Επιφάνεια $E = 2\pi a^2 + \frac{\pi c^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$

Αν $a = b < c$, τότε

Εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}$

Επιφάνεια $E = 2\pi a^2 + 2\pi\frac{ac}{\varepsilon}\sin^{-1}\varepsilon$



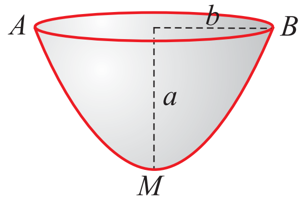
Σχ. 4-26

Παραβολοειδές από περιστροφή

Εμβαδό καμπύλης επιφάνειας

$$E = \frac{\pi b^4}{6a^2}\left[\left(\frac{4a^2}{b^2}+1\right)^{3/2} - 1\right]$$

Όγκος $V = \frac{1}{2}\pi b^2 a$



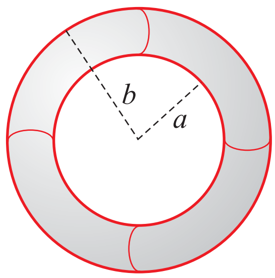
Σχ. 4-27

Τόρος

Εμβαδό επιφάνειας $E = \pi^2(b^2 - a^2)$

Όγκος $V = \frac{1}{4}\pi^2(a+b)(b-a)^2$

όπου a η εσωτερική και b η εξωτερική ακτίνα.



Σχ. 4-28

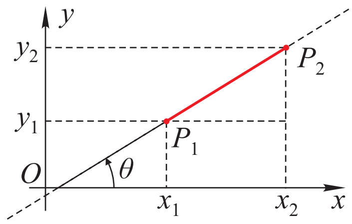
5 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

5.1 Σε δύο Διαστάσεις

Συστήματα συντεταγμένων

Για να καθοριστεί η θέση, το σχήμα και η κίνηση των σωμάτων στο χώρο (που θεωρείται Ευκλείδειος, δηλαδή με θετική απόσταση μεταξύ δύο σημείων) χρησιμοποιούνται *συστήματα συντεταγμένων*, δηλαδή άξονες ή καμπύλες κατάλληλα αριθμημένοι. Σε δύο διαστάσεις ένα *ορθογώνιο καρτεσιανό* σύστημα συντεταγμένων xOy δίνεται στο Σχ. 5-1. Η θέση του σημείου P_1 δίνεται από την *τετμημένη* x_1 και την *τεταγμένη* y_1, που ορίζονται από τις κάθετες προς τους άξονες.

Σημεία



Σχ. 5-1

Απόσταση δύο σημείων

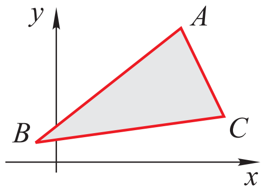
Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος P_1P_2 είναι

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(x_1, y_1) = καρτεσιανές συντεταγμένες σημείου P_1

(x_2, y_2) = καρτεσιανές συντεταγμένες σημείου P_2

Εμβαδό τριγώνου



Σχ. 5-2

Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ είναι οι κορυφές του τριγώνου, το εμβαδό του ισούται με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

Ευθεία

Εξίσωση από δύο σημεία

Αν η ευθεία περνάει από δύο σημεία $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$, έχει εξίσωση

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Η *κλίση* της ευθείας είναι

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$$

και η τεταγμένη της τομής με τον άξονα y

$$b = y_1 - mx_1 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Η εξίσωση της ευθείας γράφεται επίσης

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ή $$y = mx + b$$

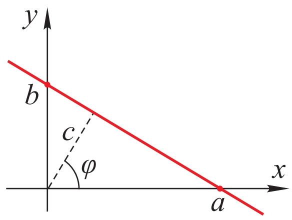
ή $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

όπου a η τετμημένη της τομής με τον άξονα x.

Κανονική μορφή της εξίσωσης μιας ευθείας

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = c$$

όπου c η απόσταση της αρχής O από την ευθεία και φ η γωνία της κάθετης στην ευθεία με το θετικό ημιάξονα x.



Σχ. 5-3

Γενική μορφή της εξίσωσης μιας ευθείας

$$Ax + By + C = 0$$

Απόσταση σημείου από ευθεία

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(x_1, y_1) = καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου

Γωνία δύο ευθειών

Αν m_1 και m_2 είναι οι κλίσεις δύο ευθειών, τότε η εφαπτόμενη της γωνίας τους είναι

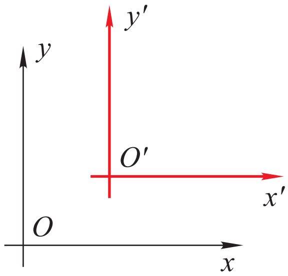
$$\tan\psi = \frac{m_2 - m_1}{m_1 m_2 + 1}$$

Οι ευθείες είναι παράλληλες ή συμπίπτουν, μόνο αν $m_1 = m_2$.

Οι γραμμές είναι κάθετες, αν και μόνο αν $m_2 = -1/m_1$.

Μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Οι συντεταγμένες ενός σημείου σε δύο συστήματα συντεταγμένων συνδέονται μεταξύ τους με σχέσεις που καλούνται *μετασχηματισμοί*



Σχ. 5-4

Μεταφορά

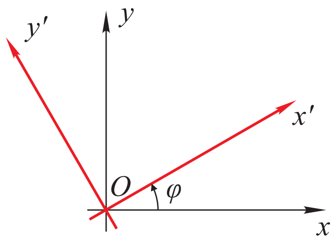
$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

(x, y) = συντεταγμένες ως προς το σύστημα xOy

(x', y') = συντεταγμένες ως προς το σύστημα $x'O'y'$

(x_0, y_0) = συντεταγμένες του O' ως προς το xOy

Στροφή



Σχ. 5-5

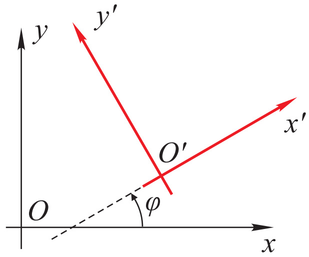
$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi \end{cases}$$

φ = γωνία στροφής

Μεταφορά και στροφή



Σχ. 5-6

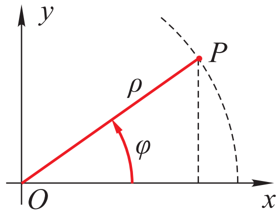
$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + x_0 \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + y_0 \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi \\ y' = (y - y_0)\cos\varphi - (x - x_0)\sin\varphi \end{cases}$$

(x_0, y_0) = συντεταγμένες του O' ως προς το xOy

Πολικές συντεταγμένες



Σχ. 5-7

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$$

(x, y) = καρτεσιανές συντεταγμένες

(ρ, φ) = πολικές συντεταγμένες

Επίπεδες καμπύλες

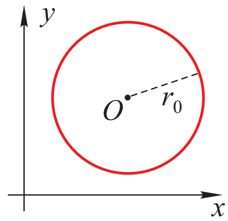
Γενικά, μια εξίσωση της μορφής $f(x, y) = 0$ παριστάνει μία *καμπύλη* στο επίπεδο xy. Μια καμπύλη μπορεί να δοθεί σε *παραμετρική* μορφή με δύο εξισώσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$, όπου t κάποια παράμετρος. Η ευθεία είναι η απλούστερη καμπύλη, αφού η $f(x, y)$ είναι γραμμική ως προς x και y. Αν η $f(x, y)$ είναι δεύτερου βαθμού πολυώνυμο, έχουμε *κωνική τομή* (κύκλο, έλλειψη, υπερβολή ή παραβολή).

Κύκλος

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

(x_0, y_0) = καρτεσιανές συντεταγμένες κέντρου

R = ακτίνα του κύκλου

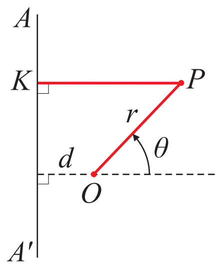


Σχ. 5-8

Κωνικές τομές

Έστω $\varepsilon = \dfrac{PO}{PK}$ ο λόγος των αποστάσεων σημείου P από ένα σημείο O και από μιά ευθεία AA'. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P, για τα οποία ε = σταθ., είναι μια *κωνική τομή* με εξίσωση

$$r = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon \cos\theta}$$



Σχ. 5-9

Η κωνική τομή είναι

έλλειψη, αν $\varepsilon < 1$,

παραβολή, αν $\varepsilon = 1$,

υπερβολή, αν $\varepsilon > 1$.

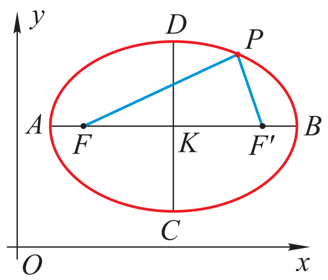
Η σταθερή ε καλείται *εκκεντροτητα*.

Έλλειψη

Η έλλειψη με μεγάλο άξονα $2a$ και μικρό άξονα $2b$, παράλληλους προς τους άξονες συντεταγμένων Ox και Oy αντίστοιχα, έχει εξίσωση

$$\frac{(x - x_0)}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

όπου (x_0, y_0) οι συντεταγμένες του κέντρου K της έλλειψης. Στο Σχ. 5-10 είναι



Σχ. 5-10

$$AB = 2a$$

$$CD = 2b$$

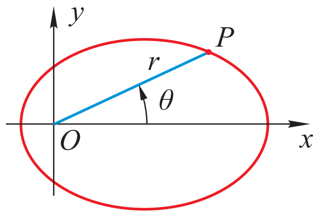
$$KF = KF' = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$PF + PF' = 2a$ (P τυχόν σημείο της έλλειψης)

$$\varepsilon = \text{εκκεντρότητα} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Αν το F ταυτίζεται με το O, έχουμε το Σχ. 5-11, όπου

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\theta}, \qquad p = a(1 - \varepsilon^2)$$



Σχ. 5-11

Υπερβολή

Η υπερβολή με μεγάλο άξονα $2a$ και μικρό άξονα $2b$, παράλληλους προς τους άξονες συντεταγμένων Ox και Oy αντίστοιχα, έχει εξίσωση

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

όπου (x_0, y_0) οι συντεταγμένες του κέντρου K της υπερβολής. Στο Σχ. 5-12 είναι

$$AB = 2\alpha$$

$$KF = KF' = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|PF - PF'| = 2a$$

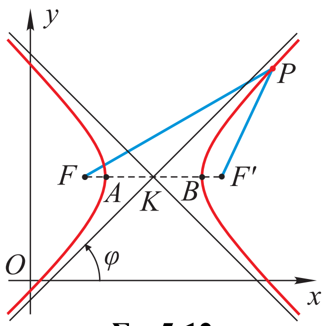
(P τυχόν σημείο της υπερβολής)

$$\varepsilon = \text{εκκεντρότητα} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

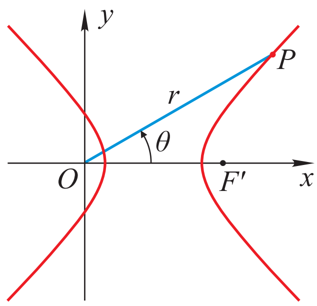
$$\tan\varphi = \frac{b}{a}$$

Αν το F ταυτίζεται με το O, έχουμε το Σχ. 5-13, όπου

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\theta}, \qquad p = \alpha(\varepsilon^2 - 1)$$



Σχ. 5-12



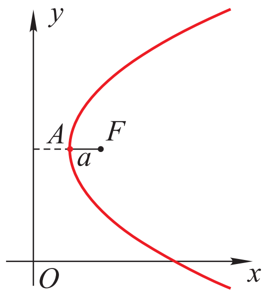
Σχ. 5-13

Παραβολή

Η παραβολή με άξονα παράλληλο προς τον Ox (Σχ. 5-14) έχει εξίσωση

$$(y-y_0)^2 = 4a(x-x_0),$$

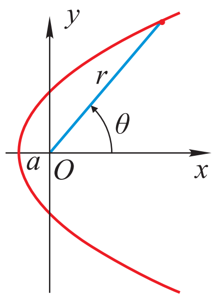
όπου (x_0, y_0) οι συντεταγμένες του A και $AF = a$.



Σχ. 5-14

Αν το F ταυτίζεται με το O (Σχ. 5-15), τότε η παραβολή έχει εξίσωση

$$r = \frac{2a}{1-\cos\theta}$$



Σχ. 5-15

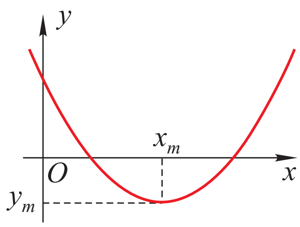
Η εξίσωση

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a > 0,$$

παριστάνει παραβολή (Σχ. 5-16) με συντεταγμένες ελάχιστου

$$x_m = -\frac{b}{2a},$$

$$y_m = \frac{4ac-b^2}{4a}$$



Σχ. 5-16

Σύνοψη κωνικών τομών

	Έλλειψη	Υπερβολή	Παραβολή
Εξίσωση	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2 = 4px$
Εκκεντρότητα	$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}<1$	$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>1$	$\varepsilon = 1$
Εστίες	$(-a\varepsilon, 0)$ $(a\varepsilon, 0)$	$(-a\varepsilon, 0)$ $(a\varepsilon, 0)$	$(p, 0)$
Διευθετούσα	$x=-a/\varepsilon$ $x=a/\varepsilon$	$x=-a/\varepsilon$ $x=a/\varepsilon$	$x=-p$
Χορδή στην εστία κάθετη στον άξονα	$2b^2/a$	$2b^2/a$	$4p$
Εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες	$r^2=\frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}$	$r^2=\frac{-b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}$	$r=\frac{4p\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

Κυβική παραβολή (Σχ. 5-17)

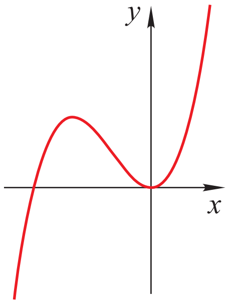
Εξίσωση

$$y = x^2(x - a)$$

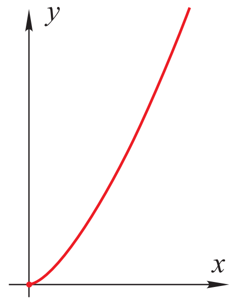
Ημικυβική παραβολή (Σχ. 5-18)

Εξίσωση

$$y = ax^{2/3}$$



Σχ. 5-17



Σχ. 5-18

Κισσοειδής του Διοκλή (Σχ. 5-19)

Το Q κινείται κατά μήκος της QQ' (εφαπτόμενης του κύκλου και κάθετης στον άξονα Ox) και παίρνουμε $OP = RQ$. Το P γράφει την καμπύλη.

Εξισώσεις

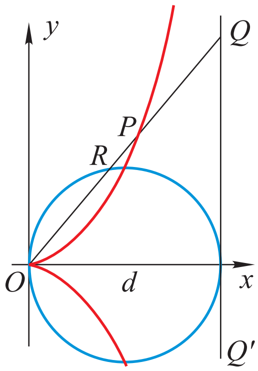
$$y^2 = \frac{x^3}{d - x}$$

ή $\quad r = d\sin\theta\tan\theta$

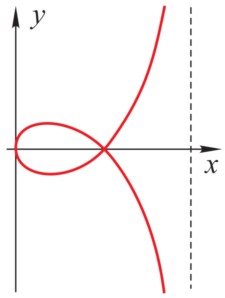
Στροφοειδής (Σχ. 5-20)

Εξίσωση

$$x^3 + x(a^2 + y^2) = 2a(x^2 + y^2)$$



Σχ. 5-19



Σχ. 5-20

Φύλλο του Descartes (Σχ. 5-21)

Εξισώσεις

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

ή $\quad x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \quad y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$

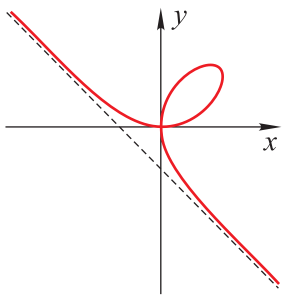
Ασύμπτωτη $\quad x + y + a = 0$

Εμβαδό $\quad E = (3/2)a^2$

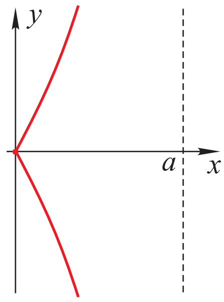
Τριχοτομούσα (Σχ. 5-22)

Εξίσωση

$$y^2 = \frac{x^2(3a + x)}{a - x}$$



Σχ. 5-21



Σχ. 5-22

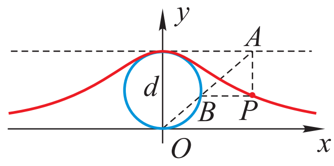
Μάγισσα της Agnesi (Σχ. 5-23)

Το A κινείται πάνω στην ευθεία $y = d$. Το B είναι η τομή της OA με το σταθερό κύκλο κέντρου $(0, d/2)$ και διαμέτρου d. Το P είναι η τομή των ευθειών που φέρονται από τα A και B παράλληλες προς τους άξονες.

Εξισώσεις

$$y = \frac{d^3}{x^2 + d^2} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = d\cot\varphi \\ y = d\sin^2\varphi \end{cases}$$

όπου $\varphi = \widehat{AOx}$.



Σχ. 5-23

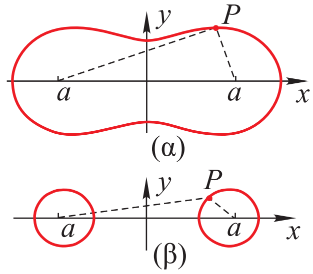
Ωοειδής του Cassini (Σχ. 5-24)

Οι αποστάσεις του P από δύο σταθερά σημεία έχουν σταθερό γινόμενο b^2.

Εξίσωση

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = b^4$$

Αν $a < b$, έχουμε το Σχ. 5-24α. Αν $a > b$, το Σχ. 5-24β.



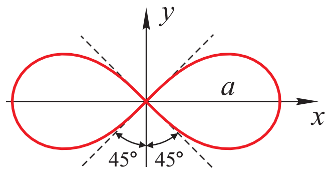
Σχ. 5-24

Λημνίσκος του Bernoulli (Σχ. 5-25)

Εξίσωση

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad \text{ή} \quad r^2 = a^2\cos 2\theta.$$

Εμβαδό (ολικό) $\quad E = a^2$

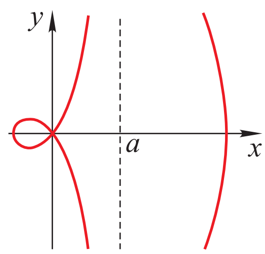


Σχ. 5-25

Κογχοειδής του Νικομήδη (Σχ. 5-26)

Εξίσωση

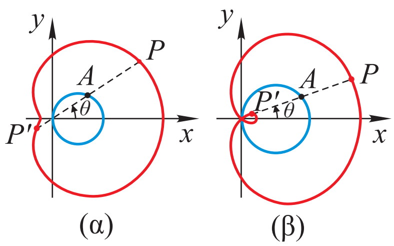
$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2x^2 \quad \text{ή} \quad r = \frac{a}{\cos\theta} + b$$



Σχ. 5-26

Σαλίγκαρος του Pascal (Σχ. 5-27)

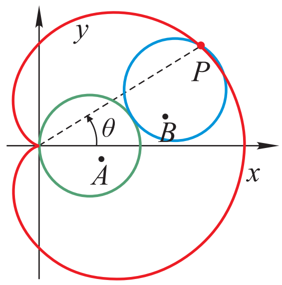
Το A κινείται πάνω στο σταθερό κύκλο διαμέτρου d. Στην ευθεία που συνδέει το A με την αρχή των αξόνων παίρνουμε δύο σημεία P και P' με $PA = P'A = b < 2d$. Αυτά γράφουν την καμπύλη.



Σχ. 5-27

Εξίσωση $\quad r = b + d\cos\theta$

Αν $d < b$, έχουμε το Σχ. 5-27α. Αν $b < d$, έχουμε το Σχ. 5-27β.



Σχ. 5-28

Καρδιοειδής (Σχ. 5-28

Ο κύκλος (B, a) κυλάει στο εξωτερικό του σταθερού κύκλου (A, a). Το σημείο P γράφει την καμπύλη.

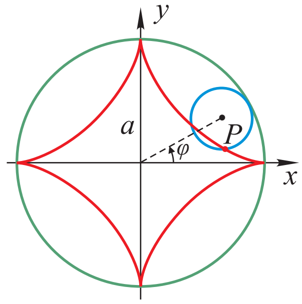
Εξίσωση

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

ή $\quad r = 2a(1 + \cos\theta)$

Μήκος (ολικό) = $8a$

Εμβαδό $\quad E = (3/2)\pi a^2$



Σχ. 5-29

Αστροειδής (Σχ. 5-29)

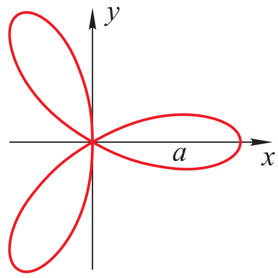
Ο μικρός κύκλος με ακτίνα $a/4$ κυλάει μέσα στο μεγάλο κύκλο με ακτίνα a. Το σημείο P γράφει την καμπύλη.

Εξισώσεις

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = a\cos^3\varphi \\ y = a\sin^3\varphi \end{cases}$$

Μήκος (ολικό) $= 6a$

Εμβαδό $\quad E = \frac{3}{8}\pi a^2$



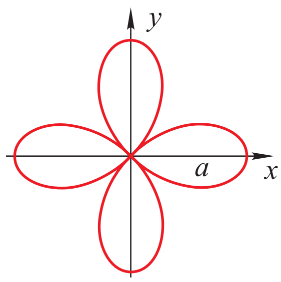
Σχ. 5-30

Τρίφυλλο ρόδο (Σχ. 5-30)

Εξίσωση

$$r = a\cos 3\theta$$

Γενικά, για n περιττό η $r = a\cos n\theta$ έχει n φύλλα.



Σχ. 5-31

Τετράφυλλο ρόδο (Σχ. 5-31)

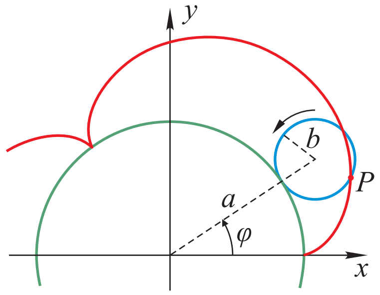
Εξίσωση

$$r = a\cos 2\theta$$

Γενικά, για n άρτιο η $r = a\cos n\theta$ έχει $2n$ φύλλα.

Επικυκλοειδής (Σχ. 5-32)

Ο μικρός κύκλος κυλάει στο εξωτερικό του μεγάλου. Το σημείο P είναι σταθερό ως προς το μικρό κύκλο, απέχει c από το κέντρο του και γράφει την καμπύλη.



Σχ. 5-32

Εξισώσεις

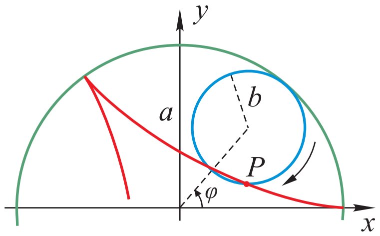
$$x = (a+b)\cos\varphi - c\cos\left(\frac{a+b}{b}\varphi\right)$$

$$y = (a+b)\sin\varphi - c\sin\left(\frac{a+b}{b}\varphi\right)$$

Στο Σχ. 5-32 η περίπτωση $b = c$.

Υποκυκλοειδής (Σχ. 5-33)

Ο μικρός κύκλος κυλάει στο εσωτερικό του μεγάλου. Το σημείο P είναι σταθερό ως προς το μικρό κύκλο, απέχει c από το κέντρο του και γράφει την καμπύλη.



Σχ. 5-33

Εξισώσεις

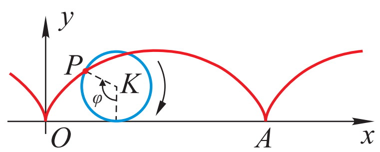
$$x = (a-b)\cos\varphi + c\cos\left(\frac{a-b}{b}\varphi\right)$$

$$y = (a-b)\sin\varphi - c\sin\left(\frac{a-b}{b}\varphi\right)$$

Στο Σχ. 5-33 η περίπτωση $b = c$.

Κυκλοειδής (Σχ. 5-34)

Ο κύκλος (K, a) κυλάει πάνω στον άξονα Ox. Το σημείο P είναι σταθερό στην περιφέρεια και γράφει την καμπύλη.



Σχ. 5-34

Εξισώσεις

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi)$$

Τετμημένη του $A = 2\pi a$

Μήκος του τόξου $OA = 8a$

Εμβαδό ενός τμήματος $\quad E = 3\pi a^2$

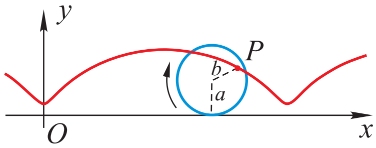
Τροχοειδής (Σχ. 5-35)

Ο κύκλος με ακτίνα a κυλάει πάνω στον άξονα Ox. Το σημείο P είναι σταθερό ώς προς τον κύκλο, απέχει απόσταση b από το κέντρο και γράφει την καμπύλη.

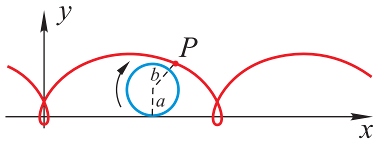
Εξισώσεις

$$x = a\varphi - b\sin\varphi, \qquad y = a - b\cos\varphi$$

Αν $b < a$ έχουμε το Σχ. 5-35α. Αν $b > a$, το Σχ. 5-35β. Αν $b = a$, παίρνουμε την κυκλοειδή του Σχ. 5-34.



Σχ. 5-35α



Σχ. 5-35β

Σπείρες (Σχ. 5-36)

Γραμμική (του Αρχιμήδη)

Εξίσωση

$$r = a\theta$$

Παραβολική

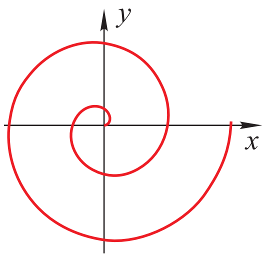
Εξίσωση

$$r^2 = 4p\theta$$

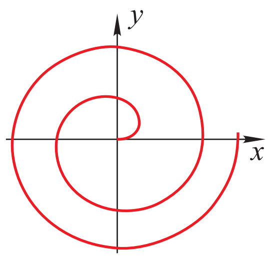
Λογαριθμική

Εξίσωση

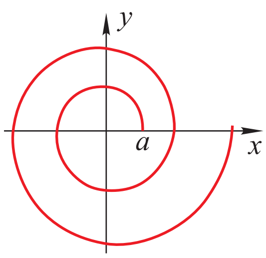
$$r = ae^{b\theta}$$



Σχ. 5-36α



Σχ. 5-36β



Σχ. 5-36γ

Ενειλιγμένη κύκλου (Σχ. 5-37)

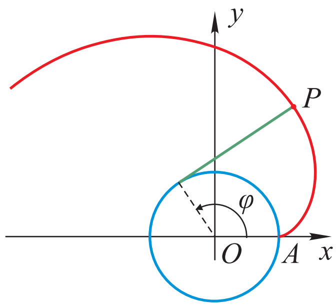
Το P είναι το άκρο ενός σχοινιού που είναι τυλιγμένο σε έναν κύκλο ακτίνας a. Το σχοινί ξετυλίγεται και το P γράφει την καμπύλη.

Εξισώσεις

$$x = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$$

$$y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$$

Μήκος τόξου $\quad s = \frac{1}{2}a\varphi^2$



Σχ. 5-37

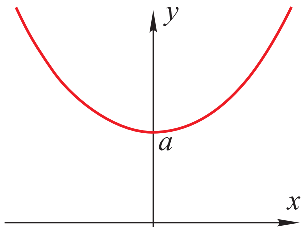
Αλυσοειδής (Σχ. 5-38)

Το σχήμα μιας ομογενούς αλυσίδας αναρτημένης από τα σημεία A και B.

Εξίσωση

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

Μήκος από $-x$ έως x $\quad s = 2a\sinh(x/a)$



Σχ. 5-38

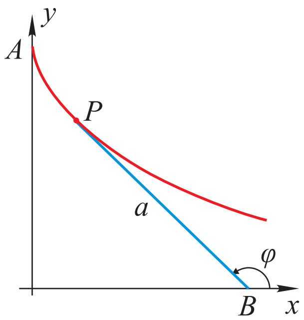
Έλκουσα (Σχ. 5-39)

Η καμπύλη αρχίζει από το σημείο $A(0,\ a)$. Η εφαπτόμενη στο τυχόν σημείο P τέμνει τον άξονα Ox στο B. Το μήκος PB παραμένει σταθερό και ίσο με a.

Εξισώσεις

$$x = a\left(\cos\varphi + \ln\tan\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$y = a\sin\varphi$$



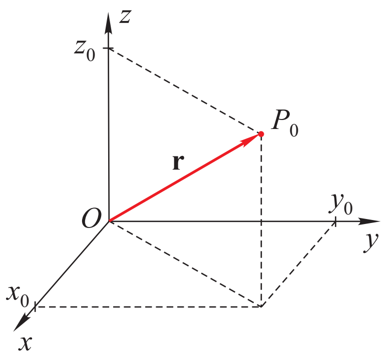
Σχ. 5-39

5.2 Σε τρεις Διαστάσεις

Συστήματα συντεταγμένων

Στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο χρησιμοποιούνται *συστήματα συντεταγμένων* με τρεις συντεταγμένες.

Οι *καρτεσιανές συντεταγμένες* x, y, z ονομάζονται αντίστοιχα *τετμημένη*, *τεταγμένη* και *κατηγμένη* και μετριώνται από την αρχή O κατά μήκος τριών ορθογώνιων αξόνων Ox, Oy, Oz. Ένα σημείο P_0 παριστάνεται από μία τριάδα τιμών $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, που ορίζουν τρία *συντεταγμένα επίπεδα* $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.



Σχ. 5-40

Στις διευθύνσεις των αξόνων Ox, Oy, Oz ορίζουμε αντίστοιχα τα *μοναδιαία διανύσματα βάσης* **i**, **j**, **k**. Κάθε σημείο αντιστοιχεί σε ένα *διάνυσμα θέσης*

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Το *μήκος* ή *μέτρο* του διανύσματος **r** συμβολίζεται με $|\mathbf{r}|$ ή r και είναι

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

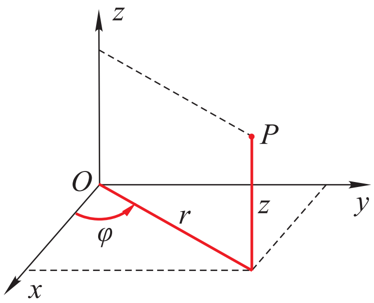
Γενικότερα, η θέση ενός σημείου στο χώρο μπορεί να καθοριστεί από τρεις *καμπυλλόγραμμες συντεταγμένες* x_1, x_2, x_3, οι οποίες συνδέονται με τις x, y, z και μετριώνται κατά μήκος τριών *συντεταγμένων καμπυλών* (που με τη σειρά τους ορίζονται ως τομές των τριών *συντεταγμένων επιφανειών* x_1 = σταθ., x_2 = σταθ., x_3 = σταθ.). Το σύστημα συντεταγμένων που θα χρησιμοποιηθεί επιλέγεται έτσι ώστε να γίνει απλούστερη η περιγραφή του φυσικού συστήματος. Οι συχνότερα χρησιμοποιούμενες συντεταγμένες (μετά τις καρτεσιανές) είναι οι κυλινδρικές και οι σφαιρικές συντεταγμένες.

Κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

(x, y, z) = καρτεσιανές συντεταγμένες

(ρ, φ, z) = κυλινδρικές συντεταγμένες



Σχ. 5-41

Σφαιρικές συντεταγμένες

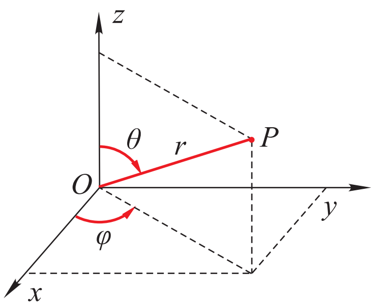
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \\ \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

(x, y, z) = καρτεσιανές συντεταγμένες

(r, φ, θ) = σφαιρικές συντεταγμένες



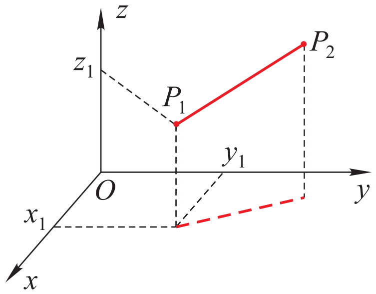
Σχ. 5-42

Σημεία

Απόσταση δύο σημείων (Σχ. 5-43)

$$d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(x_i, y_i, z_i) = καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου P_i ($i = 1, 2, 3$).



Σχ. 5-43

Απόσταση σημείου από επίπεδο

$$d_0 = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

όπου $P(x_0, y_0, z_0)$ είναι το σημείο και $Ax + By + Cz + D = 0$ το επίπεδο.

Ευθεία

Εξισώσεις ευθείας που περνάει από δύο σημεία $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Τα *συνημίτονα κατεύθυνσης* είναι

$$l = \cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \qquad m = \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \qquad n = \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

όπου α, β, γ οι γωνίες της ευθείας P_1P_2 με τους θετικούς ημιάξονες x, y, z και d το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος P_1P_2. Είναι

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad \text{ή} \qquad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Οι εξισώσεις της ευθείας γράφονται επίσης

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \qquad \text{ή} \qquad x = x_1 + lt, \;\; y = y_1 + mt, \;\; z = z_1 + nt$$

όπου t παράμετρος.

Με διανύσματα οι εξισώσεις της ευθείας γράφονται

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \kappa(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{a} \qquad \text{όπου } \mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

και κ και λ παράμετροι.

Ευθεία από σημείο και παράλληλη σε διάνυσμα

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z} \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}t$$

όπου $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ είναι το σημείο και $\mathbf{v} = (X, Y, Z)$ το παράλληλο διάνυσμα.

Ευθεία από σημείο και κάθετη σε επίπεδο

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C} \qquad \text{ή} \quad x=x_0+At,\ \ y=y_0+Bt,\ \ z=z_0+Ct$$

όπου (x_0, y_0, z_0) το σημείο και $Ax + By + Cz + D = 0$ το επίπεδο.

Γωνία δύο ευθειών

Για τη γωνία ψ μεταξύ δύο ευθειών με συνημίτονα κατεύθυνσης l_1, m_1, n_1 και l_2, m_2, n_2 ισχύει

$$\cos\psi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

Αν οι παραμετρικές εξισώσεις των ευθειών είναι $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda_1\mathbf{a}_1$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \lambda_2\mathbf{a}_2$, τότε ($\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων)

$$\cos\psi = \frac{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|}$$

Απόσταση σημείου από ευθεία

$$d_0' = \left\{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1|^2 - [(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{v}_0]^2\right\}^{1/2}$$

όπου $\mathbf{r}_0$ είναι το σημείο, $\mathbf{r}_1$ ένα σημείο της ευθείας και $\mathbf{v}_0$ μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της ευθείας.

Επίπεδο

Γενική εξίσωση

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{r} + D = 0,$$

όπου $\mathbf{A} = (A, B, C)$ είναι το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο.

Επίπεδο από τρία σημεία

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ή} \qquad [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_3)] = 0$$

όπου (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3$, είναι οι συντεταγμένες των τριών σημείων και $[\mathbf{abc}]$ το τριπλό μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων.

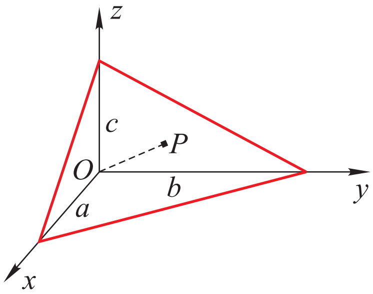
Επίπεδο από τις τομές με τους άξονες

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Κανονική μορφή της εξίσωσης ενός επιπέδου

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = d$$

όπου d είναι η απόσταση του O από το επίπεδο και α, β, γ οι γωνίες της κάθετης OP με τους θετικούς άξονες Ox, Oy, Oz.



Σχ. 5-44

Μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων που ακολουθούν είναι όλοι *γραμμικοί*. Συνεπώς, ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού n των x, y, z παραμένει πολυώνυμο βαθμού n των x', y', z' μετά το μετασχηματισμό.

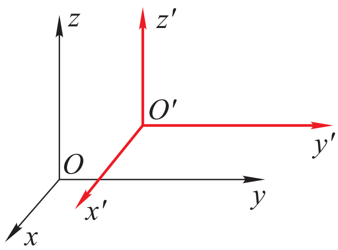
Μεταφορά

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases}$$

(x, y, z) = συντεταγμένες ως προς το σύστημα O

(x', y', z') = συντεταγμένες ως προς το σύστημα O'

(x_0, y_0, z_0) = συντεταγμένες του σημείου O' ως προς το σύστημα O



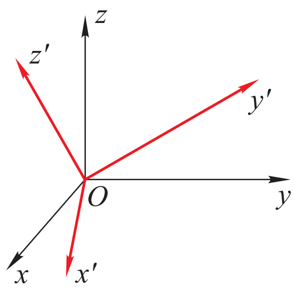
Σχ. 5-45

Στροφή

$$\begin{cases} x = l_1x' + l_2y' + l_3z' \\ y = m_1x' + m_2y' + m_3z' \\ z = n_1x' + n_2y' + n_3z' \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} x' = l_1x + m_1y + n_1z \\ y' = l_2x + m_2y + n_2z \\ z' = l_3x + m_3y + n_3z \end{cases}$$



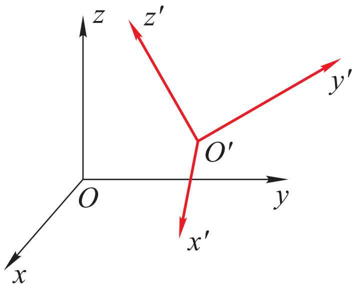
Σχ. 5-46

όπου (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης των αξόνων Ox', Oy', Oz' ως προς το σύστημα O.

Μεταφορά και στροφή

$$\begin{cases} x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z' + x_0 \\ y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z' + y_0 \\ z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z' + z_0 \end{cases}$$

ή
$$\begin{cases} x' = l_1(x - x_0) + m_1(y - y_0) + n_1(z - z_0) \\ y' = l_2(x - x_0) + m_2(y - y_0) + n_2(z - z_0) \\ z' = l_3(x - x_0) + m_3(y - y_0) + n_3(z - z_0) \end{cases}$$



Σχ. 5-47

(x_0, y_0, z_0) = συντεταγμένες του σημείου O' ως προς το σύστημα O.

Διαδοχικοί μετασχηματισμοί

Δύο ή περισσότεροι γραμμικοί μετασχηματισμοί (μεταφορές, στροφές ή συνδυασμοί αυτών) ισοδυναμούν με έναν κατάλληλο γραμμικό μετασχηματισμό.

Επιφάνειες

Σφαίρα (Σχ. 5-48)

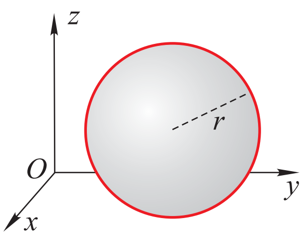
Εξίσωση επιφάνειας σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

(x_0, y_0, z_0) = κέντρο της σφαίρας

R = ακτίνα της σφαίρας

Κάθε τομή με επίπεδο που απέχει από το κέντρο λιγότερο από R είναι κύκλος.



Σχ. 5-48

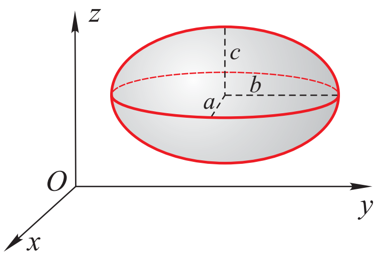
Ελλειψοειδές (Σχ. 5-49)

Εξίσωση επιφάνειας

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

(x_0, y_0, z_0) = κέντρο

a, b, c = ημιάξονες



Σχ. 5-49

Κάθε πραγματική τομή με επίπεδο είναι κλειστή δευτεροβάθμια καμπύλη, άρα είναι έλλειψη (με ειδική περίπτωση τον κύκλο).

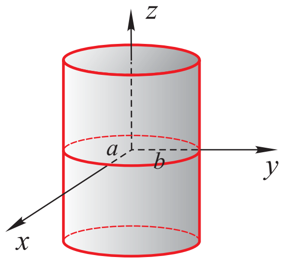
Ελλειπτικός κύλινδρος (Σχ. 5-50)

Για κύλινδρο παράλληλο προς τον άξονα Oz η εξίσωση της επιφάνειας είναι

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

όπου a, b οι ημιάξονες της ελλειπτικής διατομής.

Κάθε τομή με επίπεδο μη παράλληλο προς τον άξονα των z είναι έλλειψη (με ειδική περίπτωση τον κύκλο).



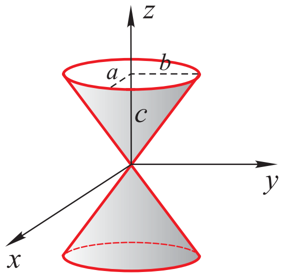
Σχ. 5-50

Ελλειπτικός κώνος (Σχ. 5-51)

Για κώνο με άξονα παράλληλο προς τον άξονα Oz η εξίσωση της επιφάνειας είναι

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Μια τομή με επίπεδο είναι έλλειψη (αν είναι κλειστή καμπύλη), υπερβολή (αν έχει δύο τμήματα) ή παραβολή (αν είναι ανοικτή με ένα τμήμα).



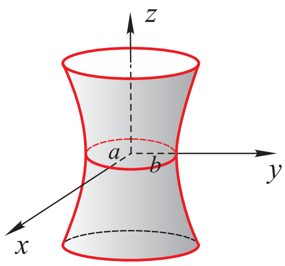
Σχ. 5-51

Μονόχωνο υπερβολοειδές (Σχ. 5-52)

Εξίσωση επιφάνειας

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Οι οριζόντιες τομές είναι ελλείψεις. Οι κατακόρυφες τομές (με επίπεδο της μορφής $Ax + By + C = 0$) είναι υπερβολές.



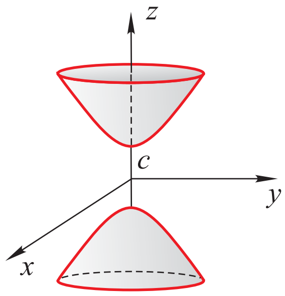
Σχ. 5-52

Δίχωνο υπερβολοειδές (Σχ. 5-53)

Εξίσωση επιφάνειας

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Οι οριζόντιες τομές για $|z| > c$ είναι ελλείψεις. Οι κατακόρυφες τομές (με επίπεδο της μορφής $Ax + By + C = 0$) είναι υπερβολές.



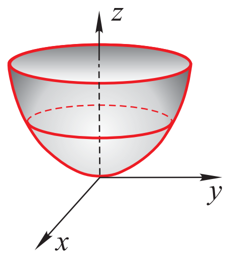
Σχ. 5-53

Ελλειπτικό παραβολοειδές (Σχ. 5-54)

Εξίσωση επιφάνειας

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c}=0$$

Οι τομές με επίπεδο (οριζόντιες με $z > 0$ ή πλάγιες) είναι ελλείψεις. Οι κατακόρυφες τομές (με επίπεδο της μορφής $Ax + By + C = 0$) είναι παραβολές.



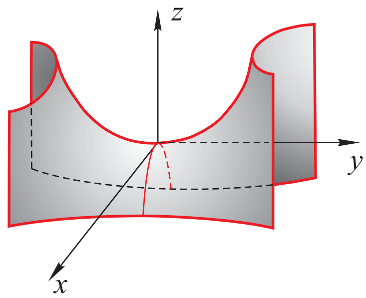
Σχ. 5-54

Υπερβολικό παραβολοειδές (Σχ. 5-55)

Εξίσωση επιφάνειας

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c}=0$$

Οι τομές με επίπεδο είναι υπερβολές, αν έχουν δύο τμήματα (π.χ. οριζόντιες τομές με z = σταθ.) ή παραβολές, αν έχουν ένα τμήμα (π.χ. κατακόρυφες τομές με x = σταθ. ή y = σταθ.)..



Σχ. 5-55

6 ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

6.1 Ορισμοί

Συναρτήσεις

Γενικά, με τον όρο *συνάρτηση* εννοούμε μια απεικόνιση (αντιστοίχιση σύμφωνα με έναν κανόνα) από ένα σύνολο D σε ένα σύνολο R, έτσι ώστε κάθε στοιχείο του D να αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο του R. Τα D και R ονομάζονται *πεδίο ορισμού* και *πεδίο τιμών* αντίστοιχα και αποτελούν αναπόσπαστο μέρος του ορισμού της συνάρτησης. Συνήθως τα D και R είναι σύνολα αριθμών (π.χ. ένα ευθύγραμμο τμήμα ή ένα δισδιάστατο χωρίο). Μια συνάρτηση αποδίδεται με το συμβολισμό f: $X \to Y$ ή απλούστερα $y = f(x)$, όπου η *ανεξάρτητη* μεταβλητή x μπορεί να περιστάνει μία ή περισσότερες πραγματικές ή μιγαδικές μεταβλητές με y την αντίστοιχη τιμή της *εξαρτημένης μεταβλητής*. Η τιμή x απεικονίζεται *μονοσήμαντα* στην τιμή y.

Όρια

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x έχει όριο το L (ή τείνει στο L) όταν το x τείνει στο x_0, αν για οποιοδήποτε θετικό αριθμό ε υπάρχει ένας θετικός αριθμός δ τέτοιος ώστε η $0 < |x - x_0| < \delta$ να έπεται την $|f(x) - L| < \varepsilon$. Γενικά, το όριο συμβολίζεται με $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Ο ορισμός ισχύει και για $x_0 = +\infty$ ή $-\infty$, εφόσον για οποιοδήποτε θετικό αριθμό ε υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε η $x > M$ να έπεται την $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ τείνει στο $+\infty$ (στο $-\infty$) όταν το x τείνει στο x_0, αν για οποιοδήποτε θετικό (αρνητικό) αριθμό M υπάρχει αριθμός δ τέτοιος ώστε η $0 < |x - x_0| < \delta$ να έπεται την $f(x) > M$ $(f(x) < M)$.

Ιδιότητες των ορίων

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0}[af(x)] = a \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0}[f(x)g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \qquad [\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0]$$

Αξιοσημείωτα όρια

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x} = e \cong 2.71828\ldots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{c^x-1}{x} = \ln c \qquad \lim_{x\to 0} x^x = 1$$

$$\lim_{x\to 0} x^a \ln x = \lim_{x\to\infty} x^{-a}\ln x = \lim_{x\to\infty} x^a e^{-x} = 0 \qquad [a>0]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x} = 1$$

Απροσδιόριστες μορφές

Ο υπολογισμός ορίων οδηγεί μερικές φορές σε εκφράσεις χωρίς σαφή σημασία, όπως οι $0/0$, ∞/∞, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$. Μια τέτοια έκφραση μπορεί να αναχθεί στην $0/0$ (με διαίρεση ή λογαρίθμιση) και να υπολογιστεί με τον ακόλουθο *κανόνα του L'Hôpital*:

Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες σ' ένα ανοικτό διάστημα (a, b) που περιλαμβάνει το x_0 και ότι $f(x_0) = g(x_0) = 0$, αλλά $g'(x) \neq 0$ σε κάθε σημείο του (a, b) εκτός ίσως από το x_0. Τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

με την προϋπόθεση ότι το όριο στο δεξιό μέλος υπάρχει. Το ίδιο ισχύει αν το x_0 είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

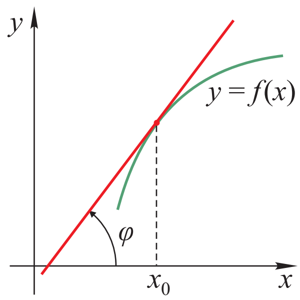
Παράγωγος

Αν $y = f(x)$, η *παράγωγος* της y ή της $f(x)$ ως προς x στο σημείο (x, y) ορίζεται με τη σχέση

$$y' = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

όπου $h = \Delta x$. Η παράγωγος συμβολίζεται ακόμα με $f'(x)$, dy/dx ή df/dx.

Η παράγωγος μιας συνάρτησης $y = f(x)$ σε ένα σημείο $x = x_0$ ισούται με την εφαπτόμενη της γωνίας φ που σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο αυτό με τον άξονα x, δηλαδή $y' = \tan\varphi$.



Σχ. 6-1

Από την ιδιότητα αυτή αλλά και τον ορισμό είναι φανερό ότι η y' εκφράζει ουσιαστικά το ρυθμό μεταβολής της y στο σημείο $x = x_0$.

6.2 Γενικοί Κανόνες Παραγώγισης

Στους παρακάτω τύπους α) u, υ, w είναι συναρτήσεις του x, β) c, n είναι σταθερές, γ) e = 2.71828… είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων, δ) ln$u$ είναι ο φυσικός λογάριθμος του u (όπου δεχόμαστε u > 0) και όλες οι γωνίες είναι σε ακτίνια.

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

$$\frac{d}{dx}(cx) = c$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$ [n ακέραιος ή πραγματικός] $$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ $$\frac{d(1/x)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm \upsilon \pm w \pm \cdots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{d\upsilon}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \cdots$$

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u\upsilon) = u\frac{d\upsilon}{dx} + \upsilon\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u\upsilon w) = u\upsilon\frac{dw}{dx} + uw\frac{d\upsilon}{dx} + \upsilon w\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{\upsilon}\right) = \frac{\upsilon(du/dx) - u(d\upsilon/dx)}{\upsilon^2}$$

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$ [παράγωγος σύνθετης συνάρτησης]

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{dx/du}$$ [παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$ [αν η συνάρτηση δίνεται σε παραμετρική μορφή $x = x(t),\ y = y(t)$]

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$ [αν η συνάρτηση $y = f(x)$ δίνεται σε πλεγμένη μορφή $F(x, y) = 0$]

$$\frac{d}{dx}u^{\upsilon} = \frac{d}{dx}e^{\upsilon \ln u} = e^{\upsilon \ln u}\frac{d}{dx}(\upsilon \ln u) = \upsilon u^{\upsilon-1}\frac{du}{dx} + u^{\upsilon}\ln u\frac{d\upsilon}{dx}$$

Δεύτερη παράγωγος $$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = y''$$

Τρίτη παράγωγος $$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = y'''$$

Παράγωγος τάξης n $$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}x^a = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$$

6.3 Παράγωγοι Στοιχειωδών Συναρτήσεων

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d^n}{dx^n}\sin x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \qquad \frac{d^n}{dx^n}\cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left[-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x \le \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad [0 \le \cos^{-1}x \le ¿]$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \left[-\frac{¿}{2} < \tan^{-1}x < \frac{¿}{2}\right]$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x = \frac{-1}{1+x^2} \qquad [0 < \cot^{-1}x < ¿]$$

[$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ παριστάνουν τους πρωτεύοντες κλαδους.]

Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\log_c x = \frac{\log_c e}{x} \qquad c \ne 0, 1$$

$$\frac{d}{dx}c^x = c^x \ln c$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \frac{d^n}{dx^n}\ln x = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$$

Υπερβολικές συναρτήσεις

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \cosh^{-1} x > 0, \quad x > 1 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}} & \cosh^{-1} x < 0, \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \qquad x^2 < 1$$

$$\frac{d}{dx}\coth^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \qquad x^2 > 1$$

6.4 Μερικές Παράγωγοι

Αν $f(x, y)$ είναι μια συνάρτηση ανεξάρτητων μεταβλητών x και y, η *μερική παράγωγος* της $f(x, y)$ ως προς x ορίζεται με τη σχέση

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad \text{με } y = \text{σταθ.}$$

Όμοια, η μερική παράγωγος της $f(x, y)$ ως προς y ορίζεται με τη σχέση

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad \text{με } x = \text{σταθ.}$$

Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης μπορούν να ορισθούν ως εξής:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Οι δύο προηγούμενες σχέσεις δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, αν η συνάρτηση και οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς. Στην περίπτωση αυτή δεν έχει σημασία η σειρά παραγώγισης. Γενικά, η μερική παράγωγος ως προς μια ανεξάρτητη μεταβλητή βρίσκεται με απλή παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή αυτή θεωρώντας τις άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές σαν σταθερές.

Το *διαφορικό* της $f(x, y)$ ορίζεται με τη σχέση

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

όπου $dx = \Delta x$ και $dy = \Delta y$. Επέκταση σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών γίνεται εύκολα.

Κανόνες παραγώγισης

Γενικά, για τον υπολογισμό μερικών παραγώγων ισχύουν οι κανόνες παραγώγισης της Παραγ. 6.2. Επιπλέον διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

Αν $y = f(u, \upsilon, \ldots, w)$, όπου $u, \upsilon, \ldots$, είναι συναρτήσεις μίας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής x, τότε

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \upsilon}\frac{d\upsilon}{dx} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx}$$

Αν $y = f(u, \upsilon, \ldots, w)$, όπου $u, \upsilon, \ldots$, είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial \upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x_k} \quad \text{για } k = 1, 2, \ldots, n$$

6.5 Διαφορικά

Αν $y = f(x)$ είναι μια συνάρτηση, για μια αύξηση της ανεξάρτητης μεταβλητής κατά Δx η εξαρτημένη μεταβλητή αυξάνει κατά $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Ορίζουμε

Διαφορικό της x: $dx = \Delta x$

Διαφορικό της y: $dy = f'(x)dx$

Είναι $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon = \dfrac{dy}{dx} + \varepsilon$

όπου $\varepsilon \to 0$, όταν $\Delta x \to 0$. Συνεπώς

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

$d(u \pm \upsilon \pm w \ldots) = du \pm d\upsilon \pm dw \ldots$

$d(u\upsilon) = ud\upsilon + \upsilon du$

$d\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right) = \dfrac{\upsilon du - ud\upsilon}{\upsilon^2}$

$d(u^n) = nu^{n-1}du$

$d(\sin u) = \cos u\, du$

$d(\cos u) = -\sin u\, du$

7 ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

7.1 Ορισμοί

Μία συνάρτηση $f(x)$ έχει *αόριστο ολοκλήρωμα* (ή παράγουσα ή αντιπαράγωγο)

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

στο διάστημα (a, b) αν και μόνο αν υπάρχει μια συνάρηση $F(x)$ τέτοια ώστε να υπάρχει η παράγωγος $F'(x)$ και να είναι $F'(x) = f(x)$. Αν η $F(x)$ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$, τότε και κάθε συνάρτηση της μορφής $F(x) + c$, όπου c αυθαίρετη σταθερή, είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$. Η $f(x)$ καλείται *ολοκληρωτέα συνάρτηση* και η x *μεταβλητή ολοκλήρωσης*.

Εφόσον $F'(x) = f(x)$, μπορούμε να γράψουμε και την ταυτοτική σχέση

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int \frac{dF}{dx}\,dx = \int dF$$

7.2 Γενικοί Κανόνες

$$\int f'(x)\,dx = f(x)$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

$$\int (u \pm \upsilon)dx = \int udx \pm \int \upsilon dx$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int u\,d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du \\
&\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \\
&\int f^{(n)}gdx = f^{(n-1)}g - f^{(n-2)}g' + f^{(n-3)}g'' - \cdots (-1)^n \int fg^{(n)}dx
\end{aligned}\right\}\ \text{Ολοκλήρωση κατά παράγοντες}$$

$$\int \frac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2}\,dx = \frac{u}{\upsilon}$$

$$\int \frac{u'\upsilon - u\upsilon'}{u\upsilon}\,dx = \ln\frac{u}{\upsilon}$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\int f(u)du \qquad \text{όπου } u = ax$$

$$\int g\{f(x)\}dx = \int g(u)\frac{dx}{du}du = \int \frac{g(u)}{f'(x)}du \qquad \text{όπου } u = f(x)$$

7.3 Μέθοδοι Υπολογισμού Αόριστων Ολοκληρωμάτων

Στην πράξη μπορεί ένα ολοκλήρωμα να αναχθεί σε άλλο απλούστερο με μια αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης ή της ολοκληρωτέας συνάρτησης, δηλαδή με ένα μετασχηματισμό του ολοκληρώματος.

Αν η μεταβλητή ολοκλήρωσης εμφανίζεται με μία συγκεκριμένη παράσταση u στην ολοκληρωτέα συνάρτηση, τότε δοκιμάζουμε ως νέα μεταβλητή ολοκλήρωσης την u. Έτσι έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(u)du \qquad \text{με } u = ax + b$$

$$\int f\left(\sqrt{ax+b}\right)dx = \frac{2}{a}\int uf(u)du \qquad \text{με } u = \sqrt{ax+b}$$

$$\int f\left(\sqrt[n]{ax+b}\right)dx = \frac{n}{a}\int u^{n-1}f(u)du \qquad \text{με } u = \sqrt[n]{ax+b}$$

$$\int f\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = n(ad-bc)\int f(u)\frac{u^{n-1}}{(cu^n-a)^2}du \qquad \text{με } u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση εξαρτάται μόνο από μία παράσταση της μορφής $(a^2 \pm x^2)^{1/2}$, τότε δοκιμάζουμε κάποια τριγωνομετρική συνάρτηση του x.

$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx = a\int f(a\cos u)\cos u\,du \qquad \text{με } x = a\sin u$$

$$\int f\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)dx = a\int f\left(\frac{a}{\cos u}\right)\frac{1}{\cos^2 u}du \qquad \text{με } x = a\tan u$$

Αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση εξαρτάται μόνο από μία παράσταση της μορφής $(x^2 \pm a^2)^{1/2}$, τότε δοκιμάζουμε κάποια υπερβολική συνάρτηση του x.

$$\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx = a\int f(a\sinh u)\sinh u\,du \qquad \text{με } x = a\cosh u$$

$$\int f\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)dx = a\int f(a\cosh u)\cosh u\,du \qquad \text{με } x = a\sinh u$$

Αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση περιέχει μόνο e^{ax} ή $\ln x$ ή $\sin^{-1}x$, κτλ. χρησιμοποιούμε την παράσταση αυτή ως νέα μεταβλητή ολοκλήρωσης. Έτσι

$$\int f\left(e^{ax}\right)dx = \frac{1}{a}\int \frac{f(u)}{u}du \qquad \text{με } u = e^{ax}$$

$$\int f(\ln x)dx = \int f(u)e^{u}du \qquad \text{με } u = \ln x$$

$$\int f\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)dx = \int f(u)\cos u\,du \qquad \text{με } u = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

(όμοια για άλλες αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις)

Αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση περιέχει μόνο $\sin x$ και $\cos x$, χρησιμοποιούμε ως νέα μεταβλητή ολοκλήρωσης την $\tan(x/2)$.

$$\int f(\sin x,\, \cos x)\, dx = 2\int f\left(\frac{2u}{1+u^2},\, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2} \qquad \text{με } u = \tan\frac{x}{2}$$

Ομοια, αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση περιέχει μόνο $\sinh x$ και $\cosh x$, χρησιμοποιούμε ως νέα μεταβλητή ολοκλήρωσης την $\tanh(x/2)$.

$$\int f(\sinh x,\, \cosh x)\, dx = 2\int f\left(\frac{2u}{1-u^2},\, \frac{1+u^2}{1-u^2}\right)\frac{du}{1-u^2} \qquad \text{με } u = \tanh\frac{x}{2}$$

Αν η $f(x)$ είναι ρητή συνάρτηση του x (δηλαδή λόγος δύο πολυωνύμων), μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα πολυωνύμου του x και όρων της μορφής

$$\frac{c}{(x-a)^k}, \qquad \frac{cx+d}{(x^2+ax+b)^m}$$

και να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα ως το άθροισμα των ολοκληρωμάτων αυτών των όρων.

Αν η $f(x)$ περιέχει το x σε μια παράσταση της μορφής $x^m(ax^n+b)^p$ δοκιμάζουμε τις εξής αντικαταστάσεις: Αν $(m+1)/n =$ ακέραιος, θέτουμε $u = x^n$ και συνεχίζουμε με παραγοντική ολοκλήρωση ή θέτουμε $au + b = w$. Αν $(m+1)/n + p =$ ακέραιος, θέτουμε $u = x^{-n}$ και συνεχίζουμε με παραγοντική ολοκλήρωση ή θέτουμε $a + bu = w$. Αν $p =$ ακέραιος, αναπτύσσουμε τη δύναμη.

Αν η $f(x)$ περιέχει την παράσταση $(ax^2+bx+c)^{1/2}$ δοκιμάζουμε την αντικατάσταση $u = (2ax+b)/|4ac-b^2|^{1/2}$.

7.4 Στοιχειώδη Ολοκληρώματα

$$\int a dx = ax$$

$$\int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, & n \neq -1 \\ \ln x, & n = -1 \end{cases}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln \cos x$$

$$\int \cot x dx = \ln \sin x$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$$

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x$$

$$\int \cot^2 x dx = -\cot x - x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \qquad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x$$

$$\int \tanh x \, dx = \ln \cosh x$$

$$\int \coth x dx = \ln \sinh x$$

$$\int \sinh^2 x dx = \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x - x)$$

$$\int \cosh^2 x dx = \frac{\sinh 2x}{4} + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x + x)$$

$$\int \tanh^2 x dx = x - \tanh x$$

$$\int \coth^2 x dx = x - \coth x$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{x}{a} \qquad x^2 > a^2$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a} \qquad x^2 < a^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) = \sinh^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \cos^{-1} \left|\frac{a}{x}\right| \qquad x^2 > a^2,\ a > 0$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$$

7.5 Διάφορα Ολοκληρώματα

Με $ax+b$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}, & n \neq -1 \\ \dfrac{1}{a}\ln(ax+b) & n=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x\,dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b)$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{ax+b} = \frac{(ax+b)^2}{2a^3} - \frac{2b(ax+b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3}\ln(ax+b)$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{ax+b} = \frac{(ax+b)^3}{3a^4} - \frac{3b(ax+b)^2}{2a^4} + \frac{3b^2(ax+b)}{a^4} - \frac{b^3}{a^4}\ln(ax+b)$$

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^3(ax+b)} = \frac{2ax-b}{2b^2x^2} + \frac{a^2}{b^3}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = \frac{-1}{a(ax+b)}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln(ax+b)$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{ax+b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3(ax+b)} - \frac{2b}{a^3}\ln(ax+b)$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{(ax+b)^2}{2a^4} - \frac{3b(ax+b)}{a^4} + \frac{b^3}{a^4(ax+b)} + \frac{3b^2}{a^4}\ln(ax+b)$$

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = -\frac{a}{b^2(ax+b)} - \frac{1}{b^2 x} + \frac{2a}{b^3}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^3(ax+b)^2} = -\frac{(ax+b)^2}{2b^4x^2} + \frac{3a(ax+b)}{b^4 x} - \frac{a^3 x}{b^4(ax+b)} - \frac{3a^2}{b^4}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^3} = -\frac{1}{2(ax+b)^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^3} = -\frac{1}{a^2(ax+b)} + \frac{b}{2a^2(ax+b)^2}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^3} = \frac{2b}{a^3(ax+b)} - \frac{b^2}{2a^3(ax+b)^2} + \frac{1}{a^3}\ln(ax+b)$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(ax+b)^3} = \frac{x}{a^3} - \frac{3b^2}{a^4(ax+b)} + \frac{b^3}{2a^4(ax+b)^2} - \frac{3b}{a^4}\ln(ax+b)$$

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)^3} = \frac{a^2x^2}{2b^3(ax+b)^2} - \frac{2ax}{b^3(ax+b)} - \frac{1}{b^3}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^3} = -\frac{a}{2b^2(ax+b)^2} - \frac{2a}{b^3(ax+b)} - \frac{1}{b^3 x} + \frac{3a}{b^4}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^3(ax+b)^3} = \frac{a^4x^2}{2b^5(ax+b)} - \frac{(ax+b)^2}{2b^5x^2} - \frac{6a^2}{b^5}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$$

$$\int x(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}, \qquad n \neq -1, -2$$

$$\int \frac{x^n}{ax+b}\,dx = \frac{x^n}{na} - \frac{bx^{n-1}}{(n-1)a^2} + \frac{b^2x^{n-2}}{(n-2)a^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{b^{n-1}x}{1\cdot a^n} + \frac{(-1)^n b^n}{a^{n+1}}\ln(ax+b)$$

$$\int x^2(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^3} \qquad n \neq -1, -2, -3$$

$$\int x^m (ax+b)^n \, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}(ax+b)^n}{m+n+1} + \dfrac{nb}{m+n+1} \displaystyle\int x^m (ax+b)^{n-1} \, dx \\ \dfrac{x^m (ax+b)^{n+1}}{(m+n+1)a} - \dfrac{mb}{(m+n+1)a} \displaystyle\int x^{m-1} (ax+b)^n \, dx \\ \dfrac{-x^{m+1}(ax+b)^{n+1}}{(n+1)b} + \dfrac{m+n+2}{(n+1)b} \displaystyle\int x^m (ax+b)^{n+1} \, dx \end{cases}$$

Με ρίζες

$$\int \sqrt{ax+b} \, dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3}$$

$$\int x\sqrt{ax+b} \, dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2} \sqrt{(ax+b)^3}$$

$$\int x^2 \sqrt{ax+b} \, dx = \frac{2(15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)}{105a^3} \sqrt{(ax+b)^3}$$

$$\int x^3 \sqrt{ax+b} \, dx = \frac{2(35a^3x^3 - 30a^2bx^2 + 24ab^2x - 16b^3)}{315a^4} \sqrt{(ax+b)^3}$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^3} dx = -\frac{(ax+2b)\sqrt{ax+b}}{4bx^2} - \frac{a^2}{8b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2} \sqrt{ax+b}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2)}{15a^3} \sqrt{ax+b}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2(5a^3x^3-6a^2bx^2+8ab^2x-16b^3)}{35a^4}\sqrt{ax+b}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right), & b>0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{ax+b}{-b}}, & b<0 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{ax+b}} = \frac{3ax-2b}{4b^2x^2}\sqrt{ax+b} + \frac{3a^2}{8b^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$

$$\int x^n\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2x^n}{(2n+3)a}\sqrt{(ax+b)^3} - \frac{2nb}{(2n+3)a}\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\,dx$$

$$= \frac{2}{a^{n+1}}\int u^2(u^2-b)^n\,du, \qquad u=\sqrt{ax+b}$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^n}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{2(n-1)}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}$$

$$= -\frac{\sqrt{(ax+b)^3}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-5)a}{(2n-2)b}\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^{n-1}}\,dx$$

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{(2n+1)a} - \frac{2nb}{(2n+1)a}\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}}\,dx$$

$$= \frac{2}{a^{n+1}}\int (u^2-b)^n\,du, \qquad u=\sqrt{ax+b}$$

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}$$

$$\int (ax+b)^{n/2}\,dx = \frac{2(ax+b)^{(n+2)/2}}{a(n+2)}$$

$$\int x(ax+b)^{n/2}\,dx = \frac{2(ax+b)^{(n+4)/2}}{a^2(n+4)} - \frac{2b(ax+b)^{(n+2)/2}}{a^2(n+2)}$$

$$\int x^2(ax+b)^{n/2}\,dx = \frac{2(ax+b)^{(n+6)/2}}{a^3(n+6)} - \frac{4b(ax+b)^{(n+2)/2}}{a^3(n+4)} + \frac{2b^2(ax+b)^{(n+2)/2}}{a^3(n+2)}$$

$$\int \frac{(ax+b)^{n/2}}{x}\,dx = \frac{2(ax+b)^{n/2}}{n} + b\int \frac{(ax+b)^{(n-2)/2}}{x}\,dx$$

$$\int \frac{(ax+b)^{n/2}}{x^2}\,dx = -\frac{(ax+b)^{(n+2)/2}}{bx} + \frac{na}{2b}\int \frac{(ax+b)^{n/2}}{x}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)^{n/2}} = \frac{2}{(n-2)b(ax+b)^{(n-2)/2}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{x(ax+b)^{(n-2)/2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^{n/2}} = \frac{-1}{bx(ax+b)^{(n-2)/2}} - \frac{na}{2b}\int \frac{dx}{x(ax+b)^{n/2}}$$

Με $ax+b$ και $cx+d$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx = \frac{ax}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\ln(cx+d)$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad}\ln\left(\frac{cx+d}{ax+b}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad}\left\{\frac{b}{a}\ln(ax+b) - \frac{d}{c}\ln(cx+d)\right\}$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad}\left\{\frac{1}{ax+b} + \frac{c}{bc-ad}\ln\left(\frac{cx+d}{ax+b}\right)\right\}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad}\left\{\frac{d}{bc-ad}\ln\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) - \frac{b}{a(ax+b)}\right\}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{b^2}{(bc-ad)a^2(ax+b)} + \frac{1}{(bc-ad)^2}\left\{\frac{d^2}{c}\ln(cx+d) + \frac{b(bc-2ad)}{a^2}\ln(ax+b)\right\}$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^m(cx+d)^n} = -\frac{1}{(n-1)(bc-ad)}\left\{\frac{1}{(ax+b)^{m-1}(cx+d)^{n-1}}\right. \\ \left. +a(m+n-2)\int \frac{dx}{(ax+b)^m(cx+d)^{n-1}}\right\}$$

$$\int \frac{(ax+b)^m}{(cx+d)^n}dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-1)(bc-ad)}\left\{\dfrac{(ax+b)^{m+1}}{(cx+d)^{n-1}} + (n-m-2)a\displaystyle\int \dfrac{(ax+b)^m}{(cx+d)^{n-1}}dx\right\} \\ \dfrac{-1}{(n-m-1)c}\left\{\dfrac{(ax+b)^m}{(cx+d)^{n-1}} + m(bc-ad)\displaystyle\int \dfrac{(ax+b)^{m-1}}{(cx+d)^n}dx\right\} \\ \dfrac{-1}{(n-1)c}\left\{\dfrac{(ax+b)^m}{(cx+d)^{n-1}} - ma\displaystyle\int \dfrac{(ax+b)^{m-1}}{(cx+d)^{n-1}}dx\right\} \end{cases}$$

Με ρίζες

$$\int \frac{cx+d}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2(acx+3ad-2bc)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$$

$$\int (cx+d)\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(3acx+5ad-2bc)}{15a^2}\sqrt{ax+b}$$

$$\int \frac{dx}{(cx+d)\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{c(bc-ad)}}\ln\left(\dfrac{c\sqrt{(ax+b)}-\sqrt{c(bc-ad)}}{c\sqrt{(ax+b)}+\sqrt{c(bc-ad)}}\right), & c(bc-ad)>0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{c(ad-bc)}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{c(ax+b)}{ad-bc}}, & c(bc-ad)<0 \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{cx+d}dx = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{ax+b}}{c} + \dfrac{\sqrt{c(bc-ad)}}{c^2}\ln\left(\dfrac{c\sqrt{(ax+b)}-\sqrt{c(bc-ad)}}{c\sqrt{(ax+b)}+\sqrt{c(bc-ad)}}\right), & c(bc-ad)>0 \\ \dfrac{2\sqrt{ax+b}}{c} - \dfrac{2\sqrt{c(ad-bc)}}{c^2}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{c(ax+b)}{ad-bc}}, & c(bc-ad)<0 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{ac}}\ln\left(\sqrt{ac(ax+b)}+a\sqrt{cx+d}\right), & ac>0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{-ac}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{-c(ax+b)}{a(cx+d)}}, & ac<0 \end{cases}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}} = \frac{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}}{ac} - \frac{bc+ad}{2ac}\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}}$$

$$\int \sqrt{(ax+b)(cx+d)}\,dx = \frac{2acx+bc+ad}{4ac}\sqrt{(ax+b)(cx+d)} - \frac{(bc-ad)^2}{8ac}\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}}$$

$$\int \sqrt{\frac{cx+d}{ax+b}}\,dx = \frac{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}}{a} + \frac{ad-bc}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}}$$

$$\int \frac{dx}{(cx+d)\sqrt{(ax+b)(cx+d)}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{(ad-bc)\sqrt{cx+d}}$$

$$\int (cx+d)^n\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(cx+d)^{n+1}\sqrt{ax+b}}{(2n+3)c} + \frac{bc-ad}{(2n+3)c}\int \frac{(cx+d)^n}{\sqrt{ax+b}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{(cx+d)^n\sqrt{ax+b}} = \frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)(ad-bc)(cx+d)^{n-1}} + \frac{(2n-3)a}{2(n-1)(ad-bc)}\int \frac{dx}{(cx+d)^{n-1}\sqrt{ax+b}}$$

$$\int \frac{(cx+d)^n}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2(cx+d)^n\sqrt{ax+b}}{(2n+1)a} + \frac{2n(ad-bc)}{(2n+1)a}\int \frac{(cx+d)^{n-1}\,dx}{\sqrt{ax+b}}$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{(cx+d)^n}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)c(cx+d)^{n-1}} + \frac{a}{2(n-1)c}\int \frac{dx}{(cx+d)^{n-1}\sqrt{ax+b}}$$

Mε $x^2 + a^2$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^2+a^2} = x - a\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x^3dx}{x^2+a^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(x^2+a^2)$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{1}{a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)} = -\frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(cx+d)(x^2+a^2)} = \frac{1}{(a^2c^2+d^2)}\left[c\ln(cx+d) - \frac{c}{2}\ln(x^2+a^2) + \frac{d}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2(x^2+a^2)}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{a^2}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{x}{2a^4(x^2+a^2)} - \frac{3}{2a^5}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2+a^2)} - \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2+a^2)} + \frac{3}{8a^5}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{-1}{4(x^2+a^2)^2}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{-x}{4(x^2+a^2)^2} + \frac{x}{8a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{8a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{-1}{2(x^2+a^2)} + \frac{a^2}{4(x^2+a^2)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{1}{2a^4(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^6}\ln\frac{x^2}{x^2+a^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^3} = \frac{-1}{a^6x} - \frac{x}{4a^4(x^2+a^2)^2} - \frac{7x}{8a^6(x^2+a^2)} - \frac{15}{8a^7}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^3} = \frac{-1}{2a^6x^2} - \frac{1}{a^6(x^2+a^2)} - \frac{1}{4a^4(x^2+a^2)^2} - \frac{3}{2a^8}\ln\frac{x^2}{x^2+a^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \int \frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - a^2\int \frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$\int \frac{dx}{x^m(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(x^2+a^2)^n}$$

Με ρίζες

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \sinh^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2+a^2}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3}$$

$$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} - \frac{a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int x^3\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{3/2}}{3}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2x^2} - \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4x} - \frac{x}{a^4\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{3}{2a^5}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

$$\int (x^2+a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int x(x^2+a^2)^{3/2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{5}$$

$$\int x^2(x^2+a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{5/2}}{6} - \frac{a^2x(x^2+a^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{x^2+a^2}}{16} - \frac{a^6}{16}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int x^3(x^2+a^2)^{3/2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{7/2}}{7} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{5/2}}{5}$$

$$\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{x^2+a^2} - a^3\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x^2}dx = -\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x} + \frac{3x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{3}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x^3}dx = -\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{(2n+1)/2}} = \frac{-1}{(2n-1)(x^2+a^2)^{(2n-1)/2}}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)^{(2n+1)/2}} = \frac{-1}{(2n-3)(x^2+a^2)^{(2n-3)/2}} + \frac{a^2}{(2n-1)(x^2+a^2)^{(2n-1)/2}}$$

$$\int x(x^2+a^2)^{(2n+1)/2}dx = \frac{(x^2+a^2)^{(2n+3)/2}}{2n+3}$$

$$\int x^3(x^2+a^2)^{(2n+1)/2}dx = \frac{(x^2+a^2)^{(2n+5)/2}}{2n+5} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{(2n+3)/2}}{2n+3}$$

Mε $x^2 - a^2$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$= -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a} \qquad x^2 > a^2$$

$$= -\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a} \qquad x^2 < a^2$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-a^2\right|$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^2-a^2} = x + \frac{a}{2}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\int \frac{x^3dx}{x^2-a^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x^2-a^2\right|$$

$$\int \frac{dx}{x\left(x^2-a^2\right)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x^2-a^2}{x^2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)} = \frac{1}{a^2x} + \frac{1}{2a^3}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^4}\ln\left|\frac{x^2}{x^2-a^2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-x}{2a^2(x^2-a^2)} - \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-1}{2(x^2-a^2)}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-x}{2(x^2-a^2)} + \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-a^2}{2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-a^2\right|$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^2} = \frac{-1}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left|\frac{x^2}{x^2-a^2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)^2} = \frac{-1}{a^4x} - \frac{x}{2a^4(x^2-a^2)} - \frac{3}{4a^5}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^2} = \frac{-1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2-a^2)} + \frac{1}{a^6}\ln\left|\frac{x^2}{x^2-a^2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{-x}{2(n-1)a^2(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2-a^2)^{n-2}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{n-1}}$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \int \frac{x^{m-2}dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + a^2\int \frac{x^{m-2}dx}{(x^2-a^2)^n}$$

$$\int \frac{dx}{x^m(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(x^2-a^2)^{n-1}}$$

Με ρίζες του $x^2 - a^2$ $(x^2 > a^2)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{x^2-a^2}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| \qquad x^2 > a^2$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right|$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3}$$

$$\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x(x^2-a^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2x\sqrt{x^2-a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$\int x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{5/2}}{5} + \frac{a^2(x^2-a^2)^{3/2}}{3}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right|$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^3}dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right|$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln x + \sqrt{x^2-a^2}$$

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{1}{a^3}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right|$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^4x} - \frac{x}{a^4\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{3}{2a^5}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right|$$

$$\int (x^2-a^2)^{3/2}dx = \frac{x(x^2-a^2)^{3/2}}{4} - \frac{3a^2x\sqrt{x^2-a^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$\int x(x^2-a^2)^{3/2}dx = \frac{(x^2-a^2)^{5/2}}{5}$$

$$\int x^2(x^2-a^2)^{3/2}dx = \frac{x(x^2-a^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2x(x^2-a^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{x^2-a^2}}{16} + \frac{a^6}{16}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$\int x^3(x^2-a^2)^{3/2}\,dx=\frac{(x^2-a^2)^{7/2}}{7}+\frac{a^2(x^2-a^2)^{5/2}}{5}$$

$$\int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x}\,dx=\frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3}-a^2\sqrt{x^2-a^2}+a^3\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right|$$

$$\int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x^2}\,dx=-\frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x}+\frac{3x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{3}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$\int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x^3}\,dx=-\frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{2x^2}+\frac{3\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{3}{2}a\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right|$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^{(2n+1)/2}}=\frac{-1}{(2n-1)(x^2-a^2)^{(2n-1)/2}}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2-a^2)^{(2n+1)/2}}=\frac{-1}{(2n-3)(x^2-a^2)^{(2n-3)/2}}-\frac{a^2}{(2n-1)(x^2-a^2)^{(2n-1)/2}}$$

$$\int x(x^2-a^2)^{(2n+1)/2}\,dx=\frac{(x^2-a^2)^{(2n+3)/2}}{2n+3}$$

Με ρίζες του $a^2 - x^2$ $(a^2 > x^2)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3}-a^2\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3}$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8} + \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{(a^2-x^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(a^2-x^2)^{3/2}}{3}$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$$

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$$

$$\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^4 x} + \frac{x}{a^4\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{3}{2a^4\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{3}{2a^5}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$$

$$\int (a^2-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int x(a^2-x^2)^{3/2}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{5/2}}{5}$$

$$\int x^2(a^2-x^2)^{3/2}\,dx = -\frac{x(a^2-x^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2x(a^2-x^2)^{3/2}}{24} + \frac{a^4x\sqrt{a^2-x^2}}{16} + \frac{a^6}{16}\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int x^3(a^2-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{(a^2-x^2)^{7/2}}{7} - \frac{a^2(a^2-x^2)^{5/2}}{5}$$

$$\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x}\,dx = \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{a^2-x^2} - a^3\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$$

$$\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x^2}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x} - \frac{3x\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{3}{2}a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x^3}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{3a}{2}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$$

$$\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^{(2n+1)/2}} = \frac{1}{(2n-1)(a^2-x^2)^{(2n-1)/2}}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(a^2-x^2)^{(2n+1)/2}} = \frac{-1}{(2n-3)(a^2-x^2)^{(2n-3)/2}} + \frac{a^2}{(2n-1)(a^2-x^2)^{(2n-1)/2}}$$

$$\int x(a^2-x^2)^{(2n+1)/2}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{(2n+3)/2}}{2n+3}$$

$$\int x^3(a^2-x^2)^{(2n+1)/2}\,dx = \frac{(a^2-x^2)^{(2n+5)/2}}{2n+5} - \frac{a^2(a^2-x^2)^{(2n+3)/2}}{2n+3}$$

Με $ax^k + b$

$$\int \frac{dx}{ax^2+b} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}\left(x\sqrt{\frac{a}{b}}\right), \qquad ab>0$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\frac{b+x\sqrt{-ab}}{b-x\sqrt{-ab}} \qquad ab<0$$

$$\int \frac{dx}{ax^3+b} = \frac{\lambda}{6b}\ln\frac{(x+\lambda)^2}{x^2-\lambda x+\lambda^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{3}b}\tan^{-1}\frac{2x-\lambda}{\lambda\sqrt{3}} \qquad \lambda = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{ax^3+b} = -\frac{1}{6a\lambda}\ln\frac{(x+\lambda)^2}{x^2-\lambda x+\lambda^2} + \frac{1}{\sqrt{3}a\lambda}\tan^{-1}\frac{2x-\lambda}{\lambda\sqrt{3}} \qquad \lambda = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{ax^3+b} = \frac{1}{3a}\ln(ax^3+b)$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{ax^3+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{ax^3+b}$$

$$\int \frac{dx}{(ax^3+b)^2} = \frac{x}{3b(ax^3+b)} + \frac{2}{3b}\int\frac{dx}{ax^3+b}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(ax^3+b)^2} = \frac{x^2}{3b(ax^3+b)} + \frac{1}{3b}\int\frac{x\,dx}{ax^3+b}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(ax^3+b)^2} = -\frac{1}{3b(ax^3+b)}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(ax^3+b)^2} = -\frac{x}{3b(ax^3+b)} + \frac{1}{3b}\int \frac{dx}{ax^3+b}$$

$$\int \frac{dx}{x(ax^3+b)} = \frac{1}{3b}\ln \frac{x^3}{ax^3+b}$$

$$\int \frac{dx}{x^2(ax^3+b)} = -\frac{1}{bx} - \frac{a}{b}\int \frac{x\,dx}{ax^3+b}$$

$$\int \frac{dx}{x^3(ax^3+b)} = -\frac{1}{2bx^2} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{ax^3+b}$$

$$\int \frac{dx}{x(ax^3+b)^2} = \frac{1}{3b(ax^3+b)} + \frac{1}{3b^2}\ln \frac{x^3}{ax^3+b}$$

$$\int x^n(ax^k+b)^m\,dx = \frac{x^{n-k+1}(ax^k+b)^{m+1}}{a(km+n+1)} - \frac{b(n-k+1)}{a(km+n+1)}\int x^{n-k}(ax^k+b)^m\,dx$$
$$= \frac{x^{n+1}(ax^k+b)^{m+1}}{b(n+1)} - \frac{a(km+k+n+1)}{b(n+1)}\int x^{n+k}(ax^k+b)^m\,dx$$

Με $ax^2 + bx + c$

Αν $b^2 = 4ac$, τότε $ax^2 + bx + c = a(x + b/2a)^2$ και είναι προτιμότερο να αναχθεί το ολοκλήρωμα σε άλλο απλούστερο πριν από τον υπολογισμό. Το ίδιο ισχύει και σε άλλες ειδικές περιπτώσεις, όπου ένα από τα a, b, c είναι μηδέν.

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}, & b^2 < 4ac \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ac+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|, & b^2 > 4ac \\[2ex] \dfrac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\dfrac{x-x_1}{x-x_2}\right|, & b^2 > 4ac \end{cases}$$

(x_1, x_2 είναι οι ρίζες της $ax^2 + bx + c = 0$)

$$\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)} = \frac{1}{2c}\ln\left|\frac{x^2}{ax^2+bx+c}\right| - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)} = \frac{b}{2c^2}\ln\left|\frac{ax^2+bx+c}{x^2}\right| - \frac{1}{cx} + \frac{b^2-2ac}{2c^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} = \frac{2ax+b}{(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} + \frac{2a}{4ac-b^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^2} = \frac{bx+2c}{(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)} + \frac{b}{b^2-4ac}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(ax^2+bx+c)^2} = \frac{(b^2-2ac)x+bc}{a(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} + \frac{2c}{4ac-b^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^2} = \frac{1}{2c(ax^2+bx+c)} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)^2} = \frac{-1}{cx(ax^2+bx+c)} - \frac{3a}{c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} - \frac{2b}{c}\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^2}$$

$$\int \frac{x^n\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)a} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{ax^2+bx+c} - \frac{b}{a}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{dx}{x^n(ax^2+bx+c)} = \frac{-1}{(n-1)cx^{n-1}} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{x^{n-1}(ax^2+bx+c)} - \frac{a}{c}\int \frac{dx}{x^{n-2}(ax^2+bx+c)}$$

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$

$$+\frac{2(2n-3)a}{(n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$

$$\int \frac{x^m dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{-x^{m-1}}{(2n-m-1)a(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a}\int \frac{x^{m-2}dx}{(ax^2+bx+c)^n} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a}\int \frac{x^{m-1}dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$\int \frac{dx}{x^m(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{(m+2n-3)a}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-2}(ax^2+bx+c)^2} - \frac{(m+n-2)}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-1}(ax^2+bx+c)^n}$$

Με ρίζες

Αν $b^2 = 4ac$ ή ένα από τα a, b, c είναι μηδέν, ισχύει η ίδια παρατήρηση με τα ολοκληρώματα με $ax^2 + bx + c$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+2ax+b\right| & a>0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{a}}\sinh^{-1}\left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) & a>0,\ 4ac>b^2 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{-a}}\sin^{-1}\left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) & \begin{cases} a<0,\ b^2>4ac \\ |2ax+b|<\sqrt{b^2-4ac} \end{cases} \end{cases}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2ax-3b}{4a^2}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{c}}\ln\left|\dfrac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}+bx+2c}{x}\right| & c>0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{c}}\sinh^{-1}\left(\dfrac{bx+2c}{|x|\sqrt{4ac-b^2}}\right) & c>0,\ 4ac>b^2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\sin^{-1}\left(\dfrac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}}\right) & c<0,\ b^2>4ac \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{cx} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{(2a+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}{4a} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{3/2}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{ax^2+bx+c}$$

$$-\frac{b(4ac-b^2)}{16a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int x^2\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{6ax-5b}{24a^2}(ax^2+bx+c)^{3/2} + \frac{5b^2-4ac}{16a^2}\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x}dx = \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + c\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} + a\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{4ax+2b}{(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{2(bx+2c)}{(b^2-4ac)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{(2b^2-4ac)x+2bc}{a(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{1}{c\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)^{3/2}} = -\frac{ax^2+bx+c}{c^2x\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{b^2-2ac}{2c^2}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}}$$

$$-\frac{3b}{2c^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int (ax^2+bx+c)^{n+1/2}dx = \frac{(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}{4(n+1)a}$$
$$+\frac{(2n+1)(4ac-b^2)}{8(n+1)a}\int (ax^2+bx+c)^{n-1/2}dx$$

$$\int x(ax^2+bx+c)^{n+1/2}dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{n+3/2}}{(2n+3)a} - \frac{b}{2a}\int (ax^2+bx+c)^{n+1/2}dx$$

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(2n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1/2}}$$
$$+\frac{8a(n-1)}{(2n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1/2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = \frac{-1}{(2n-1)a(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}$$

$$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = \frac{1}{(2n-1)c(ax^2+bx+c)^{n-1/2}}$$
$$+\frac{1}{c}\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}$$

Με x^3+a^3

$$\int \frac{dx}{x^3+a^3} = \frac{1}{6a^2}\ln\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{x dx}{x^3+a^3} = \frac{1}{6a}\ln\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2} + \frac{1}{a\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{x^3+a^3} = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+a^3\right|$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^3+a^3} = x - \frac{a}{6}\ln\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2} - \frac{a}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^3+a^3)} = \frac{1}{3a^3}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+a^3}\right|$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^3+a^3)} = -\frac{1}{a^3x} - \frac{1}{6a^4}\ln\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2} - \frac{1}{a^4\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{dx}{x^3(x^3+a^3)} = \frac{-1}{2a^3x^2} - \frac{1}{6a^5}\ln\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2} - \frac{1}{a^5\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^3+a^3)^2} = \frac{x}{3a^3(x^3+a^3)} + \frac{1}{9a^5}\ln\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2} + \frac{2}{3a^5\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^3+a^3)^2} = \frac{x^2}{3a^3(x^3+a^3)} + \frac{1}{18a^4}\ln\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2} + \frac{1}{3a^4\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^3+a^3)^2} = \frac{-1}{3(x^3+a^3)}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^3+a^3)^2} = \frac{-x}{3(x^3+a^3)} + \frac{1}{18a^2}\ln\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2} + \frac{1}{3\sqrt{3}a^2}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^3+a^3)^2} = \frac{1}{3a^3(x^3+a^3)} + \frac{1}{3a^6}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+a^3}\right|$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^3+a^3)^2} = \frac{-1}{a^6x} - \frac{x^2}{3a^6(x^3+a^3)} - \frac{4}{3a^6}\int\frac{x\,dx}{x^3+a^3}$$

$$\int \frac{dx}{x^3(x^3+a^3)^2} = \frac{-1}{2a^6x^2} - \frac{x}{3a^6(x^3+a^3)} - \frac{5}{18a^8}\ln\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2} - \frac{5}{3\sqrt{3}a^8}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{x^n\,dx}{x^3+a^3} = \frac{x^{n-2}}{n-2} - a^3\int\frac{x^{n-3}\,dx}{x^3+a^3}$$

$$\int \frac{dx}{x^n(x^3+a^3)} = \frac{-1}{a^3(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{a^3}\int\frac{dx}{x^{n-3}(x^3+a^3)}$$

Με $x^4 \pm a^4$

$$\int \frac{dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}\right) - \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{ax\sqrt{2}}{x^2-a^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{4a\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}\right) - \frac{1}{2a\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{ax\sqrt{2}}{x^2-a^2}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{4}\ln\left(x^4+a^4\right)$$

$$\int \frac{dx}{x(x^4+a^4)} = \frac{1}{4a^4}\ln\left(\frac{x^4}{x^4+a^4}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^4+a^4)} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{1}{4a^5\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}\right) + \frac{1}{2a^5\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{ax\sqrt{2}}{x^2-a^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^3(x^4+a^4)} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^6}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^4-a^4} = \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^4-a^4} = \frac{1}{4a^2}\ln\left|\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right|$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^4-a^4} = \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{x^4-a^4} = \frac{1}{4}\ln\left|x^4-a^4\right|$$

$$\int \frac{dx}{x(x^4-a^4)} = \frac{1}{4a^4}\ln\left|\frac{x^4-a^4}{x^4}\right|$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^4-a^4)} = \frac{1}{a^4x} + \frac{1}{4a^5}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \frac{1}{2a^5}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x^3(x^4-a^4)} = \frac{1}{2a^4x^2} + \frac{1}{4a^6}\ln\left|\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right|$$

Με $x^n \pm a^n$

$$\int \frac{dx}{x(x^n + a^n)} = \frac{1}{na^n} \ln\left|\frac{x^n}{x^n + a^n}\right|$$

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{x^n + a^n} = \frac{1}{n} \ln\left|x^n + a^n\right|$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{(x^n + a^n)^r} = \int \frac{x^{m-n}\,dx}{(x^n + a^n)^{r-1}} - a^n \int \frac{x^{m-n}\,dx}{(x^n + a^n)^r}$$

$$\int \frac{dx}{x^m (x^n + a^n)^r} = \frac{1}{a^n} \int \frac{dx}{x^m (x^n + a^n)^{r-1}} - \frac{1}{a^n} \int \frac{dx}{x^{m-n} (x^n + a^n)^r}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n + a^n}} = \frac{1}{n\sqrt{a^n}} \ln\left|\frac{\sqrt{x^n + a^n} - \sqrt{a^n}}{\sqrt{x^n + a^n} + \sqrt{a^n}}\right|$$

$$\int \frac{dx}{x(x^n - a^n)} = \frac{1}{na^n} \ln\left|\frac{x^n - a^n}{x^n}\right|$$

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{x^n - a^n} = \frac{1}{n} \ln\left|x^n - a^n\right|$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{(x^n - a^n)^r} = a^n \int \frac{x^{m-n}\,dx}{(x^n - a^n)^r} + \int \frac{x^{m-n}\,dx}{(x^n - a^n)^{r-1}}$$

$$\int \frac{dx}{x^m (x^n - a^n)^r} = \frac{1}{a^n} \int \frac{dx}{x^{m-n} (x^n - a^n)^r} - \frac{1}{a^n} \int \frac{dx}{x^m (x^n - a^n)^{r-1}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n - a^n}} = \frac{2}{n\sqrt{a^n}} \cos^{-1}\sqrt{\frac{a^n}{x^n}}$$

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{x^{2m} + a^{2m}} = \frac{1}{ma^{2m-p}} \sum_{k=1}^{m} \sin\frac{(2k-1)p\pi}{2m} \tan^{-1}\left(\frac{x + a\cos[(2k-1)\pi/2m]}{a\sin[(2k-1)\pi/2m]}\right)$$

$$-\frac{1}{2ma^{2m-p}} \sum_{k=1}^{m} \cos\frac{(2k-1)p\pi}{2m} \ln\left(x^2 + 2ax\cos\frac{(2k-1)\pi}{2m} + a^2\right)$$

όπου $0 < p \le 2m$.

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{x^{2m}-a^{2m}} = \frac{1}{2ma^{2m-p}}\sum_{k=1}^{m-1}\cos\frac{kp\pi}{m}\ln\left(x^2-2ax\cos\frac{k\pi}{m}+a^2\right)$$
$$-\frac{1}{ma^{2m-p}}\sum_{k=1}^{m-1}\sin\frac{kp\pi}{m}\tan^{-1}\left(\frac{x-a\cos(k\pi/m)}{a\sin(k\pi/m)}\right)$$
$$+\frac{1}{2ma^{2m-p}}\{\ln(x-a)+(-1)^p\ln(x+a)\}$$

όπου $0<p\le 2m$.

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{x^{2m+1}+a^{2m+1}} = \frac{2(-1)^{p-1}}{(2m+1)a^{2m-p+1}}\sum_{k=1}^{m}\sin\frac{2kp\pi}{2m+1}\tan^{-1}\left(\frac{x+a\cos[2k\pi/(2m+1)]}{a\sin[2k\pi/(2m+1)]}\right)$$
$$-\frac{2(-1)^{p-1}}{(2m+1)a^{2m-p+1}}\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2kp\pi}{2m+1}\ln\left(x^2+2ax\cos\frac{2k\pi}{2m+1}+a^2\right)$$
$$+\frac{(-1)^{p-1}\ln(x+a)}{(2m+1)a^{2m-p+1}}$$

όπου $0<p\le 2m+1$.

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{x^{2m+1}-a^{2m+1}} = -\frac{2}{(2m+1)a^{2m-p+1}}\sum_{k=1}^{m}\sin\frac{2kp\pi}{2m+1}\tan^{-1}\left(\frac{x-a\cos[2k\pi/(2m+1)]}{a\sin[2k\pi/(2m+1)]}\right)$$
$$+\frac{1}{(2m+1)a^{2m-p+1}}\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2kp\pi}{2m+1}\ln\left(x^2-2ax\cos\frac{2p\pi}{2m+1}+a^2\right)$$
$$+\frac{\ln(x-a)}{(2m+1)a^{2m-p+1}}$$

όπου $0<p\le 2m+1$.

Με $\sin ax$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}$$

$$\int x\sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a^2}-\frac{x\cos ax}{a}$$

$$\int x^2\sin ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax+\left(\frac{2}{a^3}-\frac{x^2}{a}\right)\cos ax$$

$$\int x^3 \sin ax dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\sin ax + \left(\frac{6x}{a^3} - \frac{x^3}{a}\right)\cos ax$$

$$\int \frac{\sin ax}{x} dx = \mathrm{Si}(ax) = ax - \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7\cdot 7!} + \cdots$$

$$\int \frac{\sin ax}{x^2} dx = -\frac{\sin ax}{x} + a\int \frac{\cos ax}{x} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{1}{\sin ax} - \cot ax\right| = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1-\cos ax}{1+\cos ax}\right| = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right|$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a^2}\left\{ax + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{7(ax)^5}{3\cdot 5\cdot 5!} + \frac{31(ax)^7}{3\cdot 7\cdot 7!} + \cdots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int x\sin^2 ax dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int x^2 \sin^2 ax\, dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{1}{8a^3}\right)\sin 2ax - \frac{x\cos 2ax}{4a^2}$$

$$\int x^3 \sin^2 ax\, dx = \frac{x^4}{8} - \left(\frac{x^3}{4a} - \frac{3x}{8a^3}\right)\sin 2ax - \left(\frac{3x^2}{8a^2} - \frac{3}{16a^4}\right)\cos 2ax$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + \frac{\cos^3 ax}{3a}$$

$$\int \sin^4 ax dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2ax}{4a} + \frac{\sin 4ax}{32a}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\cot ax$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{x}{a}\cot ax + \frac{1}{a^2}\ln|\sin ax|$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 ax} = \frac{-\cos ax}{2a\sin^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right|$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^3 ax} = \frac{-x\cos ax}{2a\sin^2 ax} - \frac{1}{2a^2 \sin ax} + \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{\sin ax}$$

$$\int \sin ax \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \qquad a \neq \pm b$$

$$\int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$$

$$\int \frac{x dx}{1-\sin ax} = \frac{x}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right|$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$$

$$\int \frac{x dx}{1+\sin ax} = -\frac{x}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right|$$

$$\int \frac{dx}{(1-\sin ax)^2} = \frac{1}{2a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\tan^3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a}\tan^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{b+c\sin ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\tan^{-1}\dfrac{b\tan\frac{ax}{2}+c}{\sqrt{b^2-c^2}} & b^2 > c^2 \\[2ex] \dfrac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left|\dfrac{b\tan\frac{ax}{2}+c-\sqrt{c^2-b^2}}{b\tan\frac{ax}{2}+c+\sqrt{c^2-b^2}}\right| & b^2 < c^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{q\cos ax}{a(b^2-c^2)(b+c\sin ax)} + \frac{b}{b^2-c^2}\int \frac{dx}{b+c\sin ax} \qquad b \neq \pm c$$

$$\int \frac{dx}{b^2+c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{b^2+c^2}\,\tan ax}{b}$$

$$\int \frac{dx}{b^2 - c^2 \sin ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{ab\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{b^2 - c^2}\,\tan ax}{b} & b^2 > c^2 \\ \dfrac{1}{2ab\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\dfrac{\sqrt{c^2 - b^2}\,\tan ax + b}{\sqrt{c^2 - b^2}\,\tan ax - b}\right| & b^2 < c^2 \end{cases}$$

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$$

$$\int x \sin(x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2$$

$$\int x^3 \sin(x^2)\,dx = -\frac{x^2}{2}\cos(x^2) + \frac{1}{2}\sin(x^2)$$

$$\int x^n \sin ax\,dx = -\frac{x^n \cos ax}{a} + \frac{nx^{n-1}\sin ax}{a^2} - \frac{n(n-1)}{a^2}\int x^{n-2}\sin ax\,dx$$

$$\int \frac{\sin ax}{x^n}dx = -\frac{\sin ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\cos ax}{x^{n-1}}dx$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{an} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{\cos ax}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}, \qquad n > 1$$

$$\int \frac{xdx}{\sin^n ax} = -\frac{x\cos ax}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\sin^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{xdx}{\sin^{n-2} ax}, \quad n > 2$$

Με ρίζες ($K = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$)

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x}} = -\frac{1}{k}\sin^{-1}\frac{k\cos x}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{K} = -\frac{1}{k}\ln(k\cos x + K)$$

$$\int (\sin x)\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x}\,dx = -\frac{\cos x}{2}\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} - \frac{1+k^2}{2k}\sin^{-1}\frac{k\cos x}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\int K\sin x\,dx = -\frac{1}{2}K\cos x - \frac{1-k^2}{2k}\ln\left(K + k\cos x\right)$$

$$\int \frac{dx}{(\sin x)\sqrt{1+k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+k^2\sin^2 x}-\cos x}{\sqrt{1+k^2\sin^2 x}+\cos x}$$

$$\int \frac{dx}{K\sin x} = -\frac{1}{2}\ln\frac{K+\cos x}{K-\cos x}$$

$$\int \frac{K}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{K+\cos x}{K-\cos x} + k\ln\left(K + k\cos x\right)$$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{K^3} = \frac{\cos x}{(k^2-1)K}$$

Με cos *ax*

$$\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}$$

$$\int x\cos ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a}$$

$$\int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax$$

$$\int x^3\cos ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\sin ax$$

$$\int \frac{\cos ax}{x}dx = \ln|x| - \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6\cdot 6!} + \cdots$$

$$\int \frac{\cos ax}{x^2}dx = -\frac{\cos ax}{x} - a\int \frac{\sin ax}{x}dx$$

$$\int \frac{\cos ax}{x^3}dx = -\frac{\cos ax}{2x^2} + \frac{a\sin ax}{2x} - \frac{a^2}{2}\int \frac{\cos ax}{x}dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{1}{\cos ax} + \tan ax\right| = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right| = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+\sin ax}{1-\sin ax}\right|$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos ax} = \frac{x^2}{2} + \frac{a^2x^4}{8} + \frac{5a^4x^6}{144} + \cdots + \frac{E_n a^{2n} x^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\cos ax} = \frac{x^3}{3} + \frac{a^2x^5}{5\cdot 2!} + \frac{5a^4x^7}{7\cdot 4!} + \frac{61a^6x^9}{9\cdot 6!} + \cdots + \frac{E_{n-1} a^{2n-2} x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-2)!}$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int x\cos^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int x^2\cos^2 ax\,dx = \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{1}{8a^3}\right)\sin 2ax + \frac{x\cos 2ax}{4a^2}$$

$$\int x^3\cos^2 ax\,dx = \frac{x^4}{8} + \left(\frac{x^3}{4a} - \frac{3x}{8a^3}\right)\sin 2ax + \left(\frac{3x^2}{8a^2} - \frac{3}{16a^4}\right)\cos 2ax$$

$$\int \cos^3 ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} - \frac{\sin^3 ax}{3a}$$

$$\int \cos^4 ax\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2ax}{4a} + \frac{\sin 4ax}{32a}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\tan ax}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^3 ax} = \frac{x\sin ax}{2a\cos^2 ax} - \frac{1}{2a^2\cos ax} + \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{\cos ax}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\sin ax}{2a\cos^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right|$$

$$\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \qquad a \neq \pm b$$

$$\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a}\cot\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\left|\sin\frac{ax}{2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a}\tan\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\left|\cos\frac{ax}{2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a}\cot\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\cot^3\frac{ax}{2}$$

$$\int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\tan\frac{ax}{2} + \frac{1}{6a}\tan^3\frac{ax}{2}$$

$$\int \frac{dx}{b+c\cos ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{b-c}{b+c}}\tan\dfrac{ax}{2}\right), & b^2 > c^2 \\[2ex] \dfrac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left(\dfrac{\tan\dfrac{ax}{2}+\sqrt{\dfrac{c+b}{c-b}}}{\tan\dfrac{ax}{2}-\sqrt{\dfrac{c+b}{c-b}}}\right), & b^2 < c^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(c+d\cos ax)^2} = -\frac{d\sin ax}{a(c^2-d^2)(c+d\cos ax)} + \frac{c}{c^2-d^2}\int\frac{dx}{c+d\cos ax}, \qquad c \neq \pm d$$

$$\int \frac{dx}{c^2+d^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ac\sqrt{c^2+d^2}}\tan^{-1}\frac{c\tan ax}{\sqrt{c^2+d^2}}, \qquad c > 0$$

$$\int \frac{dx}{c^2-d^2\cos^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{ac\sqrt{c^2-d^2}}\tan^{-1}\dfrac{c\tan ax}{\sqrt{c^2-d^2}} & c^2 > d^2 \\[2ex] \dfrac{1}{2ac\sqrt{d^2-c^2}}\ln\left|\dfrac{c\tan ax-\sqrt{d^2-c^2}}{c\tan ax+\sqrt{d^2-c^2}}\right| & c^2 < d^2 \end{cases}$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$$

$$\int x\cos(x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\sin(x^2)$$

$$\int x^3\cos(x^2)\,dx = -\frac{x^2}{2}\sin(x^2) + \frac{1}{2}\cos(x^2)$$

$$\int x^m \cos ax dx = \frac{x^m \sin ax}{a} + \frac{mx^{m-1}}{a^2}\cos ax - \frac{m(m-1)}{a^2}\int x^{m-2}\cos ax dx$$

$$\int \frac{\cos ax}{x^n}dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1}\int \frac{\sin ax}{x^{n-1}}dx$$

$$\int \cos^n ax dx = \frac{\sin ax \cos^{n-1} ax}{an} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{\sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$$

$$\int \frac{x dx}{\cos^n ax} = \frac{x \sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\cos^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x dx}{\cos^{n-2} ax}$$

Με $\sin ax$ και $\cos ax$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{\sin^2 ax}{2a}$$

$$\int \sin ax \cos bx\, dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}, \qquad a \neq \pm b$$

$$\int \sin^n ax \cos ax\, dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{(n+1)a}, \qquad n \neq -1$$

$$\int \sin ax \cos^n ax\, dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a}, \qquad n \neq -1$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}$$

$$\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a}\ln|\tan ax|$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right| - \frac{1}{a \sin ax}$$

$$\int \frac{dx}{\sin ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right| + \frac{1}{a \cos ax}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^2 ax} = -\frac{2\cot 2ax}{a}$$

$$\int \frac{\sin^2 ax}{\cos ax} dx = -\frac{\sin ax}{a} + \frac{1}{a}\ln\left|\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \frac{\cos^2 ax}{\sin ax} dx = \frac{\cos ax}{a} + \frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right|$$

$$\int \frac{\sin ax}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a\cos ax}$$

$$\int \frac{\cos ax}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a\sin ax}$$

$$\int \frac{dx}{\cos ax(1\pm\sin ax)} = \mp\frac{1}{2a(1\pm\sin ax)} + \frac{1}{2a}\ln\left|\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \frac{dx}{\sin ax(1\pm\cos ax)} = \pm\frac{1}{2a(1\pm\cos ax)} + \frac{1}{2a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{ax}{2}\pm\frac{\pi}{8}\right)\right|$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin ax+\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left|1+\tan\frac{ax}{2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin ax-\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\tan\frac{ax}{2}}{1+\tan\frac{ax}{2}}\right|$$

$$\int \frac{\sin ax\, dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln|\sin ax \pm \cos ax|$$

$$\int \frac{\cos ax\, dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln|\sin ax \pm \cos ax|$$

$$\int \frac{dx}{(\sin ax \pm \cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\tan\left(ax \mp \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int \frac{\sin ax dx}{p+q\cos ax} = -\frac{1}{aq}\ln|p+q\cos ax|$$

$$\int \frac{\cos ax\, dx}{b+c\sin ax} = \frac{1}{ac}\ln|b+c\sin ax|$$

$$\int \frac{\sin ax\, dx}{(b+c\cos ax)^n} = \frac{1}{ac(n-1)(b+c\cos ax)^{n-1}}$$

$$\int \frac{\cos ax dx}{(b+c\sin ax)^n} = -\frac{1}{ac(n-1)(b+c\sin ax)^{n-1}}$$

$$\int \frac{dx}{b\sin ax+c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}}\ln\left|\tan\left(\frac{ax+\tan^{-1}(c/b)}{2}\right)\right|$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{a\sin x+b\cos x} = \frac{1}{a^2+b^2}\left[ax-b\ln\left|\sin\left(x+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)\right|\right]$$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{a\sin x+b\cos x} = \frac{1}{a^2+b^2}\left[bx+a\ln\left|\sin\left(x+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)\right|\right]$$

$$\int \frac{dx}{b\sin ax+c\cos ax+d} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{D}}\tan^{-1}\left(\dfrac{b+(d-c)\tan(ax/2)}{\sqrt{D}}\right), & c\neq d,\ D>0 \\ \dfrac{1}{a\sqrt{-D}}\ln\left|\dfrac{b-\sqrt{-D}+(d-c)\tan(ax/2)}{b+\sqrt{-D}+(d-c)\tan(ax/2)}\right|, & c\neq d,\ D<0 \\ \dfrac{1}{ab}\ln\left|c+b\tan\dfrac{ax}{2}\right|, & c=d,\ b\neq 0 \\ \dfrac{-2}{a}\left[b+(d-c)\tan\dfrac{ax}{2}\right]^{-1}, & D=0 \end{cases}$$

$$\left[D=d^2-b^2-c^2\right]$$

$$\int \frac{dx}{b^2\sin^2 ax+c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{abc}\tan^{-1}\left(\frac{b\tan ax}{c}\right)$$

$$\int \frac{dx}{b^2\sin^2 ax-c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{2abc}\ln\left|\frac{b\tan ax-c}{b\tan ax+c}\right|$$

$$\int \sin^m ax \cos^n ax\,dx = \begin{cases} -\dfrac{\sin^{m-1} ax \cos^{n+1} ax}{a(m+n)} + \dfrac{m-1}{m+n}\displaystyle\int \sin^{m-2} ax \cos^n ax\,dx \\ \dfrac{\sin^{m+1} ax \cos^{n-1} ax}{a(m+n)} + \dfrac{n-1}{m+n}\displaystyle\int \sin^m ax \cos^{n-2} ax\,dx \end{cases}$$

$$\int \frac{\sin^m ax}{\cos^n ax}dx = \begin{cases} \dfrac{\sin^{m-1} ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \dfrac{m-1}{n-1}\displaystyle\int \frac{\sin^{m-2} ax}{\cos^{n-2} ax}dx, & n \neq 1 \\ \dfrac{\sin^{m+1} ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \dfrac{m-n+2}{n-1}\displaystyle\int \frac{\sin^m ax}{\cos^{n-2} ax}dx, & n \neq 1 \\ \dfrac{-\sin^{m-1} ax}{a(m-n)\cos^{n-1} ax} + \dfrac{m-1}{m-n}\displaystyle\int \frac{\sin^{m-2} ax}{\cos^n ax}dx, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int \frac{\cos^m ax}{\sin^n ax}dx = \begin{cases} -\dfrac{\cos^{m-1} ax}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} - \dfrac{m-1}{n-1}\displaystyle\int \frac{\cos^{m-2} ax}{\sin^{n-2} ax}dx, & n \neq 1 \\ -\dfrac{\cos^{m+1} ax}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} - \dfrac{m-n+2}{n-1}\displaystyle\int \frac{\cos^m ax}{\sin^{n-2} ax}dx, & n \neq 1 \\ \dfrac{\cos^{m-1} ax}{a(m-n)\sin^{n-1} ax} + \dfrac{m-1}{m-n}\displaystyle\int \frac{\cos^{m-2} ax}{\sin^n ax}dx, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m ax \cos^n ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{a(n-1)\sin^{m-1} ax \cos^{n-1} ax} + \dfrac{m+n-2}{n-1}\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^m ax \cos^{n-2} ax}, & n > 1 \\ \dfrac{-1}{a(m-1)\sin^{m-1} ax \cos^{n-1} ax} + \dfrac{m+n-2}{m-1}\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^{m-2} ax \cos^n ax}, & m > 1 \end{cases}$$

Με ρίζες ($K = \sqrt{1-k^2\sin^2 x}$)

$$\int K \cos x\,dx = \frac{\sin x}{2}K + \frac{1}{2k}\sin^{-1}(k \sin x)$$

$$\int \frac{K}{\cos x}dx = \frac{\sqrt{1-k^2}}{2}\ln\frac{K+\sqrt{1-k^2}\sin x}{K-\sqrt{1-k^2}\sin x} + k\sin^{-1}(k\sin x)$$

$$\int K \sin x \cos x\,dx = -\frac{1}{3k^2}K^3$$

$$\int \frac{K}{\sin x \cos x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1-K}{1+K} + \frac{\sqrt{1-k^2}}{2} \ln \frac{K+\sqrt{1-k^2}}{K-\sqrt{1-k^2}}$$

$$\int \frac{\cos x}{K} dx = \frac{1}{k} \tan^{-1} \frac{k \sin x}{K} = \frac{1}{k} \sin^{-1}(k \sin x)$$

$$\int \frac{dx}{K \cos x} = \frac{-1}{2\sqrt{1-k^2}} \ln \frac{K-\sqrt{1-k^2}\,\sin x}{K+\sqrt{1-k^2}\,\sin x}$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{K} dx = -\frac{1}{k^2} K$$

$$\int \frac{dx}{K \sin x \cos x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-K}{1+K} + \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}} \ln \frac{K+\sqrt{1-k^2}}{K-\sqrt{1-k^2}}$$

$$\int \frac{\cos x \, dx}{K^3} = \frac{\sin x}{K}$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{K^3} dx = \frac{1}{k^2} K$$

$$\int (\cos x)\sqrt{1+k^2 \sin^2 x}\, dx = \frac{\sin x}{2} \sqrt{1+k^2 \sin^2 x} + \frac{1}{2k} \ln\left(k \sin x + \sqrt{1+k^2 \sin^2 x}\right)$$

$$\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{1+k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k} \ln\left(k \sin x + \sqrt{1+k^2 \sin^2 x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(\cos x)\sqrt{1+k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{2\sqrt{1+k^2}} \ln \frac{\sqrt{1+k^2 \sin^2 x} + \sqrt{1+k^2}\,\sin x}{\sqrt{1+k^2 \sin^2 x} - \sqrt{1+k^2}\,\sin x}$$

Με $\tan ax$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos ax|$$

$$\int \tan^2 ax dx = \frac{\tan ax}{a} - x$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{\tan^2 ax}{2a} + \frac{1}{a} \ln|\cos ax|$$

$$\int \frac{dx}{\tan ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a}\ln|\tan ax|$$

$$\int \frac{dx}{\tan ax} = \frac{1}{a}\ln|\sin ax|$$

$$\int x \tan ax\, dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{a^3x^5}{15} + \frac{2a^5x^7}{105} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{\tan ax}{x}\, dx = ax + \frac{a^3x^3}{3} + \frac{2a^5x^5}{75} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n a^{2n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots, \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\int x \tan^2 ax\, dx = \frac{x \tan ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln|\cos ax| - \frac{x^2}{2}$$

$$\int \frac{dx}{b + c\tan ax} = \int \frac{\cos ax\, dx}{b\cos ax + c\sin ax} = \frac{bx}{b^2+c^2} + \frac{c}{a(b^2+c^2)}\ln|c\sin ax + b\cos ax|$$

$$\int \tan^n ax\, dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \tan^{n-2} ax\, dx, \qquad n \neq 1$$

$$\int \frac{\tan^n ax}{\cos^2 ax}\, dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

$$\int \frac{\tan x\, dx}{\sqrt{1 \pm k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{2\sqrt{1 \pm k^2}} \ln \frac{\sqrt{1 \pm k^2\sin^2 x} + \sqrt{1 \pm k^2}}{\sqrt{1 \pm k^2\sin^2 x} - \sqrt{1 \pm k^2}}$$

Με cot ax

$$\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax|$$

$$\int \cot^2 ax\, dx = -\frac{\cot ax}{a} - x$$

$$\int \cot^3 ax\, dx = -\frac{\cot^2 ax}{2a} - \frac{1}{a}\ln|\sin ax|$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cot ax} = -\frac{1}{a}\ln|\cot ax$$

$$\int \frac{dx}{\cot ax} = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax|$$

$$\int x\cot ax\,dx = \frac{x}{a} - \frac{ax^3}{9} - \frac{a^3x^5}{225} - \cdots - \frac{2^{2n}B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \cdots$$

$$\int \frac{\cot ax}{x}dx = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \cdots - \frac{2^{2n}B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \cdots$$

$$\int x\cot^2 ax\,dx = -\frac{x\cot ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln|\sin ax| - \frac{x^2}{2}$$

$$\int \frac{dx}{b + c\cot ax} = \int \frac{\sin x\,dx}{b\sin x + c\cos x} = \frac{bx}{b^2+c^2} - \frac{c}{a(b^2+c^2)}\ln|b\sin ax + c\cos ax|$$

$$\int \cot^n ax\,dx = -\frac{\cot^{n-1}ax}{(n-1)a} - \int \cot^{n-2}ax\,dx$$

$$\int \frac{\cot^n ax}{\sin^2 ax}dx = -\frac{\cot^{n+1}ax}{(n+1)a}$$

$$\int \frac{\cot x\,dx}{\sqrt{1 \pm k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1\pm k^2\sin^2 x}}{1+\sqrt{1\pm k^2\sin^2 x}}$$

Με αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\int \sin^{-1}\frac{x}{a}dx = x\sin^{-1}\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int x\sin^{-1}\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{4}$$

$$\int x^2\sin^{-1}\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}}{9}$$

$$\int x^3\sin^{-1}\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3a^4}{32}\right)\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{(2x^3+3xa^2)\sqrt{a^2-x^2}}{32}$$

$$\int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x}dx = \frac{x}{a} + \frac{(x/a)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \frac{1\cdot 3(x/a)^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5(x/a)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7} + \cdots, \qquad |x| < a$$

$$\int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x^2}dx = -\frac{\sin^{-1}(x/a)}{x} - \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$$

$$\int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x^3}dx = \frac{-1}{2x^2}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x}$$

$$\int \left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 dx = x\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 - 2x + 2\sqrt{a^2-x^2} - 2x + 2\sqrt{a^2-x^2}\,\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \cos^{-1}\frac{x}{a}dx = x\cos^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int x\cos^{-1}\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\cos^{-1}\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{4}$$

$$\int x^2\cos^{-1}\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\cos^{-1}\frac{x}{a} - \frac{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}{9}$$

$$\int x^3\cos^{-1}\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3a^4}{32}\right)\cos^{-1}\frac{x}{a} - \frac{(2x^3+3xa^2)\sqrt{a^2-x^2}}{32}$$

$$\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x}dx = \frac{\pi}{2}\ln|x| - \int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x}dx$$

$$\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x^2}dx = -\frac{\cos^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$$

$$\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x^3}dx = \frac{-1}{2x^2}\cos^{-1}\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x}$$

$$\int \left(\cos^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 dx = x\left(\cos^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 - 2x - 2\sqrt{a^2-x^2}\,\cos^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \tan^{-1}\frac{x}{a}dx = x\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(x^2+a^2)$$

$$\int x\tan^{-1}\frac{x}{a}dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2}$$

$$\int x^2\tan^{-1}\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(x^2+a^2)$$

$$\int x^3 \tan^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^4-a^4}{4}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{ax^3}{12} + \frac{a^3x}{4}$$

$$\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{(x/a)^3}{3^2} + \dfrac{(x/a)^5}{5^2} - \dfrac{(x/a)^7}{7^2} + \cdots & \left|\dfrac{x}{a}\right| \le 1 \\ \dfrac{\pi(a/x)}{2|a/x|}\ln|x| + \dfrac{a}{x} - \dfrac{(a/x)^3}{3^2} + \dfrac{(a/x)^5}{5^2} - \dfrac{(a/x)^7}{7^2} + \cdots & \left|\dfrac{x}{a}\right| > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x^2+a^2}{x^2}\right)$$

$$\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x^3}\,dx = -\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2a^2}\right)\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2ax}$$

$$\int \cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(x^2+a^2)$$

$$\int x\cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2}$$

$$\int x^2\cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(x^2+a^2)$$

$$\int x^3\cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^4-a^4}{4}\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax^3}{12} - \frac{a^3x}{4}$$

$$\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln|x| - \int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x}\,dx$$

$$\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\cot^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x^2+a^2}{x^2}\right)$$

$$\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x^3}\,dx = \frac{-1}{2x^2}\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{2ax} + \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int x^n\sin^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \qquad n \ne -1$$

$$\int x^n\cos^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \qquad n \ne -1$$

$$\int x^n \tan^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{x^2+a^2}\,dx \qquad n \neq -1$$

$$\int x^n \cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{x^2+a^2}\,dx \qquad n \neq -1$$

Με e^{ax}

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int a^x\,dx = \int e^{x\ln a}\,dx = \frac{e^{x\ln a}}{\ln a} = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right)$$

$$\int x^2 e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right)$$

$$\int x^3 e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^3 - \frac{3x^2}{a} + \frac{6x}{a^2} - \frac{6}{a^3}\right)$$

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \ln|x| + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \cdots$$

$$\int \frac{dx}{b+ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab}\ln\left|b+ce^{ax}\right|$$

$$\int \frac{dx}{(b+ce^{ax})^2} = \frac{x}{b^2} + \frac{1}{ab(b+ce^{ax})} - \frac{1}{ab^2}\ln(b+ce^{ax})$$

$$\int \frac{dx}{be^{ax}+ce^{-ax}} = \begin{cases} \dfrac{1}{a\sqrt{bc}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{b}{c}}e^{ax}\right) & bc > 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2a\sqrt{-bc}}\ln\left(\dfrac{e^{ax}-\sqrt{-c/b}}{e^{ax}+\sqrt{-c/b}}\right) & bc < 0 \end{cases}$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$$

$$\int e^{ax}\sin^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^4+4}\left(a\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}$$

$$\int e^{ax}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^4+4}\left(a\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\int xe^{ax}\sin bx\,dx = \frac{xe^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} - \frac{e^{ax}\{(a^2-b^2)\sin bx - 2ab\cos bx\}}{(a^2+b^2)^2}$$

$$\int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} - \frac{e^{ax}\{(a^2-b^2)\cos bx - 2ab\sin bx\}}{(a^2+b^2)^2}$$

$$\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}dx$$

$$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\left(x^n - \frac{nx^{n-1}}{a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^2} - \cdots \frac{(-1)^n n!}{a^n}\right) \qquad [n = \text{θετικός ακέραιος}]$$

$$\int \frac{e^{ax}}{x^n}dx = -\frac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}dx$$

$$\int e^{ax}\sin^n bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1} bx}{a^2+n^2b^2}(a\sin bx - nb\cos bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\sin^{n-2} bx\,dx$$

$$\int e^{ax}\cos^n bx\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1} bx}{a^2+n^2b^2}(a\cos bx + nb\sin bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\cos^{n-2} bx\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b+ce^{ax}}} = \begin{cases} \dfrac{1}{a\sqrt{b}}\ln\dfrac{\sqrt{b+ce^{ax}}-\sqrt{b}}{\sqrt{b+ce^{ax}}+\sqrt{b}}, & b>0 \\[2ex] \dfrac{2}{a\sqrt{-b}}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{b+ce^{ax}}}{\sqrt{-b}}, & b<0 \end{cases}$$

Με ln*x* $(x>0)$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\int x^2\ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 x$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2}$$

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$$

$$\int \ln(x^2+a^2)dx = x\ln(x^2+a^2) - 2x + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \ln\left|x^2-a^2\right|dx = x\ln\left|x^2-a^2\right| - 2x + a\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$$

$$\int x\ln\left|x^2\pm a^2\right|dx = \frac{1}{2}[(x^2\pm a^2)\ln\left|x^2\pm a^2\right| - x^2]$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln(\ln x) + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2\cdot 2!} + \frac{\ln^3 x}{3\cdot 3!} + \cdots$$

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x|$$

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x)$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(\ln x) + \frac{1}{2}x\cos(\ln x)$$

$$\int x^n\ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right), \qquad n\neq -1$$

$$\int x^n \ln^2 x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln^2 x - \frac{2x^{n+1}}{(n+1)^2}\ln x + \frac{2x^{n+1}}{(n+1)^3}, \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{x^n\,dx}{\ln x} = \ln|\ln x| + (n+1)\ln x + \frac{(n+1)^2 \ln^2 x}{2\cdot 2!} + \frac{(n+1)^3 \ln^3 x}{3\cdot 3!} + \cdots$$

$$\int \ln^n x\,dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\,dx$$

$$\int \frac{\ln^n x\,dx}{x} = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1}, \qquad n \neq -1$$

$$\int x^m \ln^n x\,dx = \frac{x^{m+1}\ln^n x}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x\,dx, \qquad m \neq -1,\ n \neq -1$$

$$\int x^n \ln(x^2 \pm a^2)\,dx = \frac{x^{n+1}\ln(x^2 \pm a^2)}{n+1}\ \frac{2}{n+1}\int \frac{x^{n+2}}{x^2 \pm a^2}\,dx, \qquad n \neq -1$$

$$\int \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)dx = x\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) - \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

$$\int x\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} \pm \frac{a^2}{4}\right)\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) - \frac{x}{4}\sqrt{x^2 \pm a^2}$$

Με sinh *ax*

$$\int \sinh ax\,dx = \frac{\cosh ax}{a}$$

$$\int x\sinh ax\,dx = \frac{x\cosh ax}{a} - \frac{\sinh ax}{a^2}$$

$$\int x^2 \sinh ax\,dx = \left(\frac{x^2}{a} + \frac{2}{a^3}\right)\cosh ax - \frac{2x}{a^2}\sinh ax$$

$$\int \frac{\sinh ax}{x}\,dx = ax + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot 5!} + \frac{(ax)^7}{7\cdot 7!} + \cdots$$

$$\int \frac{\sinh ax}{x^2}\,dx = -\frac{\sinh ax}{x} + a\int \frac{\cosh ax}{x}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sinh ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right|$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sinh ax} = \frac{x}{a} - \frac{ax^3}{3\cdot 3!} + \frac{7a^3x^5}{3\cdot 5\cdot 5!} - \cdots + \frac{2(-1)^n(2^{2n}-1)B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\int \sinh^2 ax\,dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} - \frac{x}{2}$$

$$\int x\sinh^2 ax\,dx = \frac{x\sinh 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2} - \frac{x^2}{4}$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 ax} = -\frac{\coth ax}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sinh^2 ax} = -\frac{x}{a}\coth ax + \frac{1}{a^2}\ln|\sinh ax|$$

$$\int \sinh ax \sinh bx\,dx = \frac{\sinh(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\sinh(a-b)x}{2(a-b)}, \qquad a \neq \pm b$$

$$\int \sinh ax \sin bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}(a\cosh ax \sin bx - b\sinh ax \cos bx)$$

$$\int \sinh ax \cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}(a\cosh ax \cos bx + b\sinh ax \sin bx)$$

$$\int \frac{dx}{b + c\sinh ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}}\ln\left|\frac{ce^{ax} + b - \sqrt{b^2+c^2}}{ce^{ax} + b + \sqrt{b^2+c^2}}\right|$$

$$\int \frac{dx}{(b + c\sinh ax)^2} = -\frac{c\cosh ax}{a(b^2+c^2)(b + c\sinh ax)} + \frac{b}{b^2+c^2}\int \frac{dx}{b + c\sinh ax}$$

$$\int \frac{dx}{b^2 + c^2\sinh^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{ab\sqrt{c^2-b^2}}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{c^2-b^2}\,\tanh ax}{b} & b^2 < c^2 \\[2ex] \dfrac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}}\ln\left(\dfrac{b + \sqrt{b^2-c^2}\,\tanh ax}{b - \sqrt{b^2-c^2}\,\tanh ax}\right) & b^2 > c^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{b^2 - c^2 \sinh^2 ax} = \frac{1}{2ab\sqrt{b^2+c^2}} \ln \left| \frac{b + \sqrt{b^2+c^2} \tanh ax}{b - \sqrt{b^2+c^2} \tanh ax} \right|$$

$$\int x^n \sinh ax\, dx = \frac{x^n \cosh ax}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cosh ax\, dx$$

$$\int \sinh^n ax\, dx = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh ax}{an} - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} ax\, dx$$

$$\int \frac{\sinh ax}{x^n} dx = -\frac{\sinh ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\cosh ax}{x^{n-1}} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^n ax} = -\frac{\cosh ax}{a(n-1)\sinh^{n-1} ax} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sinh^{n-2} ax}, \qquad n > 1$$

$$\int \frac{x dx}{\sinh^n ax} = -\frac{x \cosh ax}{a(n-1)\sinh^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\sinh^{n-2} ax} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x dx}{\sinh^{n-2} ax}$$

Mε cosh ax

$$\int \cosh ax dx = \frac{\sinh ax}{x}$$

$$\int x \cosh ax dx = \frac{x \sinh ax}{a} - \frac{\cosh ax}{a^2}$$

$$\int x^2 \cosh ax dx = -\frac{2x \cosh ax}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a} + \frac{2}{a^3} \right) \sinh ax$$

$$\int \frac{\cosh ax}{x} dx = \ln x + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} + \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \cdots$$

$$\int \frac{\cosh ax}{x^2} dx = -\frac{\cosh ax}{x} + a \int \frac{\sinh ax}{x} dx$$

$$\int \frac{dx}{\cosh ax} = \frac{2}{a} \tan^{-1} e^{ax}$$

$$\int \frac{x\, dx}{\cosh ax} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2 x^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5a^4 x^6}{6 \cdot 4!} - \frac{61 a^4 x^6}{8 \cdot 6!} + \cdots + \frac{(-1)^n E_n a^{2n} x^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\int \cosh^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sinh 2ax}{4}$$

$$\int x\cosh^2 ax\, dx = \frac{x\sinh 2ax}{4a} - \frac{\cosh 2ax}{8a^2} + \frac{x^2}{4}$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} = \frac{\tanh ax}{a}$$

$$\int \frac{x\, dx}{\cosh^2 ax} = \frac{x}{a}\tanh ax - \frac{1}{a^2}\ln(\cosh ax)$$

$$\int \cosh ax \cosh bx\, dx = \frac{\sinh(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sinh(a+b)x}{2(a+b)}, \qquad a \neq \pm b$$

$$\int \cosh ax \sin bx\, dx = \frac{a\sinh ax \sin bx - b\cosh ax \cos bx}{a^2+b^2}$$

$$\int \cosh ax \cos bx\, dx = \frac{a\sinh ax \cos bx + b\cosh ax \sin bx}{a^2+b^2}$$

$$\int \frac{dx}{\cosh ax + 1} = \frac{1}{a}\tanh\frac{ax}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\cosh ax - 1} = -\frac{1}{a}\coth\frac{ax}{2}$$

$$\int \frac{x\, dx}{\cosh ax + 1} = \frac{x}{a}\tanh\frac{ax}{2} - \frac{2}{a^2}\ln\left(\cosh\frac{ax}{2}\right)$$

$$\int \frac{x\, dx}{\cosh ax - 1} = -\frac{x}{a}\coth\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\left(\sinh\frac{ax}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(\cosh ax + 1)^2} = \frac{1}{2a}\tanh\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\tanh^3\frac{ax}{2}$$

$$\int \frac{dx}{(\cosh ax - 1)^2} = \frac{1}{2a}\coth\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\coth^3\frac{ax}{2}$$

$$\int \frac{dx}{b+c\cosh ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{a\sqrt{b^2-c^2}} \ln\left(\dfrac{ce^{ax}+b-\sqrt{b^2-c^2}}{ce^{ax}+b+\sqrt{b^2-c^2}}\right) & b^2 > c^2 \\ \dfrac{2}{a\sqrt{c^2-b^2}} \tan^{-1}\dfrac{ce^{ax}+b}{\sqrt{c^2-b^2}} & b^2 < c^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{b^2+c^2\cosh^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{2ab\sqrt{b^2+c^2}} \ln\left|\dfrac{b\tanh ax+\sqrt{b^2+c^2}}{b\tanh ax-\sqrt{b^2+c^2}}\right| \\ \dfrac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}} \tanh^{-1}\dfrac{b\tanh ax}{\sqrt{b^2+c^2}} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{b^2-c^2\cosh^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{2ab\sqrt{b^2-c^2}} \ln\left|\dfrac{b\tanh ax+\sqrt{b^2-c^2}}{b\tanh ax-\sqrt{b^2-c^2}}\right| & b^2 > c^2 \\ \dfrac{-1}{ab\sqrt{c^2-b^2}} \tan^{-1}\dfrac{b\tanh ax}{\sqrt{c^2-b^2}} & b^2 < c^2 \end{cases}$$

$$\int x^n \cosh ax\,dx = \frac{x^n \sinh ax}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sinh ax\,dx$$

$$\int \cosh^n ax\,dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{an} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\,dx$$

$$\int \frac{\cosh ax}{x^n}dx = -\frac{\cosh ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\sinh ax}{x^{n-1}}dx$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^n ax} = \frac{\sinh ax}{a(n-1)\cosh^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cosh^{n-2} ax},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cosh^n ax} = \frac{x\sinh ax}{a(n-1)\cosh^n ax} + \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2\cosh^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\cosh^{n-2} ax}$$

Με $\sinh ax$ και $\cosh ax$

$$\int \sinh ax \cosh ax\,dx = \frac{\sinh^2 ax}{2a}$$

$$\int \sinh ax \cosh bx\,dx = \frac{\cosh(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\cosh(a-b)x}{2(a-b)}, \qquad a \neq \pm b$$

$$\int \sinh^2 ax \cosh^2 ax\, dx = \frac{\sinh 4ax}{32a} - \frac{x}{8}$$

$$\int \frac{dx}{\sinh ax \cosh ax} = \frac{1}{a}\ln|\tanh ax|$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 ax \cosh ax} = -\frac{1}{a}\tan^{-1}(\sinh ax) - \frac{1}{a\sinh ax}$$

$$\int \frac{dx}{\sinh ax \cosh^2 ax} = \frac{1}{a\cosh ax} + \frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 ax \cosh^2 ax} = -\frac{2\coth 2ax}{a}$$

$$\int \frac{\sinh^2 ax}{\cosh ax}dx = \frac{\sinh ax}{a} - \frac{1}{a}\tanh^{-1}(\sinh ax)$$

$$\int \frac{\cosh^2 ax}{\sinh ax}dx = \frac{\cosh ax}{a} + \frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right|$$

$$\int \frac{\sinh ax}{\cosh^2 ax}dx = \frac{-1}{a\cosh ax}$$

$$\int \frac{\cosh ax}{\sinh^2 ax}dx = \frac{-1}{a\sinh ax}$$

$$\int \frac{dx}{\sinh ax(\cos ax + 1)} = \frac{1}{2a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right| + \frac{1}{2a(\cosh ax + 1)}$$

$$\int \frac{dx}{\sinh ax(\cos ax - 1)} = -\frac{1}{2a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right| - \frac{1}{2a(\cosh ax - 1)}$$

$$\int \frac{dx}{\cosh ax(1 + \sinh ax)} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+\sinh ax}{\cosh ax}\right| + \frac{1}{a}\tan^{-1} e^{ax}$$

$$\int \sinh^n ax \cosh ax\, dx = \frac{\sinh^{n+1} ax}{(n+1)a}, \qquad n \neq -1$$

$$\int \cosh^n ax \sinh ax\, dx = \frac{\cosh^{n+1} ax}{(n+1)a}, \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{\sinh ax \cosh^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cosh^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sinh ax \cosh^{n-2} ax}, \qquad n \neq 1$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^n ax \cosh ax} = \frac{1}{a(n-1)\sinh^{n-1} ax} - \int \frac{dx}{\sinh^{n-2} ax \cosh ax}, \qquad n \neq 1$$

Με $\tanh ax$

$$\int \tanh ax\, dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh ax)$$

$$\int \tanh^2 ax\, dx = x - \frac{\tanh ax}{a}$$

$$\int \tanh^3 ax\, dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh ax) - \frac{\tanh^2 a}{2a}$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 ax \tanh ax} dx = \frac{1}{a}\ln|\tanh ax|$$

$$\int \frac{dx}{\tanh ax} = \frac{1}{a}\ln|\sinh ax|$$

$$\int x\tanh ax\, dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{a^3x^5}{15} + \frac{2a^5x^7}{105} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\int x\tanh^2 ax\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x\tanh ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln(\cosh ax)$$

$$\int \frac{\tanh ax}{x} dx = ax - \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$$

$$\int \frac{dx}{b + c\tanh ax} = \frac{bx}{b^2-c^2} - \frac{c}{a(b^2-c^2)}\ln(c\sinh ax + b\cosh ax)$$

$$\int \tanh^n ax\, dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \tanh^{n-2} ax\, dx$$

$$\int \frac{\tanh^n ax}{\cosh^2 ax} dx = \frac{\tanh^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

Με coth *ax*

$$\int \coth ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sinh ax|$$

$$\int \coth^2 ax\,dx = x - \frac{\coth ax}{a}$$

$$\int \coth^3 ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sinh ax| - \frac{\coth^2 ax}{2a}$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 ax\coth ax}\,dx = -\frac{1}{a}\ln(\coth ax$$

$$\int \frac{dx}{\coth ax} = \frac{1}{a}\ln(\cosh ax)$$

$$\int x\coth ax\,dx = \frac{x}{a} + \frac{ax^3}{9} - \frac{a^3x^5}{225} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\int x\coth^2 ax\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x\coth ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln|\sinh ax$$

$$\int \frac{\coth ax}{x}\,dx = -\frac{1}{ax} + \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} + \cdots + \frac{(-1)^n 2^{2n}B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdot$$

$$\int \frac{dx}{b + c\coth ax} = \frac{bx}{b^2 - c^2} - \frac{c}{a(b^2 - c^2)}\ln|b\sinh ax + c\cosh ax|$$

$$\int \coth^n ax\,dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \coth^{n-1} ax\,dx$$

$$\int \frac{\coth^n ax}{\sinh^2 ax}\,dx = -\frac{\coth^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

Με αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\int \sinh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\sinh^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\int x\sinh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right)\sinh^{-1}\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{4}$$

$$\int x^2 \sinh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{(2a^2 - x^2)\sqrt{x^2+a^2}}{9}$$

$$\int \frac{\sinh^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{(x/a)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 3(x/a)^5}{2\cdot 4\cdot 5^2} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5(x/a)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7^2} + \cdots & \left|\dfrac{x}{a}\right| < 1 \\ \dfrac{\ln^2(2x/a)}{2} - \dfrac{(a/x)^2}{2^3} + \dfrac{1\cdot 3(a/x)^4}{2\cdot 4^3} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5(a/x)^6}{2\cdot 4\cdot 6^3} + \cdots & \dfrac{x}{a} > 1 \\ -\dfrac{\ln^2(-2x/a)}{2} + \dfrac{(a/x)^2}{2^3} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot (a/x)^4}{2\cdot 4^3} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5(a/x)^6}{2\cdot 4\cdot 6^3} - \cdots & \dfrac{x}{a} < -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{\sinh^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\sinh^{-1}(x/a)}{x} - \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|$$

$$\int \cosh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\cosh^{-1}(x/a) - \sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ x\cosh^{-1}(x/a) + \sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

$$\int x\cosh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x^2-a^2)\cosh^{-1}(x/a) - \frac{1}{4}x\sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ \frac{1}{4}(2x^2-a^2)\cosh^{-1}(x/a) + \frac{1}{4}x\sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

$$\int x^2\cosh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3\cosh^{-1}(x/a) - \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ \frac{1}{3}x^3\cosh^{-1}(x/a) + \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{\cosh^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \pm\left[\frac{1}{2}\ln^2(2x/a) + \frac{(a/x)^2}{2^3} + \frac{1\cdot 3(a/x)^4}{2\cdot 4^3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5(a/x)^6}{2\cdot 4\cdot 6^3} + \cdots\right]$$

[+ αν $\cosh^{-1}(x/a) > 0$, – αν $\cosh^{-1}(x/a) < 0$]

$$\int \frac{\cosh^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\cosh^{-1}(x/a)}{x} \mp a\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{(x/a)^2-1}}\right)$$

[– αν $\cosh^{-1}(x/a) > 0$, + αν $\cosh^{-1}(x/a) < 0$]

$$\int \tanh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\tanh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2-x^2)$$

$$\int x\tanh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{ax}{2} + \frac{1}{2}(x^2 - a^2)\tanh^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int x^2\tanh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{ax^2}{6} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3}\tanh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^3}{6}\ln(a^2 - x^2)$$

$$\int \frac{\tanh^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{x}{a} + \frac{(x/a)^3}{3^2} + \frac{(x/a)^5}{5^2} + \frac{(x/a)^7}{7^2} + \cdots$$

$$\int \frac{\tanh^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\tanh^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)$$

$$\int \coth^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\coth^{-1}x + \frac{a}{2}\ln(x^2 - a^2)$$

$$\int x\coth^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{ax}{2} + \frac{1}{2}(x^2 - a^2)\coth^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int x^2\coth^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{ax^2}{6} + \frac{x^3}{3}\coth^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^3}{6}\ln(x^2 - a^2)$$

$$\int \frac{\coth^{-1}(x/a)}{x}\,dx = -\frac{a}{x} - \frac{(a/x)^3}{3^2} - \frac{(a/x)^5}{5^2} - \cdots$$

$$\int \frac{\coth^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\coth^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x^2}{x^2 - a^2}\right)$$

$$\int x^n\sinh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sinh^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx, \qquad n \neq -1$$

$$\int x^n\cosh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cosh^{-1}\dfrac{x}{a} - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx, & \cosh^{-1}(x/a) > 0,\ n \neq -1 \\ \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cosh^{-1}\dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx, & \cosh^{-1}(x/a) < 0,\ n \neq -1 \end{cases}$$

$$\int x^n\tanh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tanh^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{a^2 - x^2}\,dx$$

$$\int x^n\coth^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\coth^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{a^2 - x^2}\,dx, \qquad n \neq -1$$

8 ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

8.1 Ορισμοί

Έστω ότι η $f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα $a \le x \le b$. Αν το διάστημα αυτό χωρισθεί σε n ίσα υποδιαστήματα με μήκος $\Delta x = (b-a)/n$, το *ορισμένο ολοκλήρωμα* της $f(x)$ από το $x = a$ έως το $x = b$ ορίζεται με τη σχέση

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\{f(a)\Delta x + f(a+\Delta x)\Delta x + f(a+2\Delta x)\Delta x + \cdots f(a+(n-1)\Delta x)\Delta x\}$$

Αν η $f(x)$ είναι τμηματικά συνεχής (συνεχής σε υποδιαστήματα του διαστήματος ολοκλήρωσης), το όριο υπάρχει.

Αν $f(x) = \dfrac{d}{dx}g(x)$, τότε σύμφωνα με το *θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού* είναι

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{d}{dx}g(x) = g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

Αν το διάστημα είναι άπειρο ή αν η $f(x)$ έχει ένα ανώμαλο σημείο στο διάστημα ολοκλήρωσης, το ορισμένο ολοκλήρωμα λέγεται *γενικευμένο ολοκλήρωμα* και μπορεί να ορισθεί κατάλληλα με όρια. Έτσι π.χ. είναι

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad \text{αν } b \text{ είναι ένα ανώμαλο σημείο}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \qquad \text{αν } a \text{ είναι ένα ανώμαλο σημείο}$$

Η *πρωτεύουσα τιμή του Cauchy* (που μπορεί να υπάρχει ακόμα και όταν το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει) ενός γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ ορίζεται ως το όριο $\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^N f(x)\,dx$. Όμοια, για ένα ανώμαλο σημείο c στο εσωτερικό του διαστήματος ολοκλήρωσης η πρωτεύουσα τιμή του Cauchy ορίζεται ως το όριο $\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right]$.

8.2 Γενικοί Κανόνες και Ιδιότητες

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm \cdots]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \pm \int_a^b h(x)\,dx \pm \cdots$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \qquad \text{[ολοκλήρωση κατά παράγοντες]}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c), \qquad \text{για κατάλληλο } c \text{ μεταξύ των } a \text{ και } b$$

Αυτό είναι το *θεώρημα της μέσης τιμής*για ορισμένα ολοκληρώματα και ισχύει, αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $a \le x \le b$.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx, \qquad \text{για κατάλληλο } c \text{ μεταξύ των } a \text{ και } b$$

Η σχέση αυτή αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος της μέσης τιμής και ισχύει, αν οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς στο $a \le x \le b$ και $g(x) \ge 0$.

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} F(x,\alpha)\,dx = \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} \frac{\partial F}{\partial \alpha}dx + F(\varphi_2,\alpha)\frac{d\varphi_2}{d\alpha} - F(\varphi_1,\alpha)\frac{d\varphi_1}{d\alpha} \qquad \text{[κανόνας του Leibnitz]}$$

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \{f(0)-f(\infty)\}\ln\frac{b}{a}$$

Αυτό είναι το *ολοκλήρωμα του Frullani* και ισχύει, αν η $f'(x)$ είναι συνεχής και το $\int_1^\infty \frac{f(x)-f(\infty)}{x}dx$ συγκλίνει.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le M(b-a), \qquad \text{για } |f(x)| \le M \text{ στο } a < x < b$$

8.3 Διάφορα Ολοκληρώματα

Με αλγεβρικές συναρτήσεις

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \int_0^1 \frac{x^m + x^n}{(1+x)^{m+n+2}} dx = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}, \qquad m>-1,\ n>\cdot$$

$$\int_0^1 \frac{x^n \, dx}{1+x} = (-1)^n \left[\ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n} \right], \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\int_0^1 \frac{x^\lambda \, dx}{(1-x)^{\lambda+1}} = \frac{\pi}{\sin(\lambda+1)\pi}, \qquad -1<\lambda<0$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} \, dx = \frac{\pi a^2}{4}$$

$$\int_0^a x^m (a^n - x^n)^p \, dx = \frac{a^{m+1+np}\Gamma[(m+1)/n]\Gamma(p+1)}{n\Gamma[(m+1)/n+p+1]}$$

$$\int_{-a}^a (a+x)^{m-1}(a-x)^{n-1} dx = (2a)^{m+n-1} \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^\lambda \, dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin(\lambda+1)\pi}, \qquad -1<\lambda<0$$

$$\int_0^1 x^m (1-x^n)^p \, dx = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{m+1}{n}+p+1\right)}, \qquad m>-1,\ n>0,\ p>-1$$

$$\int_0^\infty \frac{x^m \, dx}{x^n + a^n} = \frac{\pi a^{m+1-n}}{n \sin[(m+1)\pi/n]}, \qquad 0<m+1<n$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cot^{-1} \frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}}, \qquad a>0,\ 4ac-b^2>0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n\,dx}{x^2+2x\cos\beta+1} = \frac{\pi}{\sin n\pi} \frac{\sin n\beta}{\sin\beta}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m\,dx}{(x^n+a^n)^p} = \frac{(-1)^{p-1}\pi a^{m-np+1}\Gamma[(m+1)/n]}{n\sin[(m+1)\pi/n](p-1)!\,\Gamma[(m+1)/n-p+1]}, \qquad 0<m+1<np$$

Με τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Όλα τα γράμματα-σύμβολα θεωρούνται θετικά εκτός αν δηλωθεί το αντίθετο.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 nx\,dx = \frac{\pi}{4}, \qquad n=1,2,\ldots$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{\pi}{4}, \qquad n=1,2,\ldots$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \begin{Bmatrix} 0, & m\neq n \\ \pi/2, & m=n \end{Bmatrix}, \qquad m,\ n=1,2,\ldots$$

$$\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \begin{Bmatrix} 0, & m\neq n \\ \pi/2, & m=n \end{Bmatrix}, \qquad m,\ n=1,2,\ldots$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = \begin{Bmatrix} 0, & m+n=2p \\ 2m/(m^2-n^2), & m+n=2p+1 \end{Bmatrix}, \qquad m,\ n,\ p=1,2,\ldots$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots(n-1)}{3\cdot5\cdot7\cdots n}, & n=2p+1,\ p=0,1,2\ldots \\ \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots n}\dfrac{\pi}{2}, & n=2p,\ p=1,2\ldots \\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2+1)}, & n>-1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} x\sin^n x\,dx = \pi\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2}\tan^p x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cot^p x\,dx = \frac{\pi}{2\cos(p\pi/2)} \qquad |p|<1$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\tan^n x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{x\,dx}{\sin x} = 2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots\right) = 2G \approx 1.8319311884$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{x^2\,dx}{\sin^2 x} = \pi\ln 2$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{x\,dx}{\tan x} = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\int_0^{\pi}\sin^p x\sin mx\,dx = \frac{\pi}{2^p}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-m}{2}+1\right)}, \qquad \begin{cases} p+1>0 \\ p+m+2>0 \\ p-m+2>0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^p x\cos mx\,dx = \frac{\pi}{2^{p+1}}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-m}{2}+1\right)}, \qquad \begin{cases} p+1>0 \\ p+m+2>0 \\ p-m+2>0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^p x\cos mx\,dx = \frac{\pi}{2^p}\frac{\cos\frac{m\pi}{2}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-m}{2}+1\right)}, \qquad \begin{cases} p+1>0 \\ p+m+2>0 \\ p-m+2>0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^p x\cos^q x\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}, \qquad \begin{cases} p+1>0 \\ q+1>0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\cos^{-1}(b/a)}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\sin x} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \pm 2ab\cos x + b^2} = \frac{\pi}{|a^2-b^2|}, \qquad a \neq \pm b$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \begin{cases} (\pi/a)\ln(1+a) & |a|<1 \\ \pi\ln(1+1/a) & |a|>1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\pi a^m}{1-a^2}, \qquad a^2<1,\ m=0,1,2,\ldots$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\sin x)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2} = \frac{1}{ab}, \qquad a>0,\ b>0$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1\pm a^2\sin^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1\pm a^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1\pm a^2}}, \qquad 1\pm a^2\sin^2 x>0$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1\pm a^2\sin^2 x)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1\pm a^2\cos^2 x)^2} = \frac{\pi(2\pm a^2)}{4(1\pm a^2)^{3/2}}, \qquad 1\pm a^2\sin^2 x>0$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{b^2+a^2\tan^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{2b(a+b)}, \qquad a>0,\ b>0$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2+b^2\cot^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{2a(a+b)}, \qquad a>0,\ b>0$$

$$\int_0^{1} \frac{\sin^{-1} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x$$

$$\int_0^{1} \frac{\tan^{-1} x}{x}\,dx = \frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}\cdots = G = 0.9159655942\ldots$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin px}{x}\,dx = \begin{cases} \pi/2, & p>0 \\ 0, & p=0 \\ -\pi/2, & p<0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin px \sin qx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{p+q}{p-q}, \qquad p > q > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin px \cos qx}{x}\,dx = \begin{cases} \pi/2, & p > q > 0 \\ \pi/4, & p = q > 0 \\ 0, & q > p > 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin px \sin qx}{x^2}\,dx = \begin{cases} \pi p/2 & q \geq p > q \\ \pi q/2 & p \geq q > 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 px}{x^2}\,dx = \frac{\pi|p|}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos px}{x^2}\,dx = \frac{\pi|p|}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos px - \cos qx}{x}\,dx = \ln\left|\frac{q}{p}\right|, \qquad p > 0,\ q > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos px - \cos qx}{x^2}\,dx = \frac{\pi(q-p)}{2}, \qquad q > p > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2n+1} mx}{x}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{\pi}{2}, \qquad m > 0,\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma}, \qquad a > 0,\ m \geq 0$$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin mx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma}, \qquad a \geq 0,\ m > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}\,dx = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ma}), \qquad a > 0,\ m \geq 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx = \frac{3\pi}{8}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4} = \frac{\pi}{3}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\sin(p\pi/2)}, \qquad 0 < p < 2$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos(p\pi/2)}, \qquad 0 < p < 1$$

$$\int_0^\infty \frac{\tan mx}{x}\,dx = \begin{cases} \pi/2, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\pi/2, & m < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} px - \tan^{-1} qx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{p}{q}$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x\right)\frac{dx}{x} = \gamma$$

$$\int_0^\infty \sin(ax^2)\,dx = \int_0^\infty \cos(ax^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}, \qquad a > 0$$

$$\int_0^\infty \sin(ax^p)\,dx = \frac{1}{pa^{1/p}}\Gamma(1/p)\sin\frac{\pi}{2p}, \qquad p > 1$$

$$\int_0^\infty \cos(ax^p)\,dx = \frac{1}{pa^{1/p}}\Gamma(1/p)\cos\frac{\pi}{2p}, \qquad p > 1$$

$$\int_0^\infty \sin(ax^2)\cos 2bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\cos\frac{b^2}{a} - \sin\frac{b^2}{a}\right), \qquad a > 0$$

$$\int_0^\infty \cos(ax^2)\cos 2bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\cos\frac{b^2}{a} + \sin\frac{b^2}{a}\right), \qquad a > 0$$

Με εκθετικές συναρτήσεις

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}, \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty xe^{-ax}\,dx = \frac{1}{a^2}, \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-ax}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}, \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty x^p e^{-ax}\,dx = \begin{cases} \dfrac{p!}{a^{p+1}}, & p=1,\,2,\,3,\ldots,\; a>0 \\ \dfrac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}, & p>-1,\; a>0 \end{cases}$$

[$\Gamma(x)$ η συνάρτηση γάμα]

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}, \qquad a>0,\; b>0$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^{ax}-1} = \frac{\pi^2}{6a^2}, \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{ax}+1} = \frac{\ln 2}{a}, \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^{ax}+1} = \frac{\pi^2}{12a^2}, \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\frac{dx}{x} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx = \gamma$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{e^{ax}-1} = \begin{cases} \dfrac{(p-1)!}{a^p}\zeta(p) = \dfrac{2^{2n-2}\pi^{2n}}{na^{2n}}B_n, & p=2n,\; n=1,\,2,\ldots,\; a>0 \\ \dfrac{\Gamma(p)}{a^p}\zeta(p), & p>0,\; a>0 \end{cases}$$

[$\Gamma(x)$ η συνάρτηση γάμα, $\zeta(x)$ η συνάρτηση ζήτα του Riemann]

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{e^{ax}+1} = \begin{cases} \dfrac{(2n-1)!}{a^{2n}}(1-2^{1-2n})\zeta(p) = \dfrac{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}{2na^{2n}}B_n, & \begin{cases} p=2n,\ a>0 \\ n=1,2,\ldots \end{cases} \\ \dfrac{\Gamma(p)}{a^p}(1-2^{1-p})\zeta(p), & p>0,\ a>0 \end{cases}$$

[$\Gamma(x)$ η συνάρτηση γάμα, $\zeta(x)$ η συνάρτηση ζήτα του Riemann]

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \frac{1}{1^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots = 1.2912859970627\ldots$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}, \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty xe^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}, \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty xe^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}, \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin bx}{x}\,dx = \tan^{-1}\frac{b}{a}, \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{\Gamma(p)\sin p\theta}{(a^2+b^2)^{p/2}}, \qquad \begin{cases} a,\ b,\ p>0 \\ \theta = \sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{\Gamma(p)\cos p\theta}{(a^2+b^2)^{p/2}}, \qquad \begin{cases} a,\ p>0 \\ \theta = \sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx+c)\,dx = \frac{a\sin c+b\cos c}{a^2+b^2}, \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx+c)\,dx = \frac{a\sin c-b\cos c}{a^2+b^2}, \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\sin cx\,dx=\frac{2abc}{[a^2+(b-c)^2][a^2+(b+c)^2]},\qquad a>0$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\cos cx\,dx=\frac{b(a^2+b^2-c^2)}{[a^2+(b-c)^2][a^2+(b+c)^2]},\qquad a>0$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\cos cx\,dx=\frac{b(a^2+b^2+c^2)}{[a^2+(b-c)^2][a^2+(b+c)^2]},\qquad a>0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin px}{e^{ax}-1}dx=\frac{\pi}{2a}\coth\frac{p\pi}{a}-\frac{1}{2p},\qquad a>p>0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin px}{e^{ax}+1}dx=\frac{1}{2p}-\frac{\pi}{2a\sinh(p\pi/a)},\qquad a>p>0$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos px\,dx=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+p^2}{a^2+p^2}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin px\,dx=\tan^{-1}\frac{b}{p}-\tan^{-1}\frac{a}{p}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}(1-\cos x)}{x^2}dx=\cot^{-1}a-\frac{a}{2}\ln(a^2+1)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}(1-\cos bx)\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{a^2},\qquad a>0$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}(\cos bx-\cos cx)\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2},\qquad a>0$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\qquad a>0$$

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx=\frac{1}{2a},\qquad a>0$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/4a},\qquad a>0$$

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}dx=\sqrt{a\pi},\qquad a>0$$

$$\int_0^\infty e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{(b^2-4ac)/4a}\operatorname{erfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right), \qquad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-x^2}\,dx\ ,\ \ a>0$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{(b^2-4ac)/4a}$$

$$\int_0^\infty e^{-(ax^2+b/x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}, \qquad a>0,\ b>0$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}-e^{-x}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\gamma \qquad [\gamma \text{ ο αριθμός του Euler}]$$

$$\int_0^\infty x^p e^{-ax^2}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}, & p=2n,\ n=1,\ 2,\ldots,\ a>0 \\ \dfrac{n!}{2a^{n+1}}, & p=2n+1,\ n=1,\ 2,\ldots,\ a>0 \\ \dfrac{1}{2}a^{-(p+1)/2}\Gamma\left(\dfrac{p+1}{2}\right), & p>-1,\ a>0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty x^p e^{-(ax)^q}\,dx = \frac{1}{qa^{p+1}}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right), \qquad a>0,\ p>-1,\ q>0$$

Με λογαριθμικές συναρτήσεις

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1\pm x}\,dx = (-3\pm 1)\frac{\pi^2}{24}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx = -\ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots\right] = -G = -0.9159655942\ldots$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 1-\ln 2$$

$$\int_0^1 (\ln x)\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi}{8}(1+2\ln 2)$$

$$\int_0^1 (\ln x)\ln(1+x)\,dx = 2-2\ln 2-\frac{\pi^2}{12}$$

$$\int_0^1 (\ln x)\ln(1-x)\,dx = 2-\frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^1 \ln|\ln x|\,dx = -\gamma$$

$$\int_0^1 x^p \ln x\,dx = \frac{-1}{(p+1)^2}, \qquad p>-1$$

$$\int_0^1 (-\ln x)^p\,dx = \Gamma(p+1), \qquad p>-1$$

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx = -p^2\,\frac{\cot p\pi}{\sin p\pi} \qquad 0<p<1$$

$$\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1+x}\,dx = (-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{12}+(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}, \qquad n=1,2,\ldots$$

$$\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1-x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}, \qquad n=1,2,\ldots$$

$$\int_0^1 x^n \ln(1-x)\,dx = \frac{-1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$\int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\left[2\ln 2+\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k}\right], & n=0,2,4,\ldots \\ \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}, & n=1,3,5,\ldots \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1\pm x^p)}{x}\,dx = (-1\pm 3)\frac{\pi^2}{24p}, \qquad p>0$$

$$\int_0^1 x^p(-\ln x)^q\,dx = \begin{cases} \dfrac{n!}{(p+1)^{n+1}}, & p>-1,\ q=n=0,1,2,\ldots \\ \dfrac{\Gamma(q+1)}{(p+1)^{q+1}}, & p>-1,\ q>-1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,dx = \ln\frac{p+1}{q+1}, \qquad p>-1,\ q>-1$$

$$\int_0^1 x^{p-1}\sin(q\ln x)\,dx = \frac{-q}{p^2+q^2}, \qquad p>0$$

$$\int_0^1 x^{p-1}\cos(q\ln x)\,dx = \frac{p}{p^2+q^2}, \qquad p>0$$

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\int_0^{\pi/2}[\ln(\sin x)]^2dx = \int_0^{\pi/2}[\ln(\cos x)]^2dx = \frac{\pi}{2}(\ln 2)^2 + \frac{\pi^3}{24}$$

$$\int_0^{\pi} x\ln(\sin x)\,dx = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$$

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)\ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2}(\cos x)\ln(\cos x)\,dx = \ln 2 - 1$$

$$\int_0^{2\pi}\ln(a+b\sin x)\,dx = \int_0^{2\pi}\ln(a+b\cos x)\,dx = 2\pi\ln\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)$$

$$\int_0^{\pi}\ln(a\pm b\cos x)\,dx = \pi\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right), \qquad a\ge b>0$$

$$\int_0^{\pi}\ln(a^2\pm 2ab\cos x + b^2)\,dx = \begin{cases} 2\pi\ln a, & a\ge b>0 \\ 2\pi\ln b, & b\ge a>0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2}\ln(1\pm\cos x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 \pm 2G = -\frac{\pi}{2}\ln 2 \pm 1.8319311884\ldots$$

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1+\tan x)\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2 + G = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 0.9159655942$$

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1-\tan x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 - G = \frac{\pi}{8}\ln 2 - 0.4579827971\ldots$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+b\cos x)-\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\left\{(\cos^{-1} a)^2 - (\cos^{-1} b)^2\right\}$$

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\sin x)\,dx = -\frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{G}{2} = -\frac{\pi}{4}\ln 2 - 0.4579827971\ldots$$

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,dx = -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{G}{2} = -\frac{\pi}{4}\ln 2 + 0.4579827971\ldots$$

$$\int_0^{a} \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx = -\left(\frac{\sin a}{1^2} + \frac{\sin 2a}{2^2} + \frac{\sin 3a}{3^2} + \cdots\right)$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1+p\sin^2 x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln(1+p\cos^2 x)\,dx = \pi\ln\frac{1+\sqrt{1+p}}{2}, \qquad p \ge -1$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,dx = \pi\ln\frac{a+b}{2}, \qquad a>0,\ b>0$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2\tan^2 x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2\cot^2 x)\,dx = \pi\ln(a+b), \qquad a>0,\ b>0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx = -\gamma$$

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}\ln x\,dx = 1-\gamma$$

$$\int_0^{\infty} x^2e^{-x}\ln x\,dx = 3-2\gamma$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = -\sqrt{\pi}(2\ln 2+\gamma)$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\ln x\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\gamma + 2\ln 2)$$

$$\int_0^\infty \ln(1 \pm e^{-x})\,dx = (-1 \pm 3)\frac{\pi^2}{24}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\ln a, \qquad a > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 + G = \frac{\pi}{4}\ln 2 + 0.9159655942\ldots$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln x}{1 \pm x}\,dx = \frac{\pi^2}{\sin^2 p\pi}\left(-\cos^2\frac{p\pi}{2} \pm \sin^2\frac{p\pi}{2}\right), \qquad 0 < p < 1$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^p)}{x^{q+1}}\,dx = \frac{\pi}{q\sin(\pi q/p)}, \qquad 0 < q < p$$

Με υπερβολικές συναρτήσεις

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sinh ax} = \frac{\pi^2}{4a^2}, \qquad a > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\cosh ax} = \frac{\pi}{2a}, \qquad a > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\cosh ax} = \frac{2G}{a^2} = \frac{1.8319311884\ldots}{a^2}, \qquad a > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{\sinh ax} = \frac{2^p - 1}{2^{p-1}a^p}\Gamma(p)\zeta(p), \qquad a > 0,\ p > 1$$

[$\Gamma(x)$ η συνάρτηση γάμα, $\zeta(x)$ η συνάρτηση ζήτα του Riemann]

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{\cosh ax} = \frac{2\Gamma(p)}{a^p}\left(1 - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{7^p} + \cdots\right), \qquad a > 0,\ p > 0$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sinh x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sinh bx}\,dx = \frac{\pi}{2b}\tanh\frac{a\pi}{2b}, \qquad b > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\cosh bx}\,dx = \frac{\pi}{2b}\left(\cosh\frac{a\pi}{2b}\right)^{-1}, \qquad b>0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sinh px}{\sinh qx}\,dx = \frac{\pi}{2q}\tan\frac{\pi p}{2q}, \qquad |p|<q$$

$$\int_0^\infty \frac{\cosh px}{\cosh qx}\,dx = \frac{\pi}{2q\cos(\pi p/2q)}, \qquad |p|<q$$

$$\int_0^\infty \sin px \tanh qx\,dx = \frac{\pi}{2q\sinh(\pi p/2q)}, \qquad q>0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin px}{\tanh qx}\,dx = \frac{\pi}{2q\tanh(\pi p/2q)}, \qquad q>0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sinh ax}{e^{bx}+1}\,dx = \frac{\pi}{2b\sin(a\pi/b)} - \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sinh ax}{e^{bx}-1}\,dx = \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2b}\cot\frac{a\pi}{b}$$

9 ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΓΑΜΑ ΚΑΙ ΒΗΤΑ

9.1 Η Συνάρτηση Γάμα

Ορισμοί

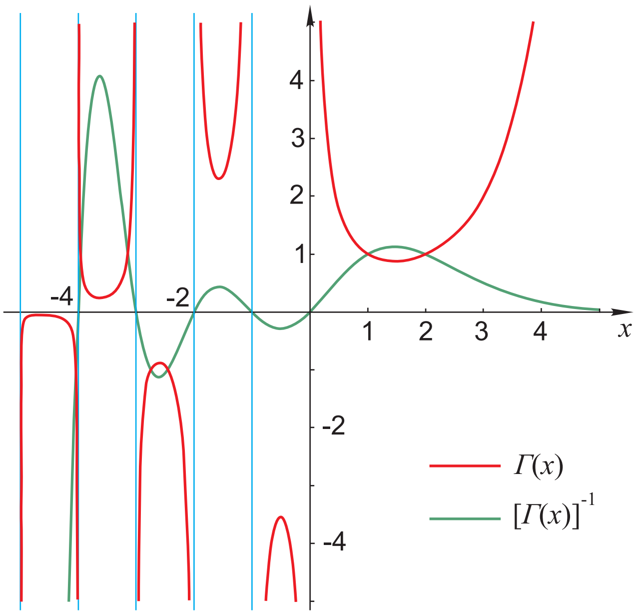
Αν $x > 0$, $\qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1}\, dt$

Αν $x < 0$, $\qquad \Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ $\quad$ (αναδρομικά)

Οι προηγούμενοι ορισμοί ισχύουν και για μιγαδικό x με $\mathrm{Re}(x) > 0$.

Άλλοι ορισμοί $\qquad \Gamma(x+1) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)} k^x$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-x/n} \right\} \quad [\gamma \text{ η σταθερή του Euler}]$$



Σχ. 9-1

Ιδιότητες

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$\Gamma(n+1) = n!$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$ με $0! = 1$.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2x) \quad \text{[τύπος διπλασιασμού]}$$

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = n^{1/2-nx}(2\pi)^{(n-1)/2}\Gamma(nx)$$

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\gamma$$

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{x+k}\right) + \cdots \quad \text{[η συνάρτηση } \psi(x)\text{]}$$

$\psi(1) = -\gamma$, $\psi(x+1) = \psi(x) + x^{-1}$

Ασυμπτωτική σειρά του Stirling για μεγάλο x

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\,x^x e^{-x}\left\{1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + \cdots\right\}$$

Για $x = n$ (μεγάλος θετικός ακέραιος)

$$\Gamma(n+1) = n! \simeq \sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}$$

Ο λόγος των δύο μελών τείνει στο 1, όταν $n \to \infty$.)

Τιμές

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,, \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n\sqrt{\pi}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

9.2 Η Συνάρτηση Βήτα

Ορισμοί

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \qquad x>0,\ \ y>0$$

Ο ορισμός ισχύει και για μιγαδικά x και y με $\mathrm{Re}(x)>0$, $\mathrm{Re}(y)>0$.

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \text{(επέκταση σε } x<0,\ y<0\text{)}$$

Ιδιότητες

$$B(x,y)=B(y,x)$$

$$B(x,y)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta$$

$$B(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt$$

$$B(m,n)=r^n(r+1)^m\int_0^1\frac{t^{m-1}(1-t)^{n-1}}{(r+t)^{m+n}}\,dt$$

$$\frac{1}{B(m,n)}=m\binom{m+n-1}{n-1}=n\binom{m+n-1}{m-1}, \qquad m,\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

10 ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

10.1 Ορισμοί

Συνήθης διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ) καλείται μια εξίσωση της μορφής

$$f[y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x] = 0$$

όπου $y'(x)$, $y''(x)$, …, $y^{(n-1)}(x)$, $y^{(n)}(x)$ είναι οι παράγωγοι της $y(x)$ ως προς x. *Τάξη* της διαφορικής εξίσωσης καλείται η τάξη της μέγιστης τάξης παραγώγου n που εμφανίζεται στην εξίσωση. *Λύση* της διαφορικής εξίσωσης καλείται μια συνάρτηση $y(x)$, η οποία μαζί με τις παραγώγους της ικανοποιούν τη ΣΔΕ σε κάποιο διάστημα μεταβολής της x. Η x καλείται *ανεξάρτητη μεταβλητή* και η y *εξαρτημένη μεταβλητή*.

Γενική λύση της ΣΔΕ καλείται μια λύση της μορφής $y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, που εξαρτάται από την x και n αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2, ..., c_n. Αν στις σταθερές δοθούν αυθαίρετες αλλά συγκεκριμένες τιμές, προκύπτει μια *μερική λύση* της ΣΔΕ. Μια λύση της ΣΔΕ που δεν προκύπτει από τη γενική λύση για κάποιες τιμές των σταθερών (δηλαδή είναι μια ξεχωριστή λύση) καλείται *ιδιάζουσα λύση*.

Αρχικές συνθήκες καλούνται n αλγεβρικές εξισώσεις της μορφής

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0{}^{(n-1)}$$

δηλαδή συνθήκες σε ένα σημείο $x = x_0$, από τις οποίες μπορούν να προσδιοριστούν οι σταθερές c_1, c_2, ..., c_n και να προκύψει έτσι μια μερική λύση της ΣΔΕ. Εναλλακτικά, οι σταθερές μπορούν προσδιοριστούν από *συνοριακές συνθήκες*, δηλαδή συνθήκες στα άκρα ενός διαστήματος μεταβολής της x.

Ένα *σύστημα* ΣΔΕ είναι ένα σύνολο ΣΔΕ που περιέχουν δύο ή περισσότερες εξαρτημένες μεταβλητές $y_1(x)$, $y_2(x)$, … και τις παραγώγους τους ως προς x. Γενικά, ένα σύστημα ΣΔΕ μπορεί να αναχθεί σε μία ΣΔΕ ανώτερης τάξης. Αντίστροφα, μια οποιαδήποτε ΣΔΕ μπορεί να αναχθεί σε ένα σύστημα ΣΔΕ πρώτης τάξης με αντικατάσταση των παραγώγων ανώτερης τάξης από νέες εξαρτημένες μεταβλητές.

Πρόβλημα αρχικών τιμών καλείται ένα πρόβλημα που ζητά να βρεθεί μια συγκεκριμένη λύση μιας δεδομένης ΣΔΕ, η οποία λύση ικανοποιεί δεδομένες συνθήκες. Όμοια, *πρόβλημα συνοριακών τιμών* καλείται ένα πρόβλημα που ζητά να βρεθεί μια συγκεκριμένη λύση μια δεδομένης ΣΔΕ, η οποία λύση ικανοποιεί δεδομένες αρχικές συνθήκες.

Γραμμική ΣΔΕ καλείται μια ΣΔΕ, αν είναι γραμμική ως προς την εξαρτημένη μεταβλητή και τις παραγώγους της. Αλλιώς καλείται *μη γραμμική*.

10.2 Απλές ΣΔΕ

Ορισμένες κατηγορίες ΣΔΕ μπορούν να λυθούν σχετικά εύκολα με διάφορες μεθόδους.

ΣΔΕ χωριζόμενων μεταβλητών

ΔΕ: $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$

Λύση: $\displaystyle\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$

Πλήρης διαφορική εξίσωση

ΔΕ: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ με $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Λύση: $\displaystyle\int M\partial x + \int\left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\partial x\right)dy = c$

όπου ολοκλήρωση με ∂x σημαίνει ότι το y θεωρείται σταθερό. Μερικές φορές μια ΣΔΕ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ που δεν είναι πλήρης μπορεί να γίνει πλήρης, αν πολλαπλασιαστεί με κάποια συνάρτηση $\mu(x)$, που καλείται *ολοκληρωτικός παράγοντας*.

Ομογενής εξίσωση πρώτης τάξης

ΔΕ: $\dfrac{dy}{dx} = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Λύση: $\displaystyle\ln x = \int \frac{d\upsilon}{F(\upsilon) - \upsilon} + c$ όπου $\upsilon = \dfrac{y}{x}$.

Γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης

ΔΕ: $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

Λύση: $\displaystyle y = e^{-R}\int qe^{R}dx + c$ όπου $\displaystyle R = \int p\,dx$.

Εξίσωση του Bernoulli

ΔΕ: $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n,\qquad n \neq 1$

Λύση: $y^{1-n} = (1-n)e^{-R} \int q e^{R} dx$ όπου $R = (1-n)\int p\, dx$.

Γραμμική ομογενής εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

ΔΕ: $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + a\dfrac{dy}{dx} + by = 0$ (a, b πραγματικές σταθερές)

Λύση: Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της *χαρακτηριστικής εξίσωσης* $\rho^2 + a\rho + b = 0$.

Αν ρ_1, ρ_2 πραγματικές και διάφορες

$$y = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x}$$

Αν ρ_1, ρ_2 πραγματικές και ίσες

$$y = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 x e^{\rho_1 x}$$

Αν ρ_1, ρ_2 συζυγείς μιγαδικές (έστω $\rho_1 = \rho_2{}^* = \kappa + \lambda i$)

$$y = e^{\kappa x}(c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x)$$

Γραμμική μη ομογενής εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

ΔΕ: $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + a\dfrac{dy}{dx} + by = r(x)$ (a, b πραγματικές σταθερές)

Λύση: Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της *χαρακτηριστικής εξίσωσης* $\rho^2 + a\rho + b = 0$.

Αν ρ_1, ρ_2 πραγματικές και διάφορες

$$y = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x} + \frac{e^{\rho_1 x}}{\rho_1 - \rho_2}\int e^{-\rho_1 x} r(x)dx + \frac{e^{\rho_2 x}}{\rho_2 - \rho_1}\int e^{-\rho_2 x} r(x)dx$$

Αν ρ_1, ρ_2 πραγματικές και ίσες

$$y = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 x e^{\rho_1 x} + x e^{\rho_1 x}\int e^{-\rho_1 x} r(x)dx - e^{\rho_1 x}\int x e^{-\rho_1 x} r(x)dx$$

Αν ρ_1, ρ_2 συζυγείς μιγαδικές (έστω $\rho_1 = \rho_2{}^* = \kappa + \lambda i$)

$$y = e^{\kappa x}(c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x) + \frac{e^{\kappa x}\sin\lambda x}{\lambda}\int e^{-\kappa x} r(x)\cos\lambda x\, dx$$

$$- \frac{e^{\kappa x}\cos\lambda x}{\lambda}\int e^{-\kappa x} r(x)\sin\lambda x\, dx$$

Εξίσωση του Euler ή του Cauchy

ΔΕ: $$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + by = r(x)$$

Λύση: Με $x = e^t$ η ΔΕ γίνεται $\frac{d^2 y}{dx^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = r(e^t)$ δηλ. γραμμική μη ομογενής δεύτερης τάξης.

Εξίσωση του Bessel

ΔΕ: $$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - n^2) y = 0$$

Λύση: $$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$$

όπου $J_n(\lambda x)$ και $Y_n(x)$ οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Μετασχηματισμένη εξίσωση του Bessel

ΔΕ: $$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2p+1)x \frac{dy}{dx} + (\alpha^2 x^2 + \beta^2) y = 0$$

Λύση: $$y = x^{-p}\left[c_1 J_{q/r}\left(\frac{\alpha}{r} x^r\right) + c_2 Y_{q/r}\left(\frac{\alpha}{r} x^r\right)\right], \qquad q = \sqrt{p^2 - \beta^2}$$

Εξίσωση του Legendre

ΔΕ: $$(1-x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1) y = r(x)$$

Λύση: $$y = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$$

όπου $P_n(x)$ και $Q_n(x)$ τα πολυώνυμα Legendre και οι συναρτήσεις Legendre αντίστοιχα.

Γραμμική ΣΔΕ τάξης *n*

Μια γραμμική ΣΔΕ τάξης n έχει τη μορφή

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x)$$

Αν $g(x) = 0$, η ΣΔΕ λέγεται *ομογενής*, αλλιώς *μη ομογενής*

Η βασική ιδιότητα της γραμμικής ομογενούς ΣΔΕ είναι ότι, αν $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις, τότε και η $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ είναι λύση.

Μια γραμμική ομογενής ΣΔΕ τάξης n έχει n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1, y_2, ..., y_n. Η γενική λύση της ομογενούς ΣΔΕ είναι $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$. Η γενική λύση της αντίστοιχης μη ομογενούς είναι $y = y_h + y_p$, όπου y_p είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς.

Προσδιορισμός της μερικής λύσης

Η μερική λύση $y_p(x)$ μπορεί να προσδιοριστεί με τη *μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών* σε ορισμένες περιπτώσεις όπου η $g(x)$ είναι της μορφής $e^{ax}p_n(x)\sin bx + e^{ax}q_n(x)\cos bx$ με $p_n(x)$ και $q_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού n. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο δεχόμαστε ότι μια μερική λύση είναι της μορφής $e^{ax}P_n(x)\sin bx + e^{ax}Q_n(x)\cos bx$, όπου $P_n(x)$ και $Q_n(x)$ είναι πολυώνυμα βαθμού n και με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση προσδιορίζουμε τους συντελεστές τους. Αν κάποιος όρος της μερικής λύσης περιέχεται ήδη στη λύση της ομογενούς, τότε η μερική λύση που δοκιμάζουμε πολλαπλασιάζεται επί x^m, ώστε να μην έχει κοινό όρο με τη λύση της ομογενούς.

Μια άλλη γενικότερη μέθοδος προσδιορισμού της μερικής λύσης είναι η *μέθοδος της μεταβολής των σταθερών*. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο αντικαθιστούμε τις σταθερές c_i $(i = 1, \cdots, n)$ της y_h με άγνωστες συναρτήσεις $\upsilon_i(x)$, δηλαδή δεχόμαστε ότι $y_h = \upsilon_1 y_1 + \upsilon_2 y_2 + ... + \upsilon_n y_n$. Ακολούθως λύνουμε ως προς υ_i' το σύστημα των n γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων [με γνωστές τις παραγώγους $y_i^{(j)}(x)$ μέχρι και τάξης n]

$$\upsilon_1' y_1^{(j)} + \upsilon_2' y_2^{(j)} + \cdots + \upsilon_n'^{(j)} y_n = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-2$$

$$\upsilon_1' y_1^{(n)} + \upsilon_2' y_2^{(n)} + \cdots + \upsilon_n'^{(n)} y_n = g(x)/a_n(x)$$

Τέλος, ολοκληρώνουμε ως προς x τις υ_i' και βρίσκουμε τις συναρτήσεις $\upsilon_i(x)$.

Γραμμική ομογενής ΣΔΕ τάξης *n* με σταθερούς συντελεστές

Μια γραμμική ομογενής ΣΔΕ τάξης n με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0(x) y = 0$$

όπου a_0, a_1, ..., a_n είναι πραγματικές σταθερές. Η *χαρακτηριστική εξίσωση* είναι

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Αν οι ρίζες λ_1, λ_2, ..., λ_n είναι όλες πραγματικές και διάφορες, η γενική λύση είναι

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Αν οι ρίζες (μερικές ή όλες) είναι συζυγείς μιγαδικές, ισχύει η ίδια έκφραση για τη λύση, όπου τώρα οι όροι με εκθέτες συζυγείς μιγαδικούς μπορούν να συνδυαστούν σε όρους ημιτόνων και συνημιτόνων. Αν μία ρίζα μ έχει πολλαπλότητα m, τότε οι αντίστοιχοι όροι στην προηγούμενη έκφραση της λύσης πρέπει να αντικατασταθούν με τους $e^{\mu x}, x e^{\mu x}, x^2 e^{\mu x}, \ldots, x^{m-1} e^{\mu x}$.

11 ΣΕΙΡΕΣ

11.1 Σειρές με Σταθερούς Όρους

Αριθμητική πρόοδος

Ακολουθία: $a_1 = a,\ \ a_2 = a + d,\ \ a_3 = a + 2d,\ \ \ldots,\ \ a_n = a + (n-1)d$

Άθροισμα: $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$

Γεωμετρική πρόοδος

Ακολουθία: $a_1 = a,\ \ a_2 = ar,\ \ a_3 = ar^2,\ \ \ldots,\ \ a_n = ar^{n-1}$

Άθροισμα: $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, \qquad r \neq 1$

Με $-1 < r < 1$ και $n \to \infty$ έχουμε το άθροισμα άπειρων όρων

$$a + ar + ar^2 + \cdots = \frac{a}{1-r}, \qquad r \neq 1$$

Δυνάμεις ακεραίων

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

$$1 + 8 + 16 + 24 + 32 \cdots + 8(n-1) = (2n-1)^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}}{k+1}, \qquad k,\ n = 1, 2, \ldots$$

[$B_k(x)$ τα πολυώνυμα Bernoulli, B_k οι αριθμοί του Bernoulli]

Αν $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$, όπου k και n θετικοί ακέραιοι, τότε

$$\binom{k+1}{1}S_1 + \binom{k+1}{2}S_2 + \cdots + \binom{k+1}{k}S_k = (n+1)^{k+1} - (n+1)$$

Αντίστροφες δυνάμεις θετικών ακεραίων

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \ln 2$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \cdots = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{3}\ln 2$$

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \cdots = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})}{4}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \cdots = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{3}\ln 2$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \zeta(3) = 1.2020569032$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \cdots = \zeta(5) = 1.0369277551$$

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots = \zeta(x)$$

[$\zeta(x)$ η συνάρτηση ζήτα του Riemann]

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\frac{1}{1^4}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{7\pi^4}{720}$$

$$\frac{1}{1^6}-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\cdots=\frac{31\pi^6}{30240}$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}$$

$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{960}$$

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots=\frac{\pi^3}{32}$$

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots=\frac{3\pi^2\sqrt{2}}{16}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{1}{3^2\cdot 5^2}+\frac{1}{5^2\cdot 7^2}+\frac{1}{7^2\cdot 9^2}+\cdots=\frac{\pi^2-8}{16}$$

$$\frac{1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}+\frac{1}{3^2\cdot 4^2\cdot 5^2}+\cdots=\frac{4\pi^2-39}{16}$$

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+d}+\frac{1}{a+2d}-\frac{1}{a+3d}+\cdots=\int_0^1\frac{x^{a-1}dx}{1+x^d}$$

$$\frac{1}{1^{2p}}+\frac{1}{2^{2p}}+\frac{1}{3^{2p}}+\frac{1}{4^{2p}}+\cdots=\frac{2^{2p-1}\pi^{2\pi}B_p}{(2p)!}$$

$$\frac{1}{1^{2p}}+\frac{1}{3^{2p}}+\frac{1}{5^{2p}}+\frac{1}{7^{2p}}+\cdots=\frac{(2^{2p}-1)\pi^{2p}B_p}{2(2p)!}$$

$$\frac{1}{1^{2p}}-\frac{1}{2^{2p}}+\frac{1}{3^{2p}}-\frac{1}{4^{2p}}+\cdots=\frac{(2^{2p-1}-1)\pi^{2p}B_p}{(2p)!}$$

$$\frac{1}{1^{2p+1}}-\frac{1}{3^{2p+1}}+\frac{1}{5^{2p+1}}-\frac{1}{7^{2p+1}}+\cdots=\frac{\pi^{2p+1}E_p}{2^{2p+2}(2p)!}$$

[E_p οι αριθμοί του Euler]

Με ημίτονα και συνημίτονα

$$\frac{1}{2}+\cos a+\cos 2a+\cdots+\cos na=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)a}{2\sin(a/2)}$$

$$\sin a+\sin 2a+\sin 3a+\cdots+\sin na=\frac{\sin\left[\frac{1}{2}(n+1)\right]a\sin\frac{1}{2}na}{\sin(a/2)}$$

$$1+r\cos a+r^2\cos 2a+r^3\cos 3a+\cdots=\frac{1-r\cos a}{1-2r\cos a+r^2},\qquad |r|<1$$

$$r\sin a+r^2\sin 2a+r^3\sin 3a+\cdots=\frac{r\sin a}{1-2r\cos a+r^2},\qquad |r|<1$$

$$1+r\cos a+r^2\cos 2a+\cdots+r^n\cos na=\frac{r^{n+2}\cos na-r^{n+1}\cos(n+1)a-r\cos a+1}{1-2r\cos a+r^2}$$

$$r\sin a+r^2\sin 2a+\cdots r^n\sin na=\frac{r\sin a-r^{n+1}\sin(n+1)a+r^{n+2}\sin na}{1-2r\cos a+r^2}$$

11.2 Σειρές Taylor και Maclaurin

Ορισμοί

Αν η $f(x)$ έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι της τάξης n, τότε

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+R_n$$

όπου R_n είναι το *υπόλοιπο* μετά από n όρους και με κατάλληλο ξ μεταξύ a και x γράφεται

$$R_n=\frac{f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}{n!}\qquad \text{(τύπος του Lagrange)}$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^{n-1}(x-a)}{(n-1)!} \quad \text{(τύπος του Cauchy)}$$

Αν $\lim_{x\to\infty} R_n = 0$, παίρνουμε τη *σειρά Taylor* ή *ανάπτυγμα Taylor* της $f(x)$ για $x = a$. Αν $a = 0$, η σειρά καλείται συχνά *σειρά Maclaurin*. Η σειρά Taylor (ή Maclaurin) συγκλίνει γενικά για κάθε x ενός διαστήματος, που καλείται *διάστημα σύγκλισης*, και αποκλίνει έξω από αυτό το διάστημα.

Για συναρτήσεις δύο μεταβλητών έχουμε

$$f(x, y) = f(a, b) + (x-a)f_x(a, b) + (y-b)f_y(a, b)$$
$$+ \frac{1}{2!}\{(x-a)^2 f_{xx}(a, b) + 2(x-a)(y-b)f_{xy}(a, b) + (y-b)^2 f_{yy}(a, b)\} + \cdots$$

όπου $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$, … είναι οι μερικές παράγωγοι ως προς x, y, … υπολογισμένες στο σημείο $x = a$, $y = b$.

Αναπτύγματα συναρτήσεων

Διωνυμική σειρά

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \cdots$$
$$= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}x^3 + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}x^r + \cdots$$

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^{-4} = 1 - 4x + 10x^2 - 20x^3 + 35x^4 - \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^{-5} = 1 - 5x + 15x^2 - 35x^3 + 70x^4 - \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots, \qquad -1 < x \le 1$$

$$(1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots, \qquad -1<x\le 1$$

$$(1+x)^{-1/3} = 1-\frac{1}{3}x+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3+\cdots, \qquad -1<x\le 1$$

$$(1+x)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3\cdot 6}x^2+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3-\cdots, \qquad -1<x\le 1$$

$$(1+x)^{-1/4} = 1-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4\cdot 8}x^2-\frac{5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}x^3+\cdots, \qquad -1<x\le 1$$

$$(1+x)^{1/4} = 1+\frac{1}{4}x-\frac{3}{4\cdot 8}x^2+\frac{3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}x^3-\cdots, \qquad -1<x\le 1$$

$$(1+x)^{-3/2} = 1-\frac{3}{2}x+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^2-\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots, \qquad -1<x<1$$

$$(1+x)^{-5/2} = 1-\frac{5}{2}x+\frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}x^2-\frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots, \qquad -1<x<1$$

Ρητές συναρτήσεις

$$\frac{1+x}{(1-x)^2} = 1+3x+5x^2+7x^3+\cdots$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = 1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots$$

$$\frac{1+6x+x^2}{(1-x)^3} = 1+3^2x+5^2x^2+7^2x^3+\cdots$$

$$\frac{a+(b-a)x}{(1-x)^2} = a+(a+b)x+(a+2b)x^2+\cdots$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \qquad -\infty<x<\infty$$

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} - 2x\left\{\frac{1}{x^2-\pi^2} - \frac{1}{x^2-4\pi^2} + \frac{1}{x^2-9\pi^2} - \cdots\right\}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-\pi)^2} + \frac{1}{(x+\pi)^2} + \frac{1}{(x-2\pi)^2} + \frac{1}{(x+2\pi)^2} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

$$\frac{1}{\cos x} = 4\pi\left\{\frac{1}{\pi^2-4x^2} - \frac{3}{9\pi^2-4x^2} + \frac{5}{25\pi^2-4x^2} - \cdots\right\}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 4\left\{\frac{1}{(\pi-2x)^2} + \frac{1}{(\pi+2x)^2} + \frac{1}{(3\pi-2x)^2} + \frac{1}{(3\pi+2x)^2} + \cdots\right\}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots, \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan x = 8x\left\{\frac{1}{\pi^2-4x^2} + \frac{1}{9\pi^2-4x^2} + \frac{1}{25\pi^2-4x^2} + \cdots\right\}$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \cdots - \frac{2^{2n} B_n x^{2n-1}}{(2n)!} - \cdots, \qquad 0 < |x| < \pi$$

$$\cot x = \frac{1}{x} + 2x\left\{\frac{1}{x^2-\pi^2} + \frac{1}{x^2-4\pi^2} + \frac{1}{x^2-9\pi^2} + \cdots\right\}$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad |x| < 1$$

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots\right), \qquad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots, & |x| < 1 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + \cdots, & + \text{ αν } x \ge 1, - \text{ αν } x \le -1 \end{cases}$$

$$\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \left(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots\right), & |x| < 1 \\ p\pi + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{5x^5} - \cdots, & p = 0 \text{ αν } x < 1, p = 1 \text{ αν } x < -1 \end{cases}$$

Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln a + \frac{(x\ln a)^3}{3!} + \frac{(x\ln a)^3}{3!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \qquad -1 < x \le 1$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad -1 < x < 1$$

$$\ln x = \left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \cdots \qquad x \ge \frac{1}{2}$$

$$\ln x = 2\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right\}, \qquad x > 0$$

Υπερβολικές συναρτήσεις

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\sinh x = x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

$$\frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{x} - 2x\left\{\frac{1}{x^2+\pi^2} + \frac{1}{x^2+4\pi^2} + \frac{1}{x^2+9\pi^2} + \cdots\right\}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh x = x\left(1 + \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

$$\frac{1}{\cosh x} = 4x\left\{\frac{1}{\pi^2 + 4x^2} + \frac{3}{9\pi^2 + 4x^2} + \frac{5}{25\pi^2 + 4x^2} + \cdots\right\}$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \cdots \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}(2^{2n} - 1) B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots, \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\tanh x = 8x\left\{\frac{1}{\pi^2 + 4x^2} + \frac{1}{9\pi^2 + 4x^2} + \frac{1}{25\pi^2 + 4x^2} + \cdots\right\}$$

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \cdots \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots, \qquad 0 < |x| < \pi$$

$$\coth x = \frac{1}{x} + 2x\left\{\frac{1}{x^2 + \pi^2} + \frac{1}{x^2 + 4\pi^2} + \frac{1}{x^2 + 9\pi^2} + \cdots\right\}$$

$$\sinh^{-1} x = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots, & |x| < 1 \\ \pm\left(\ln|2x| + \dfrac{1}{2\cdot 2x^2} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} - \cdots\right), & \begin{array}{l} +\ \text{αν } x \geq 1, \\ -\ \text{αν } x \leq -1 \end{array} \end{cases}$$

$$\cosh^{-1} x = \pm\left\{\ln(2x) - \left(\frac{1}{2\cdot 2x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} + \cdots\right)\right\}, \qquad \begin{array}{c} +\ \text{αν } \cosh x > 0 \\ -\ \text{αν } \cosh x < 0 \\ (x \geq 1) \end{array}$$

$$\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad |x| < 1$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \cdots, \qquad |x| > 1$$

Διάφορες σειρές

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31x^6}{720} + \cdots\right), \qquad -\infty < x < \infty$$

$$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^4}{8} + \cdots, \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \cdots + \frac{2^{n/2}\sin(n\pi/4)x^n}{n!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \cdots + \frac{2^{n/2}\cos(n\pi/4)x^n}{n!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\ln|\sin x| = \ln|x| - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \cdots - \frac{2^{2n-1}B_n x^{2n}}{n(2n)!} + \cdots, \qquad 0 < |x| < \pi$$

$$\ln|\cos x| = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \cdots - \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n x^{2n}}{n(2n)!} + \cdots, \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\ln|\tan x| = \ln|x| + \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n}}{n(2n)!} + \cdots, \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \cdots, \qquad |x|$$

Αντίστροφη σειρά

Αν $\quad y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + \cdots$

τότε $\quad x = C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3 + C_4 y^4 + C_5 y^5 + C_6 y^6 + \cdots$

όπου

$c_1 C_1 = 1$

$c_1^3 C_2 = -c_2$

$c_1^5 C_3 = 2c_2^2 - c_1 c_3$

$c_1^7 C_4 = 5c_1 c_2 c_3 - 5c_2^3 - c_1^2 c_4$

$c_1^9 C_5 = 6c_1^2 c_2 c_4 + 3c_1^2 c_3^2 - c_1^3 c_5 + 14c_2^4 - 21c_1 c_2^2 c_3$

$c_1^{11} C_6 = 7c_1^3 c_2 c_5 + 84c_1 c_2^3 c_3 + 7c_1^3 c_3 c_4 - 28c_1^2 c_2 c_3^2 - c_1^4 c_6 - 28c_1^2 c_2^2 c_4 - 42c_2^5$

12 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ BERNOULLI ΚΑΙ EULER

12.1 Ορισμοί

Τα *πολυώνυμα Bernoulli* $B_n(x)$ ορίζονται με τη σχέση

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < 2\pi$$

Τα *πολυώνυμα Euler* $E_n(x)$ ορίζονται με τη σχέση

$$\frac{2e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < \pi$$

Οι *αριθμοί του Bernoulli* B_n και του *Euler* E_n είναι αντίστοιχα

$B_n = B_n(0)$	και	$E_n = 2^n E_n(\frac{1}{2})$	$n = 0, 1, 2, \ldots$
$B_0 = 1$		$E_0 = 1$	
$B_1 = -\frac{1}{2}$		$E_1 = 0$	
$B_2 = \frac{1}{6}$		$E_2 = -1$	
$B_3 = 0$		$E_3 = 0$	
$B_4 = -1/30$		$E_4 = 5$	

12.2 Ιδιότητες

$$B_0 + \binom{k}{1} B_1 + \binom{k}{2} B_2 + \cdots + \binom{k}{k-1} B_{k-1} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$B_n(x+1) = -B_n(x) = nx^{n-1}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$E_n'(x) = nE_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$(-1)^n B_n(-x) = B_n(x) + x^{n-1}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x)$$

$$(-1)^{n+1} E_n(-x) = E_n(x) - 2x^n$$

$$\int_a^x B_n(t)dt = \frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(a)}{n+1}$$

$$\int_a^x E_n(t)dt = \frac{E_{n+1}(x) - E_{n+1}(a)}{n+1}$$

13 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

13.1 Ορισμοί

Μεγέθη

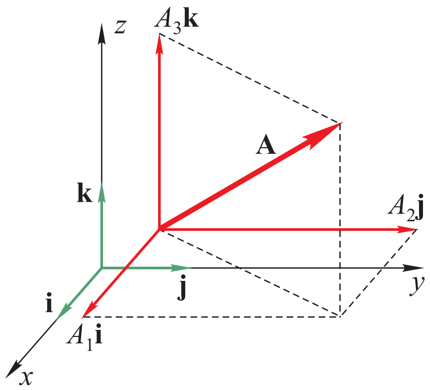
Μια ποσότητα που εκφράζεται από ένα μόνο πραγματικό αριθμό καλείται *βαθμωτό μέγεθος*.

Μια ποσότητα που εκφράζεται από περισσότερους από έναν πραγματικούς αριθμούς καλείται *διάνυσμα* ή *διανυσματικό μέγεθος* (ακριβέστερα ένα διάνυσμα ακολουθεί ορισμένους κανόνες μετασχηματισμού από ένα σύστημα συντεταγμένων σε άλλο).

Ένα διάνυσμα παριστάνεται με ένα βέλος. *Μέτρο* του διανύσματος καλείται το μήκος του βέλους και *φορά* η κατεύθυνση του βέλους. *Μοναδιαίο* καλείται ένα διάνυσμα που έχει μέτρο 1.

Συνιστώσες διανύσματος

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα μοναδιαία διανύσματα στις κατευθύνσεις των αξόνων x, y, z συμβολίζονται με $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Οι τρεις *συνιστώσες* του διανύσματος $\mathbf{A}$ είναι $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$, $A_3\mathbf{k}$ και γράφουμε $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$.



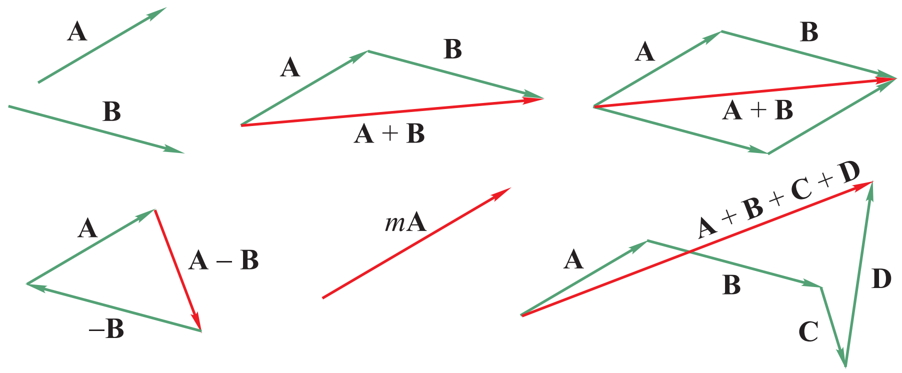
Σχ. 13-1

13.2 Άθροισμα, Διαφορά και Πολλαπλασιασμός με Σταθερή

Εάν **A, B, C** είναι διανύσματα και m, n βαθμωτά μεγέθη, τότε

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	Αντιμεταθετικός νόμος για την πρόσθεση
$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$	Προσεταιριστικός νόμος για την πρόσθεση
$m(n\mathbf{A}) = (mn)\mathbf{A} = n(m\mathbf{A})$	Προσεταιριστικός νόμος για τον πολλαπλασιασμό επί σταθερή
$(m + n)\mathbf{A} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A}$	Επιμεριστικός νόμος
$m(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B}$	Επιμεριστικός νόμος

Οι ιδιότητες αυτές είναι φανερές και στο Σχ. 13-2.



Σχ. 13-2

13.3 Γινόμενα Διανυσμάτων

Εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

όπου θ η γωνία μεταξύ **A** και **B**.

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ Αντιμεταθετικός νόμος

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ Επιμεριστικός νόμος

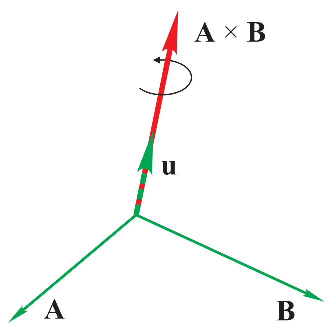
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

όπου $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$.

Εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\sin\theta\,\mathbf{u}$$

όπου θ η γωνία μεταξύ **A** και **B** και **u** μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των **A** και **B**, έτσι ώστε τα **A**, **B**, **u** να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα.



Σχ. 13-3

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{k}$$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$

Εμβαδό παραλληλογράμμου με πλευρές **A** και **B** = |**A** × **B**|

Άλλα γινόμενα

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 \\ - A_3B_2C_1 - A_2B_1C_3 - A_1B_3C_2$$

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ = όγκος παραλληλεπιπέδου με πλευρές **A**, **B**, **C**

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\cdot(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \mathbf{C}\{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \times \mathbf{D})\} - \mathbf{D}\{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \times \mathbf{C})\} \\ &= \mathbf{B}\{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C} \times \mathbf{D})\} - \mathbf{A}\{\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C} \times \mathbf{D})\}\end{aligned}$$

13.4 Παράγωγοι Διανύσματος

Αν **A**(t) = $A_1(t)\mathbf{i} + A_2(t)\mathbf{j} + A_3(t)\mathbf{k}$, η *παράγωγος* του **A** ως προς τη (βαθμωτή) μεταβλητή t είναι

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k}$$

Αν $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}$ ορίζονται με όμοιο τρόπο.

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}) = \mathbf{A}\Sigma\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\Sigma\mathbf{B}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$$

$$\frac{d}{du}\{\mathbf{A}\Sigma(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\} = \frac{d\mathbf{A}}{du}\Sigma(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \mathbf{A}\Sigma\left(\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C}\right) + \mathbf{A}\Sigma\left(\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du}\right)$$

$$\mathbf{A}\Sigma\frac{d\mathbf{A}}{du} = A\frac{dA}{du}$$

$\mathbf{A}\Sigma\frac{d\mathbf{A}}{du} = 0$, αν το |**A**| είναι ανεξάρτητο του u.

13.5 Κλίση, Απόκλιση, Περιστροφή

Ο *τελεστής ανάδελτα* ορίζεται με τη σχέση

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Αν Φ είναι βαθμωτή συνάρτηση και $\mathbf{A}$ διανυσματική συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y, z και υπάρχουν οι μερικές παραγώγους, τότε καλούμε

Κλίση του $\Phi = \nabla\Phi$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

Απόκλιση του $\mathbf{A} = \mathrm{div}\mathbf{A} = \nabla\mathbf{A}$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

Περιστροφή του $\mathbf{A} = \mathrm{curl}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial Z} - \frac{\partial A_3}{\partial X}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial X} - \frac{\partial A_1}{\partial Y}\right)\mathbf{k}$$

Η *παράγωγος κατά κατεύθυνση* (η παράγωγος του Φ στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{a} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$) ορίζεται με τη σχέση

$$(\mathbf{a}\Sigma\nabla)\Phi = \frac{(\mathbf{A}\cdot\nabla)\Phi}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\left(A_1\frac{\partial \Phi}{\partial x} + A_2\frac{\partial \Phi}{\partial y} + A_3\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$$

Ο ίδιος τύπος ισχύει αν η Φ αντικατασταθεί με μια διανυσματική συνάρτηση.

Ο τελεστής του Laplace ∇^2 ορίζεται με

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}$$

Ο διαρμονικός τελεστής ∇^4 ορίζεται με

$$\nabla^4 U = \nabla^2 (\nabla^2 U) = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial y^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial x^2}$$

Για εκφράσεις των $\nabla \Phi$, $\nabla \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$, $\nabla^2 \Phi$, σε άλλα συστήματα συντεταγμένων βλέπε Ενότητα 14.2.

Πράξεις με το ανάδελτα

Αν U, V είναι βαθμωτές συναρτήσεις και $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ είναι διανυσματικές συναρτήσεις των x, y, z (δηλαδή βαθμωτά και διανυσματικά πεδία στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο) και υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι, ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι:

$\nabla(U + V) = \nabla U + \nabla V$

$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$

$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$

$\nabla \cdot (UV) = V(\nabla U) + U(\nabla V)$

$\nabla(aU) = a\nabla U$ (a σταθερή)

$\nabla \cdot (a\mathbf{A}) = a\nabla \cdot \mathbf{A}$

$\nabla \times (a\mathbf{B}) = a\nabla \times \mathbf{A}$

$\nabla \cdot (U\mathbf{A}) = (\nabla U) \cdot \mathbf{A} + U(\nabla \cdot \mathbf{A})$

$\nabla \times (U\mathbf{A}) = (\nabla U) \times \mathbf{A} + U(\nabla \times \mathbf{A})$

$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$

$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$

$(\mathbf{A} \cdot \nabla)(U\mathbf{B}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \nabla U) + U(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$

$\nabla \times (\nabla U) = \mathbf{0}$, δηλ. η περιστροφή της κλίσεως του U είναι μηδέν.

$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, δηλ. η απόκλιση της περιστροφής του $\mathbf{A}$ είναι μηδέν.

$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} = \frac{1}{2}[\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) + \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})]$

13.6 Ολοκληρώματα με Διανύσματα

Αόριστα ολοκληρώματα

Αν $\dfrac{d\mathbf{B}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)$, το *αόριστο ολοκλήρωμα* του $\mathbf{A}(t)$ είναι

$$\int \mathbf{A}(t)dt = \mathbf{B}(t) + \mathbf{c} \qquad (\mathbf{c} \text{ σταθερό διάνυσμα})$$

Το *ορισμένο ολοκλήρωμα* του $\mathbf{A}(t)$ από a έως b είναι

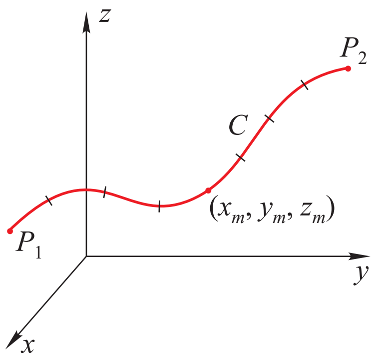
$$\int_a^b \mathbf{A}(t)dt = \mathbf{B}(b) - \mathbf{B}(a)$$

Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Έστω ότι C είναι μια καμπύλη από το σημείο $P_1(a_1, b_1, c_1)$ στο σημείο $P_2(a_2, b_2, c_2)$, χωρισμένη σε n τμήματα από τα σημεία (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), …, $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$. Το *επικαμπύλιο ολοκλήρωμα* του $\mathbf{A}$ στην C ορίζεται με τη σχέση

$$\int_C \mathbf{A}\,\Sigma d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\,\Sigma d\mathbf{r}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \mathbf{A}(x_m, y_m, z_m)\,\Sigma\Delta\mathbf{r}_m$$



Σχ. 13-4

όπου $\Delta\mathbf{r}_m = \Delta x_m\mathbf{i} + \Delta y_m\mathbf{j} + \Delta z_m\mathbf{k}$, $\Delta x_m = x_{m+1} - x_m$, $\Delta y_m = y_{m+1} - y_m$, $\Delta z_m = z_{m+1} - z_m$ και δεχθήκαμε ότι $\max|\Delta\mathbf{r}_m| \to 0$ όταν $n \to \infty$.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί

$$\int_C \mathbf{A}\,\Sigma d\mathbf{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

με $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ και $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Είναι

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\,\Sigma d\mathbf{r} = -\int_{P_2}^{P_1} \mathbf{A}\,\Sigma d\mathbf{r}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\,\Sigma d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_3} \mathbf{A}\,\Sigma d\mathbf{r} + \int_{P_3}^{P_2} \mathbf{A}\,\Sigma d\mathbf{r}$$

Γενικά, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα εξαρτάται από την καμπύλη ολοκλήρωσης. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο της καμπύλης ολοκλήρωσης (δηλ. να εξαρτάται μόνο από τα άκρα P_1 και P_2) είναι η

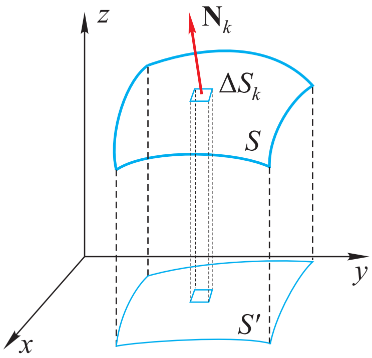
$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

(δηλ. αρκεί και πρέπει να υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση Φ τέτοια ώστε $\mathbf{A} = \nabla\Phi$). Τότε το πεδίο καλείται *αστρόβιλο* και

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\,\Sigma d\mathbf{r} = \Phi(P_2) - \Phi(P_1)$$

Επιφανειακά ολοκληρώματα

Έστω $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}(x, y, z)$ ένα διανυσματικό πεδίο και S μια επιφάνεια διαιρεμένη σε n μικρά τμήματα S_k με εμβαδό ΔE_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, το καθένα. Αν K είναι ένα σημείο του S_k με συντεταγμένες (x_k, y_k, z_k) και $\mathbf{N}_k$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο S_k στο K, τότε το *επιφανειακό ολοκλήρωμα* του $\mathbf{A}$ στην S ορίζεται με τη σχέση



Σχ. 13-5

$$\int_S \mathbf{A}\,\Sigma\mathbf{N}\,dS = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k\,\Sigma\mathbf{N}_k \Delta E_k$$

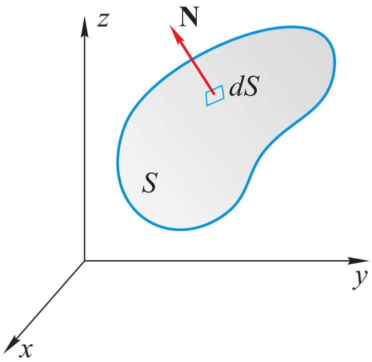
όπου υποθέτουμε ότι η μέγιστη απόσταση δύο σημείων του S_k τείνει στο μηδέν όταν $n \to \infty$. Αν S' είναι η προβολή της S στο επίπεδο xy (Σχ. 13-5), τότε

$$\int_S \mathbf{A}\,\Sigma\mathbf{N}\,dS = \iint_{S'} \mathbf{A}\,\Sigma\mathbf{N}\frac{dx\,dy}{|\mathbf{N}\,\Sigma\mathbf{k}|}$$

Θεωρήματα των Gauss, Stokes και Green

Αν S είναι μια κλειστή επιφάνεια, που περικλείει τον όγκο V, $\mathbf{N}$ το μοναδιαίο κάθετο προς τα έξω διάνυσμα και $d\mathbf{S} = \mathbf{N}dS$, τότε σύμφωνα με το *θεώρημα του Gauss*

$$\int_V \nabla\Sigma\mathbf{A}\,dV = \int_S \mathbf{A}\,\Sigma d\mathbf{S}$$

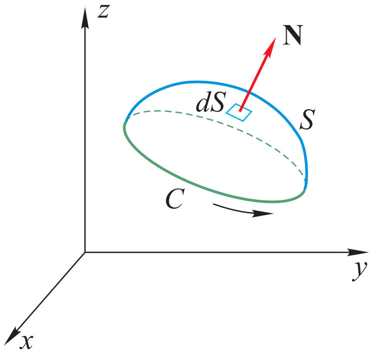


Σχ. 13-6

Αν S είναι μια ανοικτή επιφάνεια με σύνορο την (απλή κλειστή) καμπύλη C και $d\mathbf{S} = \mathbf{N}dS$ ($\mathbf{N}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην S), τότε σύμφωνα με το *θεώρημα του Stokes*

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

όπου στο αριστερό μέλος το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην κλειστή καμπύλη C έχει ληφθεί με την κατάληλη φορά (έτσι ώστε διαβάτης πάνω στην S στην πλευρά του $\mathbf{N}$ και κοντά στην C να έχει το εσωτερικό της S στα αριστερά του).



Σχ. 13-7

Αν R είναι μια περιοχή του επιπέδου xy και περικλείεται από την καμπύλη C, τότε σύμφωνα με το *θεώρημα του Green στο επίπεδο* (ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Stokes)

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Αν Φ και Ψ είναι βαθμωτές συναρτήσεις και $\mathbf{A}$ διανυσματική συνάρτηση, τότε

$$\int_V [\Phi \nabla^2 \Psi + (\nabla \Phi) \cdot (\nabla \Psi)] \, dV = \int (\Phi \nabla \Psi) \cdot d\mathbf{S}$$

(πρώτη ταυτότητα του Green)

$$\int (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) \, dV = \int_S (\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi) \cdot d\mathbf{S}$$

(δεύτερη ταυτότητα του Green)

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A} \, dV = \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$$

$$\int_C \Phi \, d\mathbf{r} = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla \Phi$$

14 ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

14.1 Γενικοί Ορισμοί

Η θέση ενός σημείου P στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο μπορεί να καθορισθεί με *ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες* (x, y, z), οι οποίες μετριώνται κατά μήκος τριών ευθειών, κάθετων ανά δύο, δηλαδή το $Oxyz$ είναι ένα *δεξιόστροφο ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων*. Επίσης, η θέση του P μπορεί να καθοριστεί με *καμπυλόγραμμες συντεταγμένες* (u_1, u_2, u_3). Τα δύο συστήματα συντεταγμένων συνδέονται με τρεις (συνεχώς διαφορίσιμες) *εξισώσεις μετασχηματισμού*

$$x = x(u_1, u_2, u_3)$$

$$y = y(u_1, u_2, u_3)$$

$$z = z(u_1, u_2, u_3)$$

Η *Ιακωβιανή του μετασχηματισμού*(που είναι μια ορίζουσα 3×3)

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u_1 & \partial x/\partial u_2 & \partial x/\partial u_3 \\ \partial y/\partial u_1 & \partial y/\partial u_2 & \partial y/\partial u_3 \\ \partial z/\partial u_1 & \partial z/\partial u_2 & \partial z/\partial u_3 \end{vmatrix}$$

υποτίθεται διάφορη του μηδενός, ώστε να είναι αντιστρεπτές οι εξισώσεις μετασχηματισμού. Το σύστημα συντεταγμένων u_1, u_2, u_3 παραμένει *καρτεσιανό* (γενικά όμως πλαγιογώνιο και όχι ορθογώνιο), αν και μόνο αν οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι γραμμικές.

Αν διατηρηθούν σταθερές οι u_2 και u_3 και μεταβληθεί μόνο η u_1, το σημείο P, που ορίζεται από το διάνυσμα $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, γράφει μια καμπύλη που καλείται *συντεταγμένη καμπύλη* u_1 από το P. Όμοια ορίζονται οι συντεταγμένες καμπύλες u_2 και u_3 από το P και γενικότερα από κάθε σημείο.

Αν διατηρηθεί σταθερή μόνο η u_1 και μεταβληθούν οι u_2 και u_3, το σημείο P γράφει μια δισδιάστατη επιφάνεια, η οποία καλείται *συντεταγμένη επιφάνεια* u_1. Όμοια ορίζονται οι συντεταγμένες επιφάνειες u_2 και u_3.

Τα διανύσματα $\partial\mathbf{r}/\partial u_1$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_2$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_3$ εφάπτονται στις συντεταγμένες καμπύλες u_1, u_2, u_3. Αν $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα που εφάπτονται σε αυτές τις καμπύλες, τότε

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1} = h_1\mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2} = h_2\mathbf{e}_2, \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3} = h_3\mathbf{e}_3$$

όπου

$$h_1 = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\right|, \quad h_2 = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\right|, \quad h_3 = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\right|$$

είναι οι *συντελεστές κλίμακας*. Αν τα $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ είναι ανά δύο κάθετα (δηλαδή αν $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$), το καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων καλείται*ορθογώνιο*.

Διαφορικά μεγέθη

Σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες το *στοιχειώδες διάνυσμα* είναι

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}du_3 = h_1du_1\mathbf{e}_1 + h_2du_2\mathbf{e}_2 + h_3du_3\mathbf{e}_3 \quad \partial$$

Αν οι συντεταγμένες είναι ορθογώνιες, όπως υποτίθεται σε όλα τα επόμενα, το *στοιχειώδες μήκος* είναι

$$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = h_1{}^2du_1{}^2 + h_2{}^2du_2{}^2 + h_3{}^2du_3{}^2$$

Το *στοιχείο όγκου* είναι

$$\begin{aligned} dV &= \left|(h_1\mathbf{e}_1du_1)\cdot(h_2\mathbf{e}_2du_2)\times(h_3\mathbf{e}_3du_3)\right| = h_1h_2h_3\,du_1du_2du_3 \\ &= \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\right|du_1du_2du_3 = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right|du_1du_2du_3 \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός ολοκληρωμάτων

Η αλλαγή συντεταγμένων μετασχηματίζει τα ολοκληρώματα σύμφωνα με τον τύπο

$$\iiint_{\mathcal{R}} F(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\mathcal{R}'} G(u_1,u_2,u_3)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right|du_1du_2du_3$$

όπου $\mathcal{R}'$ η περιοχή στην οποία απεικονίζεται η $\mathcal{R}$ και $G(u_1, u_2, u_3)$ η τιμή της $F(x, y, z)$ που προκύπτει από το μετασχηματισμό.

14.2 Κλίση, Απόκλιση, Περιστροφή

Στα παρακάτω Φ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση και $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ μια διανυσματική συνάρτηση των ορθογώνιων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων u_1, u_2, u_3.

Κλίση του $\Phi = \operatorname{grad}\Phi = \nabla\Phi$

$$= \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$$

Απόκλιση του $\mathbf{A} = \operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A}$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$$

Περιστροφή του $\mathbf{A} = \operatorname{curl}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A}$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2A_2)\right]\mathbf{e}_1$$

$$+ \frac{1}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(h_3A_3)\right]\mathbf{e}_2$$

$$+ \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1A_1)\right]\mathbf{e}_3$$

Παράγωγος κατά κατεύθυνση $= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\Phi = \dfrac{A_1}{h_1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \dfrac{A_2}{h_2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \dfrac{A_3}{h_3}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_3}$

Λαπλασιανή του $\Phi = \nabla^2\Phi$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right]$$

Από την ίδια σχέση προκύπτει ο διαρμονικός τελεστής $\nabla^4\Phi = \nabla^2(\nabla^2\Phi)$

14.3 Διάφορα Συστήματα Συντεταγμένων

Κυλινδρικές συντεταγμένες (*ρ*, *φ*, *z*)

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$$

με $\rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty$.

$$h_1 = h_r = 1,\ h_2 = h_\varphi = \rho,\ h_3 = h_z = 1$$

$$d\mathbf{r} = d\rho\,\mathbf{e}_r + \rho d\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + dz\,\mathbf{e}_z$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

$$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_r + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$\nabla\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1) + \frac{\partial}{\partial\varphi}A_2 + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_3)\right]$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A_3}{\partial\varphi} - \frac{\partial(\rho A_2)}{\partial z}\right]\mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_2)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_1}{\partial\varphi}\right]\mathbf{e}_\varphi$$

$$(\mathbf{A}\Sigma\nabla)\Phi = A_1\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{A_2}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + A_3\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες (*r*, *θ*, *φ*)

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

με $r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$.

$$h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\theta = r, \quad h_3 = h_\varphi = r\sin\theta$$

$$d\mathbf{r} = dr\,\mathbf{e}_r + r\,d\theta\,\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

$$dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

$$\nabla\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(A_1 r^2\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(A_2 r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(A_3 r)\right]$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_3 r\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial(A_2 r)}{\partial\varphi}\right]\mathbf{e}_r$$

$$+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial(A_3 r\sin\theta)}{\partial r}\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(A_2 r)}{\partial r} - \frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\varphi$$

$$(\mathbf{A}\,\Sigma\nabla)\Phi = A_1\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{A_2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \frac{A_3}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

Παραβολικές κυλινδρικές συντεταγμένες (*u*, *υ*, *z*)

$$x = \tfrac{1}{2}(u^2 - \upsilon^2), \quad y = u\upsilon, \quad z = z$$

$$h_1 = h_2 = \sqrt{u^2 + \upsilon^2}\,, \quad h_3 = 1$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{u^2 + \upsilon^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial \upsilon^2}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Οι τομές των συντεταγμένων επιφανειών με τυχόν επίπεδο z = σταθ. είναι δύο οικογένειες συνεστιακών παραβολών. Οι εξισώσεις αυτών των οικογενειών είναι $x = \frac{1}{2}(y^2/\upsilon^2 - \upsilon^2)$ και $x = \frac{1}{2}(y^2/u^2 - u^2)$, από τις οποίες παίρνουμε τις δύο οικογένειες του Σχ. 14-4 δίνοντας τιμές στα u και υ.

Παραβολικές συντεταγμένες (*u*, *υ*, *φ*)

$$x = u\upsilon\cos\varphi, \quad y = u\upsilon\sin\varphi, \quad z = \tfrac{1}{2}(u^2 - \upsilon^2)$$

όπου $u \geq 0,\ \upsilon \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$

$$h_1 = h_2 = \sqrt{u^2 + \upsilon^2}\,, \quad h_3 = u\upsilon$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{u(u^2+\upsilon^2)}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) + \frac{1}{\upsilon(u^2+\upsilon^2)}\frac{\partial}{\partial\upsilon}\left(\upsilon\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon}\right) + \frac{1}{u^2\upsilon^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

Οι συντεταγμένες επιφάνειες προκύπτουν με περιστροφή των παραβολών του Σχ. 14-4 γύρω από τον άξονα x, που μετά ονομάζεται z. Τομή των συντεταγμένων επιφανειών με τυχόν επίπεδο που περνάει από τον άξονα των z δίνει το Σχ. 14-5.

Ελλειπτικές κυλινδρικές συντεταγμένες (u, υ, z)

$$x = a\cosh u\cos\upsilon,\quad y = a\sinh u\sin\upsilon,\quad z = z$$

$$u \geq 0,\quad 0 \leq \upsilon < 2\pi,\quad -\infty < z < \infty$$

$$h_1 = h_2 = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2\upsilon},\quad h_3 = 1$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\sinh^2 u + \sin^2\upsilon)}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\upsilon^2}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Οι τομές των συντεταγμένων επιφανειών με τυχόν επίπεδο z = σταθ. είναι συνεστιακές ελλείψεις και παραβολές. Οι εξισώσεις αυτών των οικογενειών είναι

$$\frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = a^2 \quad \text{και} \quad \frac{x^2}{\cos^2\upsilon} - \frac{y^2}{\sin^2\upsilon} = a^2$$

από τις οποίες προκύπτουν οι καμπύλες του Σχ. 14-6 για διάφορες τιμές των u και υ.

Γεωειδείς σφαιροειδείς συντεταγμένες (ξ, η, φ)

$$x = a\cosh\xi\cos\eta\cos\varphi,\quad y = a\cosh\xi\cos\eta\sin\varphi,\quad z = a\sinh\xi\sin\eta$$

$$\xi \geq 0,\quad -\pi/2 \leq \eta \leq \pi/2,\quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$h_1 = h_2 = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta},\quad h_3 = a\cosh\xi\cos\eta$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)\cosh\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\cosh\xi\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)$$

$$+ \frac{1}{a^2(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)\cos\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\cos\eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{a^2\cosh^2\xi\cos^2\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

Δύο οικογένειες συντεταγμένων επιφανειών προκύπτουν με περιστροφή του Σχ. 14-6 γύρω από τον άξονα y, που μετά ονομάζεται z. Η τρίτη οικογένεια συντεταγμένων επιφανειών αποτελείται από επίπεδα, που περιέχουν αυτόν τον άξονα. Σε ένα επίπεδο που περιέχει το νέο άξονα z οι συντεταγμένες καμπύλες (Σχ. 14-6) δίνονται από τις εξισώσεις [$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ = απόσταση από τον άξονα z]

$$\frac{\rho^2}{\cosh^2\xi} + \frac{z^2}{\sinh^2\xi} = a^2 \quad \text{και} \quad \frac{\rho^2}{\cos^2\eta} - \frac{z^2}{\sin^2\eta} = a^2$$

για διάφορες τιμές των ξ και η.

Ωοειδείς σφαιροειδείς συντεταγμένες (ξ, η, φ)

$$x = a\sinh\xi\sin\eta\cos\varphi, \quad y = a\sinh\xi\sin\eta\sin\varphi, \quad z = a\cosh\xi\cos\eta$$

$$\xi \geq 0, \quad 0 \leq \eta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$h_1 = h_2 = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}\,, \quad h_3 = a\sinh\xi\sin\eta$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sinh\xi\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)$$

$$+\frac{1}{a^2(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{a^2\sinh^2\xi\sin^2\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

Δύο οικογένειες συντεταγμένων επιφανειών προκύπτουν με περιστροφή του Σχ. 14-6 γύρω από τον άξονα x, που μετά ονομάζεται z. Η τρίτη οικογένεια συντεταγμένων επιφανειών αποτελείται από επίπεδα, που περιέχουν αυτόν τον άξονα. Σε ένα επίπεδο που περιέχει το νέο άξονα z οι συντεταγμένες καμπύλες (Σχ. 14-8) δίνονται από τις εξισώσεις [$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ = απόσταση από τον άξονα z]

$$\frac{\rho^2}{\sinh^2\xi} + \frac{z^2}{\cosh^2\xi} = a^2 \quad \text{και} \quad \frac{z^2}{\cos^2\eta} - \frac{\rho^2}{\sin^2\eta} = a^2$$

για διάφορες τιμές των ξ και η.

Διπολικές κυλινδρικές συντεταγμένες (u, υ, z)

$$x = \frac{a\sinh\upsilon}{\cos\upsilon - \cos u}, \quad y = \frac{a\sin u}{\cosh\upsilon - \cos u}, \quad z = z$$

όπου $0 \leq u < 2\pi, \quad -\infty < \upsilon < \infty, \quad -\infty < z < \infty$

$$h_1 = h_2 = \frac{a}{\cosh\upsilon - \cos u}, \quad h_3 = 1$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{(\cosh\upsilon - \cos u)^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\upsilon^2}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Επειδή

$$x^2 + (y - a\cot u)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 u} \quad \text{και} \quad (x - a\coth\upsilon)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2\upsilon}$$

οι τομές των κυλινδρικών συντεταγμένων επιφανειών u = σταθ. και υ = σταθ. είναι κύκλοι όπως στο Σχ. 14-9.

Τοροειδείς συντεταγμένες (u, υ, φ)

$$x = \frac{a\sinh\upsilon\cos\varphi}{\cosh\upsilon - \cos u}, \quad y = \frac{a\sinh\upsilon\sin\varphi}{\cosh\upsilon - \cos u}, \quad z = \frac{a\sin u}{\cosh\upsilon - \cos u}$$

$$h_1 = h_2 = \frac{a}{\cosh\upsilon - \cos u}, \quad h_3 = \frac{a\sinh\upsilon}{\cosh\upsilon - \cos u}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{(\cosh\upsilon - \cos u)^3}{a^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\upsilon - \cos u}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)$$

$$+\frac{(\cosh\upsilon - \cos u)^3}{a^2\sinh\upsilon}\frac{\partial}{\partial\upsilon}\left(\frac{\sinh\upsilon}{\cosh\upsilon - \cos u}\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon}\right) + \frac{(\cosh\upsilon - \cos u)^2}{a^2\sinh^2\upsilon}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

Οι συντεταγμένες επιφάνειες προκύπτουν με περιστροφή του Σχ. 14-9 γύρω από τον άξονα y, που μετά ονομάζεται z. Οι συντεταγμένες επιφάνειες u = σταθ., υ = σταθ. και φ = σταθ. δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις [$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ = απόσταση από τον άξονα z]

$$\rho^2 + (z - a\cot u)^2 = a^2/\sin^2 u, \quad \rho^2 + z^2 + a^2 = 2a\rho\coth\upsilon \quad \text{και} \quad \tan\varphi = y/x$$

για διάφορες τιμές των u, υ και φ.

Κωνικές συντεταγμένες (λ, μ, ν)

$$x = \frac{\lambda\mu\nu}{ab}, \quad y = \frac{\lambda}{a}\sqrt{\frac{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{a^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\lambda}{b}\sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{b^2 - a^2}}$$

$$h_1^2 = 1, \quad h_2^2 = h_2^2 = \frac{\lambda^2(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - a^2)(b^2 - \mu^2)}, \quad h_3^2 = \frac{\lambda^2(\mu^2 - \nu^2)}{(\nu^2 - a^2)(b^2 - \nu^2)}$$

Συνεστιακές ελλειψοειδείς συντεταγμένες (λ, μ, ν)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2 - \lambda} + \dfrac{y^2}{b^2 - \lambda} + \dfrac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1 & \lambda < c^2 < b^2 < a^2 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2 - \mu} + \dfrac{y^2}{b^2 - \mu} + \dfrac{z^2}{c^2 - \mu} = 1 & c^2 < \mu < b^2 < a^2 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2 - \nu} + \dfrac{y^2}{b^2 - \nu} + \dfrac{z^2}{c^2 - \nu} = 1 & c^2 < b^2 < \nu < a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\[2ex] y^2 = \dfrac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)} \\[2ex] z^2 = \dfrac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1^2 = \dfrac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{4(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)} \\[2ex] h_2^2 = \dfrac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{4(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)} \\[2ex] h_3^2 = \dfrac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{4(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)} \end{cases}$$

Συνεστιακές παραβολοειδείς συντεταγμένες (λ, μ, ν)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2-\lambda} = z - \lambda & -\infty < \lambda < b^2 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2-\mu} + \dfrac{y^2}{b^2-\mu} = z - \mu & b^2 < \mu < a^2 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2-\nu} + \dfrac{y^2}{b^2-\nu} = z - \nu & a^2 < \nu < \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{b^2-a^2} \\[2ex] y^2 = \dfrac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{a^2-b^2} \\[2ex] z = \lambda + \mu + \nu - a^2 - b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1^2 = \dfrac{(\mu-\lambda)(v-\lambda)}{4(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)} \\ h_2^2 = \dfrac{(v-\mu)(\lambda-\mu)}{4(a^2-\mu)(b^2-\mu)} \\ h_3^2 = \dfrac{(\lambda-v)(\mu-v)}{16(a^2-v)(b^2-v)} \end{cases}$$

15 ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

15.1 Ορισμοί

Η σειρά Fourier που αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο διάστημα $c < x < c + 2L$, όπου c και L είναι σταθερές, είναι

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

όπου ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \end{cases}$$

Συνθήκες του Dirichlet **Link: Carslaw**

Αν α) η $f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα ($-L$, L) εκτός ίσως από πεπερασμένο πλήθος σημείων, β) οι $f(x)$ και $f'(x)$ είναι τμηματικά συνεχείς στο διάστημα $c < x < c + 2L$ και γ) η $f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο $2L$, δηλ. $f(x + L) = f(x)$, τότε η σειρά Fourier συγκλίνει α) στην $f(x)$, αν το x είναι σημείο συνέχειας, β) στην $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$, αν το x είναι σημείο ασυνέχειας, και γ) στην $\frac{1}{2}\{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)\}$ στα σημεία $x = \pm\pi$ εφόσον τα $f(-\pi + 0)$ και $f(\pi - 0)$ υπάρχουν.

Οι προηγούμενες συνθήκες καλούνται συνθήκες του Dirichlet. Είναι ικανές συνθήκες, όχι και αναγκαίες, και απαντώνται συχνά και με διαφορετικές διατυπώσεις.

Μιγαδική μορφή της σειράς Fourier

Αν η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει στη συνάρτηση $f(x)$, τότε

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

όπου

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_c^{c+2L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), & n < 0 \\ \frac{1}{2}a_0, & n = 0 \end{cases}$$

Στα σημεία ασυνέχειας η $f(x)$ αντικαθίσταται από την $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$.

15.2 Ιδιότητες

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Αν η $f(x)$ είναι περιττή, δηλαδή αν $f(-x) = -f(x)$, τότε η σειρά Fourier έχει μόνο ημίτονα. Αν η $f(x)$ είναι άρτια, δηλαδή αν $f(-x) = f(x)$, τότε η σειρά Fourier έχει μόνο συνημίτονα και (πιθανώς) σταθερό όρο.

Ταυτότητες του Parseval

Οι συντελεστές a_n, b_n και α_n, β_n των σειρών Fourier των $f(x)$ και $g(x)$ αντίστοιχα ικανοποιούν τις *ταυτότητες του Parseval*

$$\frac{1}{L}\int_c^{c+2L}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)g(x)\,dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$$

Παραγώγιση σειράς Fourier

Ας παραστήσουμε με $\sum_n u_n(x)$ τη σειρά Fourier της $f(x)$. Αν η $\sum_n u_n'(x)$ (όπου $u_n'(x) = du_n(x)/dx$) συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε

$$\frac{d}{dx}\sum_n u_n(x) = \sum_n u_n'(x)$$

δηλαδή επιτρέπεται η εναλλαγή της σειράς παραγώγισης και άθροισης.

Ολοκλήρωση σειράς Fourier

Αν η $\sum_n u_n(x)$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_n\left\{\int u_n(x)\,dx\right\}$ συγκλίνει και

$$\int\left\{\sum_n u_n(x)\right\}dx = \sum_n\left\{\int u_n(x)\,dx\right\}$$ ΠΡΟΣΟΧΗ: Να ελεγθεί

Αν η $\sum_n u_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα (a, b), τότε η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα αυτό και

$$\int_a^b\left\{\sum_n u_n(x)\right\}dx = \sum_n\left\{\int_a^b u_n(x)\,dx\right\}$$

δηλαδή επιτρέπεται η εναλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης και άθροισης.

15.3 Πίνακας Σειρών Fourier

Στα επόμενα δίνονται σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση $f(x)$ και η αντίστοιχη σειρά Fourier. Επίσης, δίνονται με κόκκινο η γραφική παράσταση της $f(x)$ και με πράσινο η γραφική παράσταση του αθροίσματος

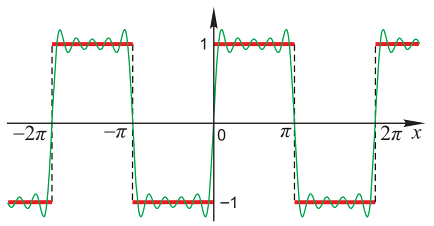
$$S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

του συνόλου των όρων της σειράς μέχρι ορισμένο N σε κάθε περίπτωση (όχι του αθροίσματος των άπειρων όρων).

Περιττές συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

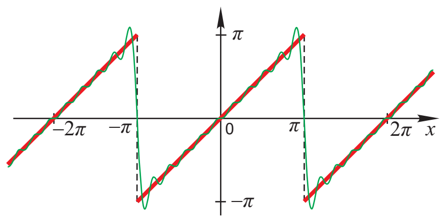
$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$



Σχ. 15-1: $f(x)$ ——, S_{10} ——

$$f(x) = x, \qquad -\pi < x < \pi$$

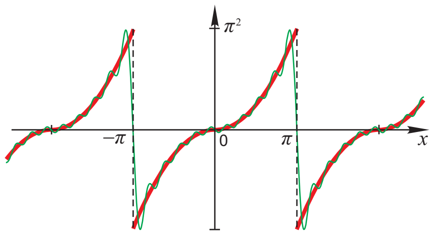
$$2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)$$



Σχ. 15-2: $f(x)$ ——, S_{10} ——

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

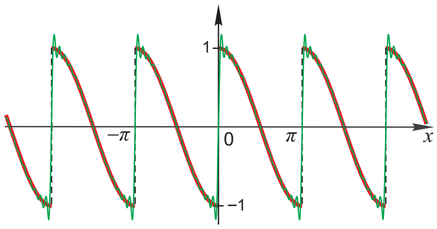
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2\pi^2(-1)^{n+1} + 4(-1)^n - 4}{n^3\pi} \sin nx$$



Σχ. 15-3: $f(x)$ ——, S_{10} ——

$$f(x)=\begin{cases}-\cos x, & -\pi<x<0\\ \cos x, & 0<x<\pi\end{cases}$$

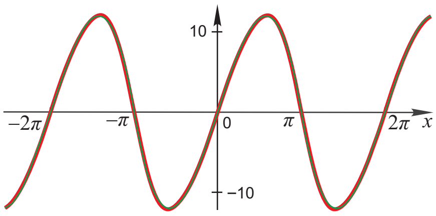
$$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 3}+\frac{2\sin 4x}{3\cdot 5}+\frac{3\sin 6x}{5\cdot 7}+\cdots\right)$$



Σχ. 15-4: $f(x)$ ▬, S_{30} —

$$f(x)=x(\pi-x)(\pi+x),\qquad -\pi<x<\pi$$

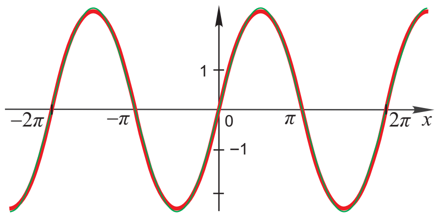
$$12\left(\frac{\sin x}{1^3}-\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}-\cdots\right)$$



Σχ. 15-5: $f(x)$ ▬, S_3 —

$$f(x)=\begin{cases}x(\pi+x), & -\pi<x<0\\ x(\pi-x), & 0<x<\pi\end{cases}$$

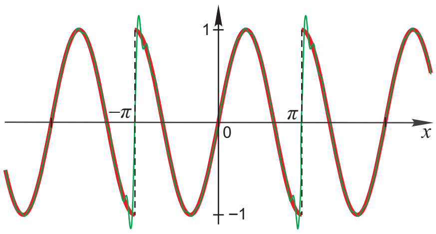
$$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^5}+\cdots\right)$$



Σχ. 15-6: $f(x)$ ▬, S_2 —

$$f(x)=\sin ax,\quad -\pi<x<\pi,\quad a\neq \text{ακέραιος}$$

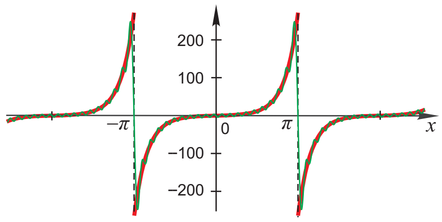
$$\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2-a^2}-\frac{2\sin 2x}{2^2-a^2}+\frac{3\sin 3x}{3^2-a^2}-\cdots\right)$$



Σχ. 15-7: $a=1.5$, $f(x)$ ▬, S_{20} —

$$f(x)=\sinh ax,\qquad -\pi<x<\pi$$

$$\frac{2\sinh a\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2+a^2}-\frac{2\sin 2x}{2^2+a^2}+\frac{3\sin 3x}{3^2+a^2}-\cdots\right)$$

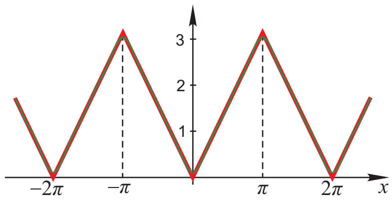


Σχ. 15-8: $a=2$, $f(x)$ ▬, S_{20} —

Άρτιες συναρτήσεις

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$$

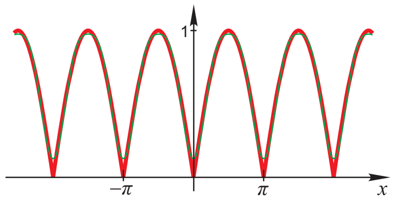
$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)$$



Σχ. 15-9: $f(x)$ —, S_5 —

$$f(x)=|\sin x|, \qquad -\pi<x<\pi$$

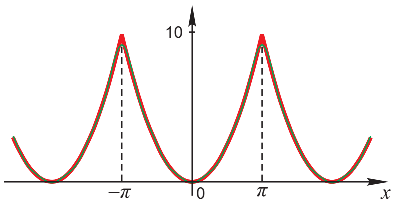
$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\cdots\right)$$



Σχ. 15-10: $f(x)$ —, S_5 —

$$f(x)=x^2, \qquad -\pi<x<\pi$$

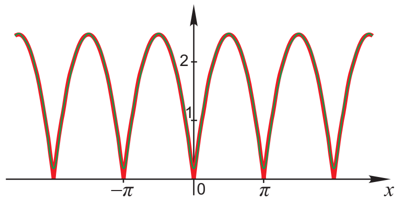
$$\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots\right)$$



Σχ. 15-11: $f(x)$ —, S_5 —

$$f(x)=\begin{cases}-x(\pi+x) & -\pi<x<0\\ x(\pi-x) & 0<x<\pi\end{cases}$$

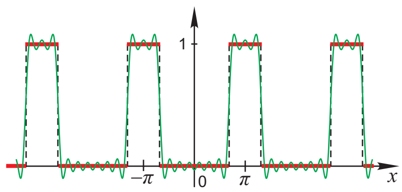
$$\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\cos 2x}{1^2}+\frac{\cos 4x}{2^2}+\frac{\cos 6x}{3^2}+\cdots\right)$$



Σχ. 15-12: $f(x)$ —, S_{10} —

$$f(x)=\begin{cases}1, & \pi-a<x<\pi+a\\ 0, & 0<x<\pi-a,\ \pi+a<x<2\pi\end{cases}$$

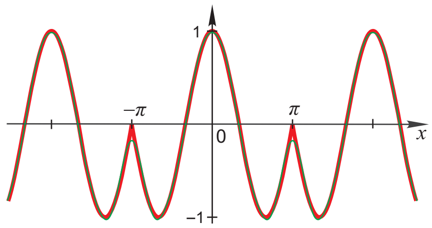
$$\frac{a}{\pi}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin a\cos x}{1}-\frac{\sin 2a\cos 2x}{2}+\frac{\sin 3a\cos 3x}{3}-\cdots\right)$$



Σχ. 15-13: $a=1$, $f(x)$ —, S_{10} —

$f(x) = \cos ax, \quad -\pi < x < \pi, \quad a \neq$ ακέραιος

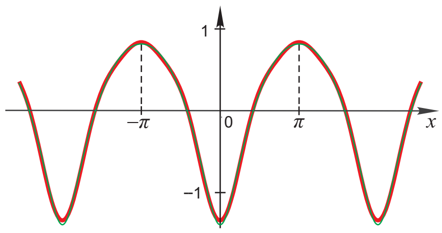
$$\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2a^2} + \frac{\cos x}{1^2 - a^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - a^2} + \frac{\cos 3x}{3^2 - a^2} - \cdots\right)$$



Σχ. 15-14: $a = 1.5$, $f(x)$ —, S_5 —

$f(x) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2),$
$\quad -\pi < x < \pi, \ |a| < 1$

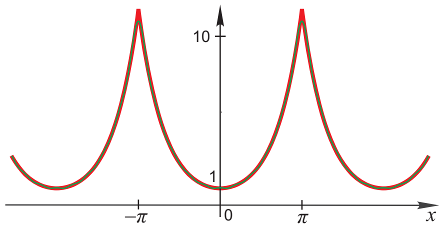
$$-2\left(a\cos x + \frac{a^2}{2}\cos 2x + \frac{a^3}{3}\cos 3x + \cdots\right)$$



Σχ. 15-15: $a = 0.5$, $f(x)$ —, S_3 —

$f(x) = \cosh ax, \qquad -\pi < x < \pi$

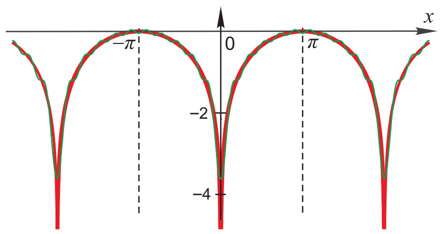
$$\frac{2a\sinh a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2a^2} - \frac{\cos x}{1^2 + a^2} + \frac{\cos 2x}{2^2 + a^2} - \frac{\cos 3x}{3^2 + a^2} + \cdots\right)$$



Σχ. 15-16: $a = 1$, $f(x)$ —, S_{10} —

$f(x) = \ln|\sin\tfrac{1}{2}x|, \qquad -\pi \le x \le \pi, \ x \neq 0$

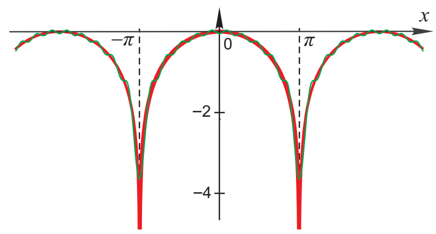
$$-\left(\ln 2 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \cdots\right)$$



Σχ. 15-17: $f(x)$ —, S_{10} —

$f(x) = \ln(\cos\tfrac{1}{2}x), \qquad -\pi < x < \pi$

$$-\left(\ln 2 - \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 3x}{3} + \cdots\right)$$

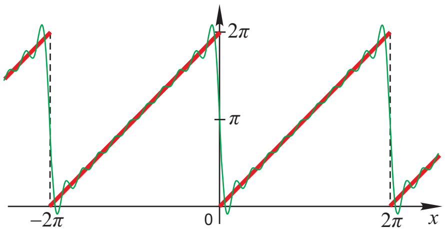


Σχ. 15-18: $f(x)$ —, S_{10} —

Άλλες συναρτήσεις

$f(x) = x, \qquad 0 < x < 2\pi$

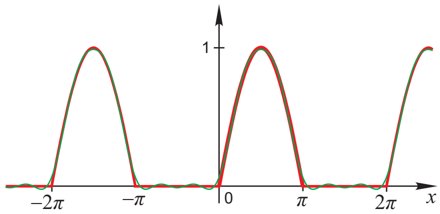
$$\pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\right)$$



Σχ. 15-19: $f(x)$ —, S_{10} —

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

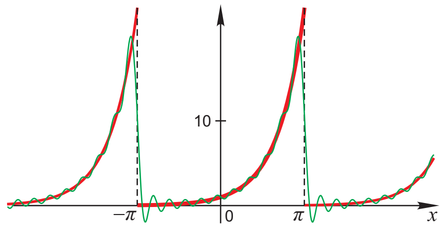
$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \cdots\right)$$



Σχ. 15-20: $f(x)$ —, S_5 —

$f(x) = e^{ax}, \qquad -\pi < x < \pi$

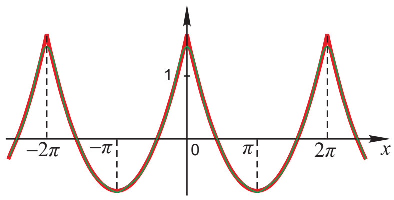
$$\frac{2\sinh a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a}{a^2+n^2}\cos nx - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{a^2+n^2}\sin nx\right)$$



Σχ. 15-21: $a = 1$, $f(x)$ —, S_{10} —

$f(x) = \frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{4}x^2, \qquad 0 \le x \le 2\pi$

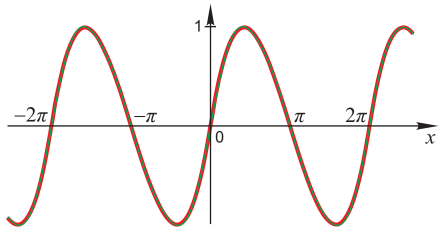
$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots$$



Σχ. 15-22: $f(x)$ —, S_5 —

$f(x) = \frac{1}{12}x(x-\pi)(x-2\pi), \quad 0 \le x \le 2\pi$

$$\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \cdots$$

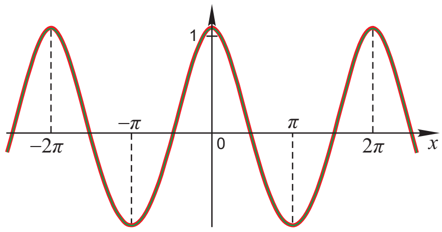


Σχ. 15-23: $f(x)$ —, S_3 —

$$f(x)=\frac{1}{90}\pi^4-\frac{1}{12}\pi^2x^2+\frac{1}{12}\pi x^3-\frac{1}{48}x^4$$

$$0\le x\le 2\pi$$

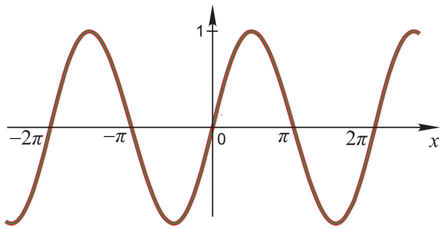
$$\frac{\cos x}{1^4}+\frac{\cos 2x}{2^4}+\frac{\cos 3x}{3^4}+\cdots$$



Σχ. 15-24: $f(x)$ ——, S_3 ——

$$\frac{\pi^4 x}{90}-\frac{\pi^2x^3}{36}+\frac{\pi x^4}{48}-\frac{x^5}{240}$$

$$\frac{\sin x}{1^5}+\frac{\sin 2x}{2^5}+\frac{\sin 3x}{3^5}+\cdots$$



Σχ. 15-25: $f(x)$ ——, S_3 ——

$$f(x)=\tan^{-1}\left(\frac{a\sin x}{1-a\cos x}\right),\qquad -\pi<x<\pi,\ |a|<1$$

$$a\sin x+\frac{a^2}{2}\sin 2x+\frac{a^3}{3}\sin 3x+\cdots$$

Σχ. 15-3: $f(x)$ ——, S_5 ——

$$f(x)=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2a\sin x}{1-a^2}\right),\qquad -\pi<x<\pi,\ a<1$$

$$a\sin x+\frac{a^3}{3}\sin 3x+\frac{a^5}{5}\sin 5x+\cdots$$

Σχ. 15-3: $f(x)$ ——, S_5 ——

$$f(x)=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2a\cos x}{1-a^2}\right),\qquad -\pi<x<\pi,\ a<1$$

$$a\cos x-\frac{a^3}{3}\cos 3x+\frac{a^5}{5}\cos 5x-\cdots$$

Σχ. 15-3: $f(x)$ ——, S_5 ——

16 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL

16.1 Ορισμοί

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τη *διαφορική εξίσωση του Bessel*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \qquad n \geq 0$$

καλούνται *συναρτήσεις Bessel τάξης* n.

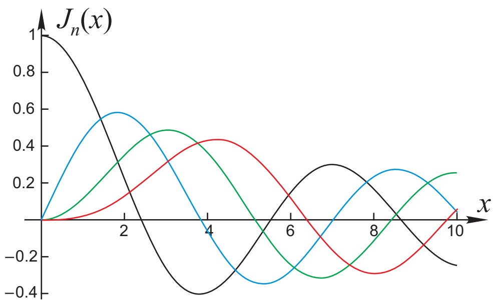
Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης του Bessel είναι

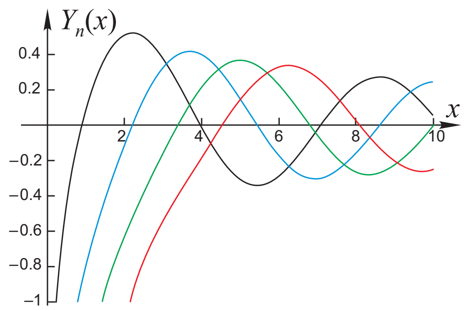
$$y = c_1J_n(x) + c_2J_{-n}(x), \qquad n \neq 0, 1, 2, \ldots$$

$$y = c_1J_n(x) + c_2Y_n(x), \qquad \text{για κάθε } n$$

$$y = c_1J_n(x) + c_2J_n(x)\int \frac{dx}{xJ_n^2(x)} \qquad \text{για κάθε } n$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές και $J_n(x)$, $Y_n(x)$ οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.





Σχ. 16-1: $J_n(x)$, $Y_n(x)$, $n = 0$ ——, $n = 1$ ——, $n = 2$ ——, $n = 3$ ——

16.2 Συναρτήσεις Bessel Πρώτου Είδους

Οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους και τάξης n ορίζονται με τις σχέσεις

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(k+n+1)}$$

$$J_{-n}(x) = \frac{x^{-n}}{2^{-n}\Gamma(1-n)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2-2n)(4-2n)} - \cdots\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-n}}{k!\,\Gamma(k-n+1)}$$

Αν $n \neq 0, 1, 2, \ldots$, (α) οι $J_n(x)$ και $J_{-n}(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, (β) η $J_n(x)$ είναι πεπερασμένη στο $x = 0$, ενώ η $J_{-n}(x)$ απειρίζεται.

Αν $n = 0, 1, 2, \ldots, J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

Η ορίζουσα του Wronski είναι

$$W[J_n(x), J_{-n}(x)] = \begin{vmatrix} J_n(x) & J_{-n}(x) \\ J_n'(x) & J_{-n}'(x) \end{vmatrix} = J_{n+1}(x)J_{-n}(x) + J_n(x)J_{-(n+1)} = \frac{-2}{\pi x}\sin(n\pi)$$

Γεννήτρια συνάρτηση

Η *γεννήτρια συνάρτηση* είναι

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

Ιδιότητες

Για $n = 0, 1$ είναι

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2\cdot 4} + \frac{x^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} - \frac{x^7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \cdots$$

$$J_0(x) = \left(1 - \frac{x^2}{\lambda_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda_2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda_3^2}\right)\cdots$$

[$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, είναι οι θετικές ρίζες της $J_0(x) = 0$]

$$J_1(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{\lambda_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda_2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda_3^2}\right)\cdots$$

[$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, είναι οι θετικές ρίζες της $J_1(x) = 0$]

$J_0'(x) = -J_1(x)$

Γενικά, για κάθε n είναι

$$\left.\begin{aligned}
&J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x)\\
&J_n'(x)=\tfrac{1}{2}[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)]\\
&xJ_n'(x)=xJ_{n-1}(x)-nJ_n(x)\\
&xJ_n'(x)=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)\\
&\frac{d}{dx}\{x^nJ_n(x)\}=x^nJ_{n-1}(x)\\
&\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\}=-x^{-n}J_{n+1}(x)
\end{aligned}\right\}\text{Αναδρομικές σχέσεις}$$

Στην περίπτωση ημιπεριττής τάξης οι συναρτήσεις Bessel εκφράζονται με ημίτονα και συνημίτονα και $R=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}$.

$J_{1/2}(x)=R\sin x$ $\qquad$ $J_{-1/2}(x)=R\cos x$

$J_{3/2}(x)=R\left(\dfrac{\sin x}{x}-\cos x\right)$ $\qquad$ $J_{-3/2}(x)=R\left(\dfrac{\cos x}{x}+\sin x\right)$

$J_{5/2}(x)=R\left\{\left(\dfrac{3}{x^2}-1\right)\sin x-\dfrac{3}{x}\cos x\right\}$ $\qquad$ $J_{-5/2}(x)=R\left\{\dfrac{3}{x}\sin x+\left(\dfrac{3}{x^2}-1\right)\cos x\right\}$

Άλλες εκφράσεις μπορούν να ληφθούν από τις αναδρομικές σχέσεις.

Ρίζες των συναρτήσεων Bessel

Για n πραγματικό ισχύουν τα εξής:

1. Η $J_n(x)=0$ έχει άπειρο πλήθος πραγματικών ριζών. Όλες αυτές οι ρίζες είναι *απλές*, εκτός ίσως από την $x=0$.
2. Αν $n\geq -1$, *όλες* οι ρίζες της $J_n(x)=0$ είναι πραγματικές.
3. Αν $n=1, 2, \ldots$, οι θετικές ή αρνητικές ρίζες των $J_n(x)=0$ και $J_{n+1}(x)=0$ *εναλλάσσονται*, δηλαδή μεταξύ των δύο διαδοχικών ριζών της μιας περιέχεται μία μόνο ρίζα της άλλης.
4. Η διαφορά $\lambda_{m+1}-\lambda_m$ μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της $J_n(x)=0$ τείνει να γίνει ίση με π, όταν η τιμή των ριζών αυξάνει ($m\to+\infty$).

16.3 Συναρτήσεις Bessel Δεύτερου Είδους

Οι συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους και τάξης n ορίζονται με τις σχέσεις

$$Y_n(x) = \begin{cases} \dfrac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} & n \neq 0, 1, 2, \ldots \\[2ex] \lim\limits_{p\to n} \dfrac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} & n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή καλείται και *συνάρτηση του Weber* ή του *Neumann* [συμβολίζεται και $N_n(x)$]. Οι συναρτήσεις Bessel $Y_n(x)$ ικανοποιούν και αυτές τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις με τις $J_n(x)$.

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$, ο κανόνας του L' Hospital δίνει

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\{\ln(x/2) + \gamma\}J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)!(x/2)^{2k-n}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(P_k + P_{n+k})\frac{(x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$

όπου $\gamma = 0.5772156\ldots$ είναι η σταθερή του Euler και

$$P_0 = 0, \qquad P_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Για $n = 0$ είναι

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\{\ln(x/2) + \gamma\}J_0(x) + \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots\right\}$$

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y(x)$.

Για κάθε $n \geq 0$, η $Y_n(x)$ απειρίζεται στο $x = 0$ [ενώ η $J_n(x)$ είναι πεπερασμένη].

Οι συναρτήσεις $Y_{1/2}(x)$, $Y_{3/2}(x)$, κτλ. προκύπτουν από τον ορισμό της $Y_n(x)$ για $n \neq 1, 2, \ldots$ και τις $J_{1/2}(x)$, $J_{3/2}(x)$, ….

Συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$$

16.4 Τροποποιημένες Συναρτήσεις Bessel

Ορισμοί

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την *τροποποιημένη διαφορική εξίσωση του Bessel*

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0 \qquad n \geq 0$$

καλούνται *τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel τάξης n.*

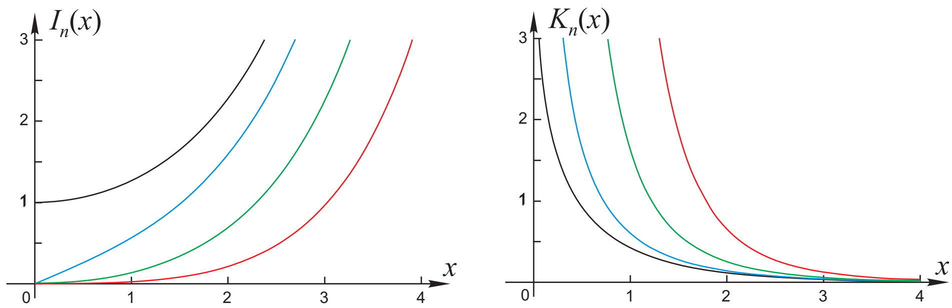
Η γενική λύση της τροποποιημένης διαφορικής εξίσωσης του Bessel είναι

$$y = c_1 I_n(x) + c_2 I_{-n}(x), \qquad n \neq 0, 1, 2, \ldots$$

$$y = c_1 I_n(x) + c_2 K_n(x), \qquad \text{για κάθε } n$$

$$y = c_1 I_n(x) + c_2 I_n(x) \int \frac{dx}{x I_n^2(x)}, \qquad \text{για κάθε } n$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές και $I_n(\mathrm{x})$ και $K_n(\mathrm{x})$ οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.



Σχ. 16-2: $I_n(x)$, $K_n(x)$, $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$

Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = e^{-n\pi i/2} J_n(ix)$$

$$= \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \cdots \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

$$I_{-n}(x) = i^n J_{-n}(ix) = e^{n\pi i/2} J_{-n}(ix)$$

$$= \frac{x^{-n}}{2^{-n}\Gamma(1-n)}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2-2n)(4-2n)} + \cdots\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k-n}}{k!\,\Gamma(k+1-n)}$$

Για $n \neq 0, 1, 2, \ldots$ οι $I_n(x)$ και $I_{-n}(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι $I_{-n}(x) = I_n(x)$.

Γεννήτρια συνάρτηση

Η *γεννήτρια συνάρτηση* είναι

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) t^n$$

Ιδιότητες

Για $n = 0, 1$ είναι

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2\cdot 4} + \frac{x^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} + \frac{x^7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \cdots$$

$$I_0'(x) = I_1(x)$$

$$\left.\begin{aligned}
&I_{n+1}(x) = I_{n-1}(x) - \frac{2n}{x} I_n(x)\\
&I_n'(x) = \tfrac{1}{2}[I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)]\\
&xI_n'(x) = xI_{n-1}(x) - nI_n(x)\\
&xI_n'(x) = xI_{n+1}(x) + nI_n(x)\\
&\frac{d}{dx}\{x^n I_n(x)\} = x^n I_{n-1}(x)\\
&\frac{d}{dx}\{x^{-n} I_n(x)\} = x^{-n} I_{n+1}(x)
\end{aligned}\right\}\ \text{Αναδρομικές σχέσεις}$$

Στην περίπτωση ημιπεριττής τάξης οι συναρτήσεις εκφράζονται με υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα και $R=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}$.

$$I_{1/2}(x)=R\sinh x \qquad I_{-1/2}(x)=R\cosh x$$

$$I_{3/2}(x)=R\left(\cosh x-\frac{\sinh x}{x}\right) \qquad I_{-3/2}(x)=R\left(\sinh x-\frac{\cosh x}{x}\right)$$

$$I_{5/2}(x)=R\left\{\left(\frac{3}{x^2}+1\right)\sinh x-\frac{3}{x}\cosh x\right\} \qquad I_{-5/2}(x)=R\left\{\left(\frac{3}{x^2}+1\right)\cosh x-\frac{3}{x}\sinh x\right\}$$

Άλλες εκφράσεις μπορούν να ληφθούν από την αναδρομική σχέση.

Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους

$$K_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sin n\pi}\{I_{-n}(x)-I_n(x)\}, & n\neq 0,1,2,\dots\\[2ex] \lim\limits_{p\to n}\dfrac{\pi}{2\sin p\pi}\{I_{-p}(x)-I_p(x)\}, & n=0,1,2,\dots\end{cases}$$

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$, ο κανόνας του L'Hospital δίνει

$$K_n(x)=(-1)^{n+1}\{\ln(x/2)+\gamma\}I_n(x)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(n-k-1)!(x/2)^{2k-n}$$
$$+\frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\{\Phi(k)+\Phi(n+k)\}$$

όπου $\gamma = .5772156\ldots$ είναι η σταθερή του Euler και

$$P_0=0, \qquad P_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}, \qquad k=1,2,\dots$$

Για $n = 0$,

$$K_0(x)=-\{\ln(x/2)+\gamma\}I_0(x)+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots$$

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι $K_{-n}(x) = K_n(x)$.

Για κάθε n είναι

$$\left.\begin{aligned}
&K_{n+1}(x) = K_{n-1}(x) + \frac{2n}{x} K_n(x) \\
&K_n'(x) = \tfrac{1}{2}[K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x)] \\
&xK_n'(x) = -xK_{n-1}(x) - nK_n(x) \\
&xK_n'(x) = nK_n(x) - xK_{n+1}(x) \\
&\frac{d}{dx}\{x^n K_n(x)\} = -x^n K_{n-1}(x) \\
&\frac{d}{dx}\{x^{-n} K_n(x)\} = x^{-n} K_{n+1}(x)
\end{aligned}\right\} \text{Αναδρομικές σχέσεις}$$

Τα $K_{1/2}(x)$, $K_{3/2}(x)$, … προκύπτουν από τον ορισμό και τις $I_{1/2}(x)$, $I_{3/2}(x)$, ….

16.5 Συναρτήσεις Ber και Bei, Ker και Kei

Συναρτήσεις Ber και Bei

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2y'' + xy' - (ix^2 + n^2)y = 0 \qquad n \geq 0, \quad i = \sqrt{-1}$$

είναι

$$y = c_1\{\mathrm{Ber}_n(x) + i\mathrm{Bei}_n(x)\} + c_2\{\mathrm{Ker}_n(x) + i\mathrm{Kei}_n(x)\}$$

Οι συναρτήσεις $\mathrm{Ber}_n(x)$ και $\mathrm{Bei}_n(x)$ είναι αντίστοιχα το πραγματικό και φανταστικό μέρος της $J_n(xe^{3\pi i/4})$ και αναφέρονται συχνά ως *συναρτήσεις Kelvin*.

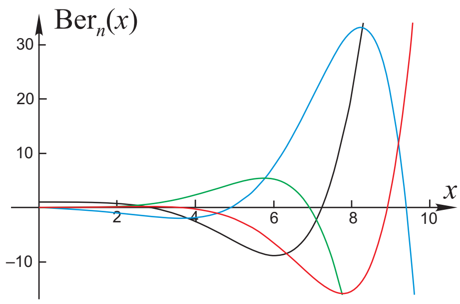
$$\mathrm{Ber}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

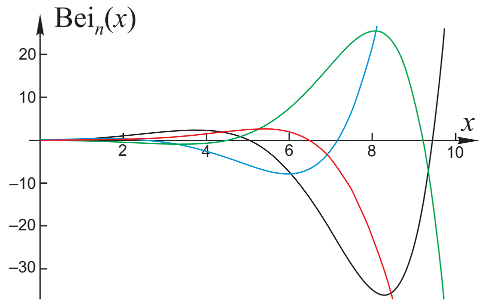
$$\mathrm{Bei}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \sin\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

Για $n = 0$ είναι

$$\mathrm{Ber}(x) = \mathrm{Ber}_0(x) = 1 - \frac{(x/2)^4}{2!^2} + \frac{(x/2)^8}{4!^4} - \cdots$$

$$\mathrm{Bei}(x) = \mathrm{Bei}_0(x) = (x/2)^2 - \frac{(x/2)^6}{3!^2} + \frac{(x/2)^{10}}{5!^2} - \cdots$$





Σχ. 16-3: $\mathrm{Ber}_n(x)$, $\mathrm{Bei}_n(x)$, $n = 0$ ——, $n = 1$ ——, $n = 2$ ——, $n = 3$ ——

Συναρτήσεις Ker και Kei

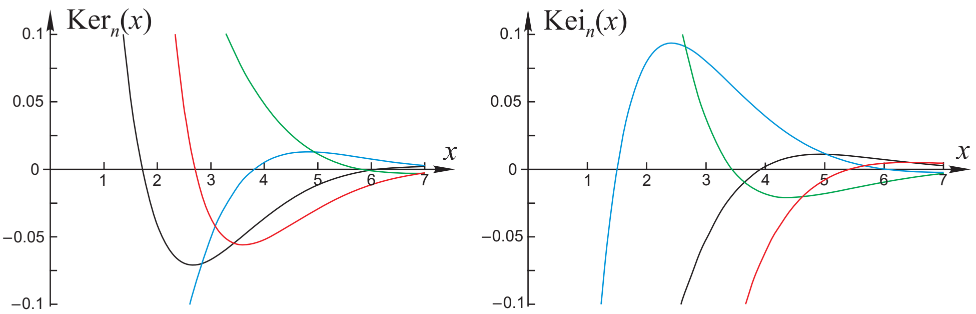
Οι συναρτήσεις $\mathrm{Ker}_n(x)$ και $\mathrm{Kei}_n(x)$ είναι αντίστοιχα το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $e^{-n\pi i/2}K_n(xe^{\pi i/4})$.

$$\mathrm{Ker}_n(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}\mathrm{Ber}_n(x) + \frac{1}{4}\pi \mathrm{Bei}_n(x)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!(x/2)^{2k-n}}{k!}\cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}(P_k+P_{n+k})\cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

$$\mathrm{Kei}_n(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}\mathrm{Bei}_n(x) - \frac{1}{4}\pi \mathrm{Ber}_n(x)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!(x/2)^{2k-n}}{k!}\sin\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}(P_k+P_{n+k})\sin\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

όπου $\gamma = .5772156\ldots$ είναι η σταθερή του Euler και

$$P_0 = 0, \qquad P_k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$



Σχ. 16-4: $\mathrm{Ker}_n(x)$, $\mathrm{Kei}_n(x)$, $n = 0$ ——, $n = 1$ ——, $n = 2$ ——, $n = 3$ ——

Για $n = 0$ είναι

$$\mathrm{Ker}(x) = \mathrm{Ker}_0(x) = -\{\ln(x/2) + \gamma\}\mathrm{Ber}(x) + \frac{\pi}{4}\mathrm{Bei}(x)$$

$$+1 - \frac{(x/2)^4}{2!^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{(x/2)^8}{4!^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \cdots$$

$$\mathrm{Kei}(x) = \mathrm{Kei}_0(x) = -\{\ln(x/2) + \gamma\}\mathrm{Bei}(x) - \frac{\pi}{4}\mathrm{Ber}(x)$$

$$+(x/2)^2 - \frac{(x/2)^6}{3!^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots$$

16.6 Σφαιρικές Συναρτήσεις Bessel

Οι *σφαιρικές συναρτήσεις Bessel* πρώτου, δεύτερου, τρίτου και τέταρτου είδους ορίζονται αντίστοιχα με τις σχέσεις

$$j_k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{k+\frac{1}{2}}(x) \qquad n_k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{k+\frac{1}{2}}(x)$$

$$h_k^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H^{(1)}_{k+\frac{1}{2}}(x) \qquad h_k^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H^{(2)}_{k+\frac{1}{2}}(x)$$

και ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + 2xy' + [x^2 - k(k+1)]y = 0$$

Για ακέραιο k οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel είναι στοιχειώδεις συναρτήσεις:

$$j_0(x)=\frac{\sin x}{x} \qquad n_0(x)=-\frac{\cos x}{x}$$

$$h_0^{(1)}(x)=-\frac{ie^{ix}}{x} \qquad h_0^{(2)}(x)=\frac{ie^{-ix}}{x}$$

$$j_1(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x} \qquad n_1(x)=-\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}$$

$$h_1^{(1)}(x)=-\frac{e^{ix}}{x}\left(1+\frac{i}{x}\right) \qquad h_1^{(2)}(x)=-\frac{e^{-ix}}{x}\left(1-\frac{i}{x}\right)$$

16.6 Διάφορες Εκφράσεις των Συναρτήσεων Bessel

Ασυμπτωτικές εκφράσεις

$$J_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{για μεγάλο } x$$

$$Y_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{για μεγάλο } x$$

$$J_n(x)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{ex}{2n}\right)^n \qquad \text{για μεγάλο } n$$

$$Y_n(x)\sim-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{ex}{2n}\right)^{-n} \qquad \text{για μεγάλο } n$$

$$I_n(x)\sim\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \qquad \text{για μεγάλο } x$$

$$K_n(x)\sim\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}} \qquad \text{για μεγάλο } x$$

Για μεγάλο x (ή n) σημαίνει ότι ο λόγος του αριστερού μέλους προς το δεξιό μέλος τείνει στο 1, όταν το x (ή το n) τείνει στο άπειρο.

Εκφράσεις με ολοκληρώματα

$$J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\,d\theta$$

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta, \qquad n=\text{ακέραιος}$$

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos^{2n}\theta\,d\theta,\qquad n>-\frac{1}{2}$$

$$Y_0(x)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(x\cosh u)\,du$$

$$I_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cosh(x\sin\theta)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{x\sin\theta}\,d\theta$$

16.7 Ολοκληρώματα με Συναρτήσεις Bessel

Αόριστα ολοκληρώματα

Οι παρακάτω σχέσεις ισχύουν και αν το $J_n(x)$ αντικατασταθεί με $Y_n(x)$ ή γενικότερα με $c_1J_n(x) + c_2Y_n(x)$, όπου c_1 και c_2 σταθερές.

$$\int xJ_0(x)dx=xJ_1(x)$$

$$\int x^2J_0(x)dx=x^2J_1(x)+xJ_0(x)-\int J_0(x)dx$$

$$\int x^mJ_0(x)dx=x^mJ_1(x)+(m-1)x^{m-1}J_0(x)-(m-1)^2\int x^{m-2}J_0(x)dx$$

$$\int\frac{J_0(x)}{x^2}dx=J_1(x)-\frac{J_0(x)}{x}-\int J_0(x)dx$$

$$\int\frac{J_0(x)}{x^m}dx=\frac{J_1(x)}{(m-1)^2x^{m-2}}-\frac{J_0(x)}{(m-1)x^{m-1}}-\frac{1}{(m-1)^2}\int\frac{J_0(x)}{x^{m-2}}dx$$

$$\int J_1(x)dx=-J_0(x)$$

$$\int xJ_1(x)dx=-xJ_0(x)+\int J_0(x)dx$$

$$\int x^mJ_1(x)dx=-x^mJ_0(x)+\int x^{m-1}J_0(x)dx$$

$$\int\frac{J_1(x)}{x}dx=-J_1(x)+\int J_0(x)dx$$

$$\int \frac{J_1(x)}{x^m}dx = -\frac{J_1(x)}{mx^{m-1}} + \frac{1}{m}\int \frac{J_0(x)}{x^{m-1}}dx$$

$$\int x^n J_{n-1}(x)dx = x^n J_n(x)$$

$$\int x^{-n} J_{n+1}(x)dx = -x^{-n} J_n(x)$$

$$\int x^m J_n(x)dx = -x^m J_{n-1}(x) + (m+n-1)\int x^{m-1} J_{n-1}(x)dx$$

$$\int x J_n(\alpha x) J_n(\beta x)dx = \frac{x\{\alpha J_n(\beta x) J_n'(\alpha x) - \beta J_n(\alpha x) J_n'(\beta x)\}}{\beta^2 - \alpha^2}$$

$$\int x J_n^2(\alpha x)dx = \frac{x^2}{2}\{J_n'(\alpha x)\}^2 + \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 x^2}\right)\{J_n(\alpha x)\}^2$$

$$\int x J_n^2(\alpha x)dx = \frac{x^2}{2}\{J_n'(\alpha x)\}^2 + \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 x^2}\right)\{J_n(\alpha x)\}^2$$

Ορισμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_n(bx)dx = \frac{(\sqrt{a^2+b^2} - a)^n}{b^n \sqrt{a^2+b^2}}, \qquad n > -1$$

$$\int_0^\infty \cos ax J_0(bx)dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} & a > b \\ 0 & a < b \end{cases}$$

$$\int_0^\infty J_n(bx)dx = \frac{1}{b}, \qquad n > -1$$

$$\int_0^\infty \frac{J_n(bx)}{x}dx = \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(b\sqrt{x})dx = \frac{e^{-b^2/4a}}{a}$$

$$\int_0^1 xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx = \frac{\alpha J_n(\beta)J_n'(\alpha) - \beta J_n(\alpha)J_n'(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}$$

$$\int_0^1 xJ_n^2(\alpha x)dx = \frac{1}{2}\{J_n'(\alpha)\}^2 + \frac{1}{2}(1 - n^2/\alpha^2)\{J_n(\alpha)\}^2$$

$$\int_0^1 xJ_0(\alpha x)I_0(\beta x)dx = \frac{\beta J_0(\alpha)I_0'(\beta) - \alpha J_0'(\alpha)I_0(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

16.8 Αναπτύγματα σε Σειρά Συναρτήσεων Bessel

Ορθογωνιότητα

Αν λ_k, λ_m είναι δύο ρίζες της εξίσωσης $J_n(x) = 0$, τότε

$$\int_0^1 J_n(\lambda_k x)J_n(\lambda_m x)x\,dx = \tfrac{1}{2}[J_n{}'(\lambda_k)]^2\delta_{km}$$

Συνεπώς, οι συναρτήσεις Bessel είναι ορθογώνιες στο διάστημα [0, 1] με συνάρτηση βάρους x.

Γενικότερα, αν λ_k, λ_m είναι δύο ρίζες της εξίσωσης $aJ_n(x) + bxJ_n{}'(x) = 0$ όπου a και b σταθερές (όχι και οι δύο μηδέν), τότε

$$\int_0^1 J_k(\lambda_k x)J_m(\lambda_m x)x\,dx = \frac{1}{2}\left\{[J_k{}'(\lambda_k)]^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k{}^2}\right)[J_k(\lambda_k)]^2\right\}\delta_{km}$$

Ανάπτυγμα σε σειρά

Υποθέτουμε ότι οι $f(x)$ και $f'(x)$ είναι τμηματικά συνεχείς και ότι η $f(x)$ ορίζεται ίση με $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ στα σημεία ασυνέχειας.

Με ρίζες της $J_n(x) = 0$

Αν λ_1, λ_2, λ_3, … είναι οι θετικές ρίζες της εξίσωσης $J_n(x) = 0$ με $n > -1$, τότε

$$f(x) = A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + A_3 J_n(\lambda_3 x) + \cdots$$

όπου

$$A_k = \frac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_k)}\int_0^1 x\,f(x)J_n(\lambda_k x)dx$$

Με ρίζες της $aJ_n(x) + xJ_n'(x) = 0$

Αν λ_1, λ_2, λ_3, … είναι οι θετικές ρίζες της $aJ_n(x) + xJ_n'(x) = 0$ με $n > -1$ και a αυθαίρετη σταθερή, τότε το ανάπτυγμα της $f(x)$ έχει τη γενική μορφή

$$f(x) = f_0(x) + A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + A_3 J_n(\lambda_3 x) + \cdots$$

όπου

$$A_k = \frac{2}{J_n^2(\lambda_k) - J_{n-1}(\lambda_k) J_{n+1}(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_n(\lambda_k x)\, dx, \qquad k = 1, 2, ,\ldots$$

και η $f_0(x)$ ορίζεται ως εξής:

Για $a > -n$, $f_0(x) = 0$.

Για $a = -n$, $f_0(x) = A_0 x^n$, $A_0 = 2(n+1)\int_0^1 x^{n+1} f(x)\, dx$.

Για $a < -n$, $f_0(x) = A_0 I_n(\lambda_0 x)$, $A_0 = \dfrac{2}{I_n^2(\lambda_0) + I_{n-1}(\lambda_0) I_{n+1}(\lambda_0)} \displaystyle\int_0^1 x f(x) I_n(\lambda_0 x)\, dx$,

όπου $\pm i\lambda_0$ οι δύο επιπλέον φανταστικές ρίζες που υπάρχουν στην περίπτωση αυτή.

Τα προηγούμενα μπορούν να επεκταθούν σε σειρές συναρτήσεων Bessel δεύτερου είδους.

Διάφορα αναπτύγματα

$$\cos(x \sin\theta) = J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\theta + 2J_4(x)\cos 4\theta + \cdots + 2J_{2k}(x)\cos(2k\theta) + \cdots$$

$$\sin(x \sin\theta) = 2J_1(x)\sin\theta + 2J_3(x)\sin 3\theta + 2J_5(x)\sin 5\theta + \cdots + 2J_{2k+1}(x)\sin[(2k+1)\theta] + \cdots$$

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) J_{n-k}(y), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

[*αθροιστικός τύπος* για τις συναρτήσεις Bessel]

$$1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \cdots + 2J_{2k}(x) + \cdots$$

$$x = 2\{J_1(x) + 3J_3(x) + 5J_5(x) + \cdots + (2k+1)J_{2k+1}(x) + \cdots\}$$

$$x^2 = 2\{4J_2(x) + 16J_4(x) + 36J_6(x) + \cdots + (2k)^2 J_{2k}(x) + \cdots\}$$

$$x^n = 2^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+2k)(n+k-1)!}{k!} J_{n+2k}(x)$$

$$xJ_1(x) = 4J_2(x) - 8J_4(x) + 12J_6(x) - \cdots$$

$$1 = J_0^2(x) + 2J_1^2(x) + 2J_2^2(x) + 2J_3^2(x) + \cdots$$

$$J_n''(x) = \tfrac{1}{4}J_{n-2}(x) - \tfrac{1}{2}J_n(x) + \tfrac{1}{4}J_{n+2}(x)$$

$$J_n'''(x) = \tfrac{1}{8}J_{n-3}(x) - \tfrac{3}{8}J_{n-1}(x) + \tfrac{3}{8}J_{n+1}(x) - \tfrac{1}{8}J_{n+3}(x)\}$$

Οι δύο προηγούμενοι τύποι μπορούν να γενικευθούν.

$$J_n'(x)J_{-n}(x) - J_{-n}'(x)J_n(x) = \frac{2\sin n\pi}{\pi x}$$

$$J_n(x)J_{-n+1}(x) + J_{-n}(x)J_{n-1}(x) = \frac{2\sin n\pi}{\pi x}$$

$$J_{n+1}(x)Y_n(x) - J_n(x)Y_{n+1}(x) = \frac{1}{x}$$

$$\sin x = 2\{J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - \cdots + (-1)^k J_{2k+1}(x) + \cdots\}$$

$$\cos x = J_0(x) + 2\{-J_2(x) + J_4(x) - J_6(x) + \cdots + (-1)^k J_{2k}(x) + \cdots\}$$

$$1 = I_0(x) - 2I_2(x) + 2I_4(x) - 2I_6(x) + \cdots$$

$$e^x = I_0(x) + 2I_1(x) + 2I_2(x) + 2I_3(x) + \cdots + 2I_k(x) + \cdots$$

$$e^{x\cos\theta} = I_0(x) + 2I_1(x)\cos\theta + 2I_2(x)\cos 2\theta + \cdots + 2I_k(x)\cos(k\theta) + \cdots$$

$$\sinh x = 2\{I_1(x) + I_3(x) + I_5(x) + \cdots\}$$

$$\cosh x = I_0(x) + 2\{I_2(x) + I_4(x) + I_6(x) + \cdots\}$$

17 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ LEGENDRE

17.1 Ορισμοί

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τη *διαφορική εξίσωση Legendre*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

καλούνται *συναρτήσεις Legendre τάξης n*.

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης του Legendre είναι

$$y = c_1 U_n(x) + c_2 V_n(x)$$

όπου

$$U_n(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots$$

$$V_n(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots$$

και c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές. Οι σειρές αυτές συγκλίνουν για $-1 < x < 1$. Στα παρακάτω περιοριζόμαστε σε μη αρνητικό ακέραιο n.

Με $n = 0, 1, 2, \cdots$, μια από αυτές τις σειρές περατούται και δίνει ένα *πολυώνυμο Legendre*

$$P_n(x) = \begin{cases} U_n(x)/U_n(1), & n = 0, 2, 4, \ldots \\ V_n(x)/V_n(1), & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

$$U_n(1) = \frac{(-1)^{n/2}2^n}{n!}\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2, \qquad n = 0, 2, 4, \ldots$$

$$V_n(1) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}2^{n-1}}{n!}\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

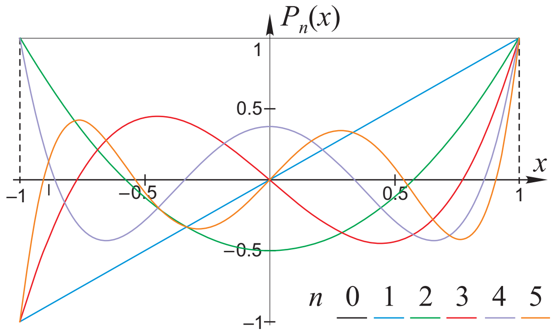
Η άλλη σειρά έχει άπειρους όρους και πολλαπλασιασμένη επί μια κατάλληλη σταθερή δίνει τη *συνάρτηση Legendre δεύτερου είδους και τάξης n*

$$Q_n(x) = \begin{cases} U_n(1)V_n(x), & n = 0, 2, 4\ldots \\ -V_n(1)U_n(x), & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

17.2 Πολυώνυμα Legendre

Τα πολυώνυμα Legendre δίνονται από τον *τύπο του Rodrigues*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$



Σχ. 17-1

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$

$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$

$P_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$

Με $x = \cos\theta$ παίρνουμε

$P_0(\cos\theta) = 1$

$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(1 + 3\cos 2\theta)$

$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{8}(3\cos\theta + 5\cos 3\theta)$

$P_4(\cos\theta) = \frac{1}{64}(9 + 20\cos 2\theta + 35\cos 4\theta)$

$P_5(\cos\theta) = \frac{1}{128}(30\cos\theta + 35\cos 3\theta + 63\cos 5\theta)$

$P_6(\cos\theta) = \frac{1}{512}(50 + 105\cos 2\theta + 126\cos 4\theta + 231\cos 6\theta)$

$P_7(\cos\theta) = \frac{1}{1024}(175\cos\theta + 189\cos 3\theta + 231\cos 5\theta + 429\cos 7\theta)$

$P_8(\cos\theta) = \frac{1}{16384}(1225 + 2520\cos 2\theta + 2772\cos 4\theta + 3432\cos 6\theta + 6435\cos 8\theta)$

Γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \qquad |t|<1$$

Αναδρομικές σχέσεις

$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$

$P'_{n+1}(x) - xP_n'(x) = (n+1)P_n(x)$

$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$

$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$

$(x^2 -)P_n'(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

Ορθογωνιότητα

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

Επειδή τα $P_m(x)$ και $P_n(x)$ ικανοποιούν την προηγούμενη σχέση για $m \neq n$, καλούνται *ορθογώνια* στο $-1 \leq x \leq 1$.

Αναπτύγματα σε σειρά πολυωνύμων Legendre

Τα πολυώνυμα Legendre συνιστούν *πλήρη ομάδα συναρτήσεων*, δηλαδή κάθε τμηματικά λεία συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $-1 < x < 1$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά πολυωνύμων Legendre στη μορφή

$$f(x) = A_0P_0(x) + A_1P_1(x) + A_2P_2(x) + \cdots$$

$$A_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx$$

Στα σημεία ασυνέχειας η σειρά δίνει το άθροισμα $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Ιδιότητες

$P_n(1) = 1 \qquad P_n(-1) = (-1)^n \qquad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ περιττός} \\ (-1)^{n/2}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)^n \, d\varphi$$

$$\int P_n(x)\,dx = \frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1}$$

$$|P_n(x)| \le 1 \qquad \text{στο } -1 \le x \le 1$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz \qquad \text{[ολοκλήρωμα του Schläfli]}$$

όπου C είναι μια απλή κλειστή καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο z και x ένα εσωτερικό σημείο.

$$P_n(x) = F\left(-n,\, n+1;\, 1;\, \frac{1-x}{2}\right) = \frac{2n!}{2^n (n!)^2}\, x^n F\left(-\frac{n}{2},\, \frac{1-n}{2};\, \frac{1}{2} - n;\, \frac{1}{x^2}\right)$$

όπου F η υπεργεωμετρική συνάρτηση. Η σχέση αυτή ισχύει γενικά και για μη ακέραιο n, οπότε δίνει τη *συνάρτηση Legendre πρώτου είδους*. Στην περίπτωση αυτή η $P_n(x)$ έχει ανώμαλα σημεία στα $x = -1$ και $x = \infty$.

Η εξίσωση $P_n(x) = 0$ έχει ακριβώς n πραγματικές ρίζες, όλες στο διάστημα (0, 1).

17.3 Συναρτήσεις Legendre Δεύτερου Είδους

Οι συναρτήσεις Legendre δεύτερου είδους $Q_n(x)$ ορίζονται ως οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Legendre που αποκλίνουν στα άκρα του διαστήματος $-1 < x < 1$ και ικανοποιούν τη συνθήκη συμμετρίας

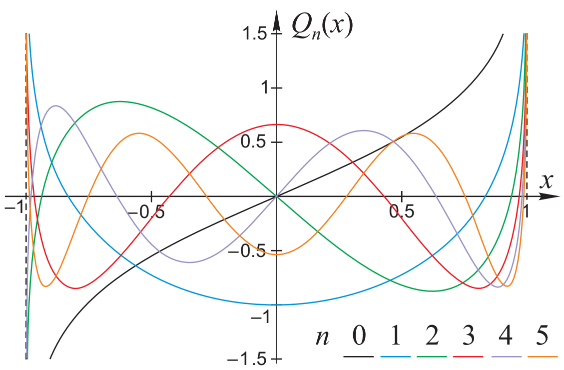
$$Q_n(-x) = (-1)^{n+1} Q_n(x)$$

Η απόκλιση είναι λογαριθμική, όπως φαίνεται και από τις πρώτες συναρτήσεις που είναι

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

$$Q_2(x) = \frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3x}{2}$$



Σχ. 17-2

$$Q_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{3}$$

$$Q_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{16}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{35x^3}{8} + \frac{55x}{24}$$

$$Q_5(x) = \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{16}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{63x^4}{8} + \frac{49x^2}{8} - \frac{8}{15}$$

Γενικά είναι

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(x) - \frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(x) - \frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}(x) - \cdots$$

$$Q_n(x) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{n+1}\Gamma(n+\frac{3}{2})}x^{-n-1}F\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+1}{2}; \frac{2n+3}{2}; \frac{1}{x^2}\right)$$

όπου F η υπεργεωμετρική συνάρτηση. Η σχέση αυτή ισχύει γενικά και για μη ακέραιο n, οπότε η $Q_n(x)$ έχει ανώμαλα σημεία στα $x = \pm 1$ και $x = \infty$.

Οι συναρτήσεις $Q_n(x)$ ικανοποιούν τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις με τα πολυώνυμα Legendre (Ενότητα 17.2).

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης του Legendre μπορεί να γραφεί

$$y = AP_n(x) + BQ_n(x)$$

Η ορίζουσα του Wronski είναι

$$W\{P_n(x), Q_n(x)\} = -(1-x^2)^{-1}$$

17.4 Προσαρτημένες Συναρτήσεις Legendre

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την *προσαρτημένη διαφορική εξίσωση του Legendre*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0$$

καλούνται *προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre*. Στα επόμενα περιοριζόμαστε στην περίπτωση όπου τα m, n είναι ακέραιοι αριθμοί με $n \geq 0$, $-n \leq m \leq n$ και $-1 < x < 1$.

Η γενική λύση της προσαρτημένης διαφορικής εξίσωσης του Legendre είναι

$$y = c_1 P_n^m(x) + c_2 Q_n^m(x)$$

όπου $P_n^m(x)$ και $Q_n^m(x)$ είναι οι *προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου και δεύτερου είδους* αντίστοιχα.

Προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους

Οι *προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους* ορίζονται από τα πολυώνυμα Legendre με τη σχέση

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n$$

όπου $P_n(x)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre. Ας σημειωθεί ότι το δεξιό μέλος της προηγούμενης σχέσης έχει νόημα και για αρνητικό m με $-n \le m \le n$. Γενικά είναι

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x)$$

Επίσης ορίζουμε $P_n^m(x) = 0$ για $m < -n$ ή $m > n$. Για τις τιμές των $P_n^m(x)$ έχουμε

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x) \quad \text{και} \quad P_n^m(\pm 1) = 0 \text{ για } m \neq 0$$

Οι πρώτες συναρτήσεις είναι

$P_n^0(x) = P_n(x)$ για κάθε n

$n = 1$ $\quad P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2} = \sin\theta$

$n = 2$ $\quad P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{1/2} = \frac{3}{2}\sin 2\theta$

$P_2^2(x) = 3(1-x^2) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$

$n = 3$ $\quad P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2} = \frac{3}{8}(\sin\theta + 5\sin 3\theta)$

$P_3^2(x) = 15x(1-x^2) = \frac{15}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta)$

$P_3^3(x) = 15(1-x^2)^{3/2} = \frac{15}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta)$

$n = 4$ $\quad P_4^1(x) = \frac{5}{2}(7x^3-3x)(1-x^2)^{1/2} = \frac{5}{16}(2\sin 2\theta + 7\cos 4\theta)$

$$P_4^{\,2}(x) = \tfrac{15}{2}(7x^2 - 1)(1 - x^2) = \tfrac{15}{16}(3 + 4\cos 2\theta - \cos 4\theta)$$

$$P_4^{\,3}(x) = 105x(1 - x^2)^{3/2} = \tfrac{105}{8}(2\sin 2\theta - \sin 4\theta)$$

$$P_4^{\,4}(x) = 105(1 - x^2)^2 = \tfrac{105}{8}(3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta)$$

Γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}t^m}{2^m m!(1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{n=m}^{\infty} P_n^m(x)t^n$$

Αναδρομικές σχέσεις

$$(n - m + 1)P_{n+1}^{\,m}(x) - (2n+1)xP_n^{\,m}(x) + (n + m)P_{n-1}^{\,m}(x) = 0$$

$$(1 - x^2)^{1/2}P_n^{\,m+2}(x) - 2(m + 1)xP_n^{\,m+1}(x) + (n - m)(n + m + 1)P_n^{\,m}(x) = 0$$

$$(1 - x^2)P_n^{\,m\,\prime}(x) - (n + 1)xP_n^{\,m}(x) + (n - m + 1)P_{n+1}^{\,m}(x) = 0 \qquad (' = d/dx)$$

Ορθογωνιότητα

Οι συναρτήσεις $P_n^{\,m}(x)$ και $P_l^{\,m}(x)$ είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους 1:

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_l^m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nl}$$

Οι συναρτήσεις $P_n^{\,k}(x)$ και $P_n^{\,m}(x)$ είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους $(1 - x^2)^{-1}$:

$$\int_{-1}^{1} P_n^k(x)P_n^m(x)\,dx = \frac{1}{m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{km}$$

Αναπτύγματα σε σειρά

$$f(x) = A_m P_m^{\,m}(x) + A_{m+1}P_{m+1}^{\,m}(x) + A_{m+2}P_{m+2}^{\,m}(x) + \cdots$$

$$A_k = \frac{2k+1}{2}\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\int_{-1}^{1} f(x)P_k^m(x)dx$$

Σχέση με υπεργεωμετρικές συναρτήσεις

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!m!}F\left(m-n,\, m+n+1;\, m+1;\, \frac{1-x}{2}\right)$$

Προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre δεύτερου είδους

Οι *προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre δεύτερου είδους* ορίζονται από τις συναρτήσεις Legendre δεύτερου είδους με τη σχέση

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x)$$

Οι συναρτήσεις αυτές απειρίζονται για $x = \pm 1$, ενώ οι $P_n{}^m(x)$ είναι πεπερασμένες για $x = \pm 1$.

Οι συναρτήσεις $Q_n{}^m(x)$ ικανοποιούν τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις με τις $P_n{}^m(x)$.

17.4 Σφαιρικές Αρμονικές

Διάφορα προβλήματα φυσικής σε τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο καταλήγουν στο μαθηματικό πρόβλημα επίλυσης μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους, όπως είναι η εξίσωση του Laplace, η εξίσωση του Helmholtz και η εξίσωση του Schrödinger. Ακολουθώντας τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες r, θ, φ, αν δεχθούμε ότι η λύση γράφεται ως άθροισμα συναρτήσεων της μορφής $R(r)Y(\theta, \varphi)$, προκύπτει για την $Y(\theta, \varphi)$ η διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + n(n+1)Y = 0$$

Περαιτέρω χωρισμός των μεταβλητών με την αντικατάσταση $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ δίνει για την $\Phi(\varphi)$ τη ΣΔΕ

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0$$

με λύσεις $\Phi = e^{\pm im\varphi}$. Για την $\Theta(\theta)$ παίρνουμε μια ΣΔΕ η οποία με την αντικατάσταση $x = \cos\theta$, $P(x) = \Theta(\theta)$ καταλήγει στη διαφορική εξίσωση των προσαρτημένων πολυωνύμων Legendre (Ενότητα ??). Οι συνοριακές και άλλες φυσικές συνθήκες επιβάλουν να είναι ακέραιοι οι n και m και επιπλέον $n \geq 0$, $-n \leq m \leq n$. Συνεπώς, η εξάρτηση της γενικής λύσης από τις γωνίες θ και φ εκφράζεται με τις συναρτήσεις

$$Y_n{}^m(\theta,\varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n{}^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

που καλούνται *σφαιρικές αρμονικές*. Ο σταθερός συντελεστής έχει επιλεγεί έτσι ώστε να είναι (ο αστερίσκος σημαίνει το συζυγή μιγαδικό)

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} Y_n^{m}{}^*(\theta,\varphi) Y_{n'}^{m'}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \delta_{nn'}\delta_{mm'}$$

Η συνθήκη αυτή καθιστά το σύνολο σφαιρικών αρμονικών ένα *ορθογώνιο* και *μοναδιαίο* σύνολο συναρτήσεων.

Οι πρώτες σφαιρικές αρμονικές $Y_n^m(\theta, \varphi)$ είναι

$n = 0$ $\quad Y_0^0 = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$n = 1$ $\quad Y_1^0 = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_1^1 = -\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}$

$n = 2$ $\quad Y_2^0 = \sqrt{\dfrac{5}{4\pi}}\left(\dfrac{3}{2}\cos^2\theta - \dfrac{1}{2}\right) \qquad Y_2^1 = -\sqrt{\dfrac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi}$

$\quad Y_2^2 = \sqrt{\dfrac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta\, e^{2i\varphi}$

$n = 3$ $\quad Y_3^0 = \sqrt{\dfrac{7}{4\pi}}\left(\dfrac{5}{2}\cos^3\theta - \dfrac{3}{2}\cos\theta\right) \qquad Y_3^1 = -\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{21}{4\pi}}\sin\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right)e^{i\varphi}$

$\quad Y_3^2 = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{105}{2\pi}}\sin^2\theta\cos\theta\, e^{i\varphi} \qquad Y_3^3 = -\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{35}{4\pi}}\sin^3\theta\, e^{3i\varphi}$

Για $m < 0$ οι σφαιρικές αρμονικές προκύπτουν από τη σχέση

$$Y_n^{-m}(\theta,\varphi) = (-1)^m Y_n^{m}{}^*(\theta,\varphi)$$

Το θεώρημα πρόσθεσης σφαιρικών αρμονικών

Σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) ένα ζεύγος τιμών των θ και φ ορίζει μία κατεύθυνση στο χώρο. Δύο ζεύγη τιμών (θ_1, φ_1) και (θ_2, φ_2) ορίζουν δύο κατευθύνσεις και μία μεταξύ τους γωνία γ, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\cos\gamma = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Γενικότερα, το *θεώρημα πρόσθεσης σφαιρικών αρμονικών* εκφράζεται με τη σχέση

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n} Y_n^m(\theta_1,\varphi_1) Y_n^{m}{}^*(\theta_2,\varphi_2)$$

Ανάπτυγμα συναρτήσεων

Κάθε συνάρτηση $f(\theta, \varphi)$, ορισμένη στην επιφάνεια μιας σφαίρας και αρκετά παραγωγίσιμη και συνεχής, μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά σφαιρικών αρμονικών σύμφωνα με τον τύπο

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi)$$

όπου ($d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$)???

$$A_{nm} = \int f(\theta, \varphi) Y_n^{m*}(\theta, \varphi) \, d\Omega$$

18 ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

18.1 Ορθογώνια Σύνολα Συναρτήσεων

Ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων

Θεωρούμε δύο πραγματικές συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ ορισμένες, διαφορετικές και όχι ταυτοτικά μηδέν, σε ένα διάστημα (a, b), εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων. Αν

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

τότε οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ καλούνται *ορθογώνιες* στο (a, b).

Αν $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, είναι ένα σύνολο πραγματικών συναρτήσεων τέτοιο ώστε

$$\int_a^b u_i(x)u_j(x)\,dx = \delta_{ij}$$

τότε το σύνολο $\{u_i\}$ καλείται *ορθογώνιο* και *κανονικό* ή απλά *ορθοκανονικό* στο διάστημα (a, b). Το σύμβολο του Kronecker δ_{ij} ισούται πάντα με 0 για $i \neq j$ και με 1 για $i = j$. Αν οι συναρτήσεις u_i είναι μιγαδικές, ισχύουν τα ίδια αλλά με $u_j{}^*$ αντί u_j στο προηγούμενο ολοκλήρωμα.

Αν το ολοκλήρωμα έχει τη γενικότερη μορφή

$$\int_a^b u_i(x)u_j(x)w(x)\,dx = \delta_{ij}$$

τότε το σύνολο $\{u_i\}$ καλείται *ορθογώνιο* και *κανονικό* ή απλά *ορθοκανονικό* στο διάστημα (a, b) με *συνάρτηση βάρους* $w(x)$. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο $\{[w(x)]^{1/2}u_i\}$ είναι ορθοκανονικό.

Πλήρες ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων

Δεδομένου ενός ορθοκανονικού συνόλου συναρτήσεων $\{u_i\}$ και μιας *τετραγωνικά ολοκληρώσιμης* συνάρτησης $f(x)$ (δηλαδή συνάρτησης για την οποία το $\int_a^b |f(x)|^2\,dx$ υπάρχει) υπολογίζουμε τους *γενικευμένους συντελεστές Fourier*

$$c_i = \int_a^b f(x)u_i(x)\,dx$$

και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_M(x) = \sum_{i=1}^{M} c_i u_i(x)$$

όπου M ακέραιος θετικός αριθμός. Το άθροισμα S_M προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x)$ με *μέσο τετραγωνικό σφάλμα*

$$E_{rms} = \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - S_M(x)]^2\, dx\right]^{1/2}$$

το οποίο (με δεδομένες τις u_i και το M) είναι το ελάχιστο δυνατό από οποιαδήποτε άλλη επιλογή των c_i.

Αν $E_{rms} \to 0$ όταν $M \to \infty$, τότε λέμε ότι έχουμε *μέση σύγκλιση του* $S_M(x)$ *στην* $f(x)$ και γράφουμε l.i.m.$S_M = f(x)$. Αν αυτό συμβαίνει για κάθε συνάρτηση $f(x)$ [τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο (a, b)], τότε το σύνολο $\{u_i\}$ καλείται *πλήρες*.

Στην περίπτωση μέσης σύγκλισης είναι

$$\int_a^b [f(x)]^2\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{\,2} \quad \text{[ταυτότητα του Parseval]}$$

Ανάπτυγμα σε σειρά ορθοκανονικών συναρτήσεων

Συχνά, απλοποιώντας καταχρηστικά το συμβολισμό, γράφουμε το ανάπτυγμα

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x)$$

εννοώντας μέση σύγκλιση. Επίσης, αρκούμεθα σε γενικότερες συνθήκες τμηματικής συνέχειας και παραγωγισιμότητας για την $f(x)$, οι οποίες είναι ικανές αλλά όχι και αναγκαίες για μέση σύγκλιση. Οι συνθήκες αυτές πληρούνται συνήθως από συναρτήσεις που απαντώνται στις εφαρμογές, με κυριότερη διόρθωση ότι στα σημεία ασυνέχειας το ανάπτυγμα δίνει την $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ αντί της $f(x)$.

Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt

Δεδομένου ενός αριθμήσιμου (πεπερασμένου ή άπειρου) συνόλου γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων $\{\varphi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, κατασκευάζουμε ένα σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων $\{u_i\}$ με τους τύπους ($i = 1, 2, \ldots$)

$$\chi_1(x) = \varphi_1(x), \qquad u_i(x) = \frac{\chi_i(x)}{\sqrt{(\chi_i, \chi_i)}}, \qquad \chi_{i+1}(x) = \varphi_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^{i} (u_k, \varphi_{i+1}) u_k(x)$$

όπου $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$ είναι το *εσωτερικό γινόμενο* των $f(x)$ και $g(x)$.

18.2 Ορθογώνιες Συναρτήσεις από ΣΔΕ

Συχνά ένα φυσικό πρόβλημα οδηγεί σε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (ΜΔΕ) και μετά από χωρισμό των μεταβλητών σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) της μορφής

$$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0$$

σε κάποιο διάστημα (a, b), όπου η σταθερή λ προκύπτει από το χωρισμό της ΜΔΕ. Αυτή η ΣΔΕ, μαζί με τις *συνοριακές συνθήκες* που πρέπει να ικανοποιούν οι $y(x)$ και $y'(x)$ συνήθως στα άκρα του $[a, b]$, συνιστούν ένα *σύστημα Sturm-Liouville.* Λόγω των συνοριακών και άλλων συνθηκών, λύσεις $y(x)$ υπάρχουν μόνο για ορισμένες τιμές της λ, που καλούνται *ιδιοτιμές.* Οι αντίστοιχες λύσεις $y(x)$ καλούνται *ιδιοσυναρτήσεις*. Συνήθως σε κάθε τιμή του λ αντιστοιχεί μία ιδιοσυνάρτηση, αλλά μερικές φορές και περισσότερες.

Αν οι $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ και οι τιμές των $y(x)$, $y'(x)$ στα άκρα $x = a$, $x = b$ είναι πραγματικές και $r(x) \geq 0$ στο (a, b), τότε (α) οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και (β) οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές συνιστούν ένα ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων με συνάρτηση βάρους $r(x)$.???

Ορθογώνια πολυώνυμα από ΣΔΕ

Μερικά ορθογώνια σύνολα συναρτήσεων που προκύπτουν από ΣΔΕ περιλαμβάνουν απλές και εύχρηστες συναρτήσεις, όπως ημίτονα και συνημίτονα (που οδηγούν στις σειρές Fourier) και πολυώνυμα (ενδεχομένως σε συνδυασμό με άλλες στοιχειώδεις συναρτήσεις). Ο παρακάτω πίνακας δίνει τους συντελεστές της ΣΔΕ $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, τη συνάρτηση βάρους $w(x)$, τη σταθερή λ και το διάστημα (a, b).

Πολυώνυμα *	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$	$w(x)$	λ	(a, b)
Legendre, $P_n(x)$	$1-x^2$	0	1	1	$n(n+1)$	$(-1, 1)$
Προσαρτημένες Legendre, $P_n^m(x)$	$1-x^2$	$\dfrac{-m^2}{1-x^2}$	1	1	$n(n+1)$	$(-1, 1)$
Hermite, $H_n(x)$	$\exp(-x^2)$	0	$\exp(-x^2)$	$\exp(-x^2)$	$2n$	$(-\infty, \infty)$
Laguerre, $L_n(x)$	xe^{-x}	0	e^{-x}	e^{-x}	n	$(0, \infty)$
Προσαρτημένα Laguerre, $L_n^m(x)$	$x^{m+1}e^{-x}$	0	$x^m e^{-x}$	$x^m e^{-x}$	$n-m$	$(0, \infty)$
Chebyshev I, $T_n(x)$	$(1-x^2)^{1/2}$	0	$(1-x^2)^{-1/2}$	$(1-x^2)^{-1/2}$	n^2	$(-1, 1)$
Chebyshev II, $U_n(x)$	$(1-x^2)^{3/2}$	0	$(1-x^2)^{1/2}$	$(1-x^2)^{1/2}$	$n(n+2)$	$(-1, 1)$

* Όλα είναι πολυώνυμα εκτός από τις $P_n^m(x)$ για m περιττό.

18.3 Πολυώνυμα Hermite

Βασικές σχέσεις

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ η *διαφορική εξίσωση Hermite*

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

ικανοποιείται από τα *πολυώνυμα Hermite*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \qquad \text{(τύπος του Rodrigues)}$$

Γεννήτρια συνάρτηση

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$$

Πρώτα πολυώνυμα

$H_0(x) = 1$

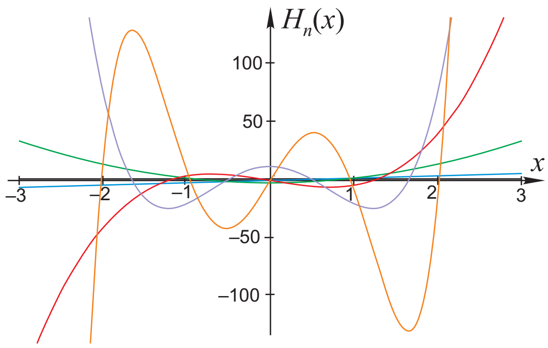
$H_1(x) = 2x$

$H_2(x) = 4x^2 - 2$

$H_3(x) = 8x^3 - 12x$

$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$



Σχ. 18-1: n 0 1 2 3 4 5

$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$

$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$

$H_8(x) = 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$

$$H_n(x) = 2^n x^n - 2^{n-1}\binom{n}{2}x^{n-2} + 2^{n-2}\cdot 1\cdot 3\cdot\binom{n}{4}x^{n-4} - 2^{n-3}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\binom{n}{6}x^{n-6} + \cdots$$

Ιδιότητες

Αναδρομικές σχέσεις

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

Ορθογωνιότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$$

Άλλες ιδιότητες

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} - \cdots$$

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \qquad H_{2n+1}(0) = 0$$

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

$$\int_0^x H_n(t)\, dt = \frac{H_{n+1}(x)}{2(n+1)} - \frac{H_{n+1}(0)}{2(n+1)}$$

$$\frac{d}{dx}\{e^{-x^2} H_n(x)\} = -e^{-x^2} H_{n+1}(x)$$

$$\int_0^x e^{-t^2} H_n(t)\, dt = H_{n-1}(0) - e^{-x^2} H_{n-1}(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} H_n(x)\, dx = 2^n \sqrt{\pi}\, y^n$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-t^2} H_n(xt)\, dt = \sqrt{\pi} n! P_n(x)$$

$$H_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n/2}} \binom{n}{k} H_k(x\sqrt{2}) H_{n-k}(y\sqrt{2})$$

[*Αθροιστικός τύπος* για τα πολυώνυμα Hermite]

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{H_k(x) H_k(y)}{2^k k!} = \frac{H_{n+1}(x) H_n(y) - H_n(x) H_{n+1}(y)}{2^{n+1} n! (x-y)}$$

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x+it)^n e^{-t^2} dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp[-(x-a)^2]\,dx = (2i)^{-n}\sqrt{\pi}H_n(ia)$$

Αναπτύγματα σε σειρά

$$f(x) = A_0H_0(x) + A_1H_1(x) + A_2H_2(x) + \cdots$$

όπου

$$A_k = \frac{1}{2^k k!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)H_k(x)\,dx$$

$$\sin 2x = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}H_{2k+1}(x)$$

$$\cos 2x = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}H_{2k}(x)$$

$$\sinh 2x = e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}H_{2k+1}(x)$$

$$\cosh 2x = e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}H_{2k}(x)$$

18.4 Πολυώνυμα Laguerre

Βασικές σχέσεις

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ η *διαφορική εξίσωση του Laguerre*

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

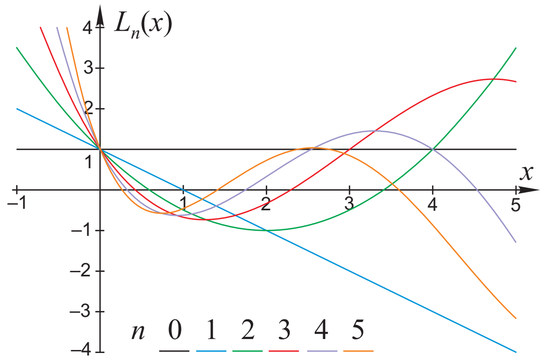
ικανοποιείται από τα *πολυώνυμα Laguerre*

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) \qquad \text{(τύπος του Rodrigues)}$$

Γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{\exp[-xt/(1-t)]}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

Πρώτα πολυώνυμα



Σχ. 18-2

$L_0(x) = 1$

$L_1(x) = (- x + 1$

$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$

$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$

$$L_4(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$$

$$L_5(x) = \frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120)$$

$$L_6(x) = \frac{1}{720}(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720)$$

$$L_7(x) = \frac{1}{5040}(-x^7 + 49x^6 - 882x^5 + 7350x^4 - 29400x^3 + 52920x^2 - 35280x + 5040)$$

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\left\{x^n - \frac{n^2 x^{n-1}}{1!} + \frac{n^2(n-1)^2 x^{n-2}}{2!} - \cdots + (-1)^n n!\right\}$$

Ιδιότητες

Αναδρομικές σχέσεις

$$(n + 1)L_{n+1}(x) - (2n + 1 - x)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

$$L'_{n+1}(x) - L'_n(x) + L_n(x) = 0$$

$$xL'_n(x) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

Ορθογωνιότητα

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, dx = \delta_{mn}$$

Άλλες ιδιότητες

$$L_n(0) = 1$$

$$\int_0^x L_n(t)\, dt = L_n(x) - L_{n+1}(x)$$

$$\int_0^\infty x^p e^{-x} L_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & p < n \\ (-1)^n n!, & p = n \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n} L_k(x)L_k(y) = \frac{n+1}{x-y}[L_n(x)L_{n+1}(y) - L_{n+1}(x)L_n(y)]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k L_k(x)}{k!} = e^t J_0(2\sqrt{xt})$$

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty u^n e^{x-u} J_0(2\sqrt{xu})\,du$$

Αναπτύγματα σε σειρά

$$f(x) = A_0L_0(x) + A_1L_1(x) + A_2L_2(x) + \cdots$$

$$A_k = \int_0^\infty e^{-x} f(x) L_k(x)\,dx$$

18.5 Προσαρτημένα Πολυώνυμα Laguerre

Βασικές σχέσεις

Για m και n μη αρνητικούς ακέραιους η *προσαρτημένη διαφορική εξίσωση του Laguerre*

$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$$

ικανοποιείται από τα *προσαρτημένα πολυώνυμα Laguerre*

$$L_n^m(x) = \frac{e^x x^{-m}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+m}) \qquad \text{(τύπος του Rodriques)}$$

Είναι

$$L_n^m(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} L_{n+m}(x)$$

όπου $L_n(x)$ είναι τα πολυώνυμα Laguerre με

$$L_n^{\,0}(x) = L_n(x) \quad \text{και} \quad L_n^{\,m}(x) = 0, \ \text{αν } m > n.$$

Γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{\exp[-xt/(1-t)]}{(1-t)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^m(x)t^n$$

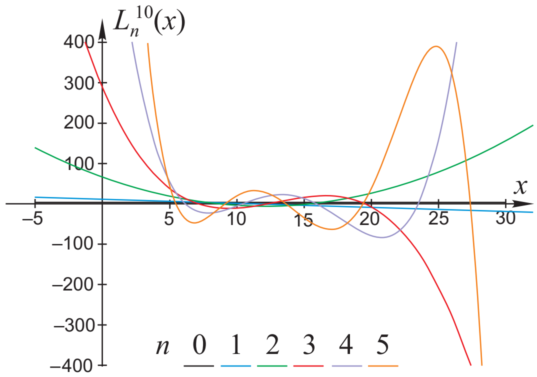
όπου $|t| < 1$.

Πρώτα πολυώνυμα

$L_0^m(x) = 1 \quad (m = 0)$

$L_1^m(x) = -x + m + 1 \quad (m = 0, 1)$

$$L_2^m(x) = \tfrac{1}{2}[x^2 - 2(m+2)x + (m+2)(m+1)] \quad (m = 0, 1, 2)$$



Σχ. 18-3

$$L_3^m(x) = -\tfrac{1}{6}[x^3 - 3(m+3)x^2 + 3(m+2)(m+3)x - (m+1)(m+2)(m+3)] \quad (m = 0, 1, 2, 3)$$

$$L_n^m(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(n+m)!}{(n-k)!(k+m)!k!} x^k \qquad (m \le n)$$

Ιδιότητες

Αναδρομικές σχέσεις

$$(n+1)L_{n+1}^m(x) - (2n+m+1-x)L_n^m(x) + (n+m)L_{n-1}^m(x) = 0$$

$$L_n^m(x) - L_{n-1}^m(x) - L_n^{m-1}(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}L_{n+1}^m(x) - \frac{d}{dx}L_n^m(x) + L_n^m(x) = 0$$

$$x\frac{d}{dx}L_n^m(x) - nL_n^m(x) + (n+m)L_{n-1}^m(x) = 0$$

Ορθογωνιότητα

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-x} L_n^m(x) L_p^m(x)\, dx = \frac{(n+m)!}{n!}\delta_{np}$$

Άλλες ιδιότητες

$$\int_0^{\infty} x^{m+1} e^{-x} \{L_n^m(x)\}^2\, dx = \frac{(2n+m+1)(n+m)!}{n!}$$

Αναπτύγματα σε σειρά

$$f(x) = A_0^{(m)} L_0^{m}(x) + A_1^{(m)} L_1^{m}(x) + A_2^{(m)} L_2^{m}(x) + \cdots$$

$$A_k^{(m)} = \frac{k!}{(k+m)!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^m L_k^m(x) f(x)\, dx$$

18.6 Πολυώνυμα Chebyshev

Βασικές σχέσεις

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ η *διαφορική εξίσωση του Chebyshev*

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

ικανοποιείται από τα *πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους*

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$$

και τις συναρτήσεις $(1 - x^2)^{1/2} U_{n-1}(x)$, όπου

$$U_n(x) = \sin(n \cos^{-1} x)$$

είναι τα πολυώνυμα Chebyshev δεύτερου είδους.

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης του Chebyshev είναι

$$y = \begin{cases} c_1 T_n(x) + c_2 \sqrt{1 - x^2}\, U_{n-1}(x), & n = 1, 2, 3, \ldots \\ c_1 + c_2 \sin^{-1} x, & n = 0 \end{cases}$$

όπου $U_n(x)$ είναι τα *πολυώνυμα Chebyshev δεύτερου είδους.*

Οι τύποι του Rodrigues που δίνουν τα πολυώνυμα Chebyshev είναι

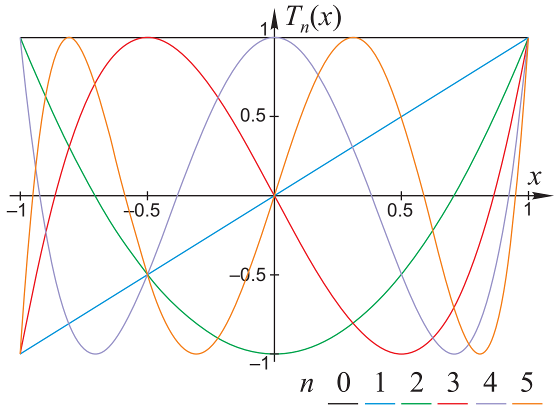
$$T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} \sqrt{1 - x^2}\, \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{(1 - x^2)^n}{\sqrt{1 - x^2}} \right]$$

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n (n+1)!}{(2n+1)! \sqrt{1 - x^2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[\sqrt{1 - x^2}\, (1 - x^2)^n \right]$$

18.7 Πολυώνυμα Chebyshev Πρώτου Είδους

Γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n$$



Σχ. 18-4

Πρώτα πολυώνυμα

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

Ιδιότητες

Αναδρομικές σχέσεις

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$

$$(1 - x^2)T_n'(x) + nxT_n(x) - nT_{n-1}(x) = 0$$

Ορθογωνιότητα

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \qquad m \neq n$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\{T_n(x)\}^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & n = 0 \\ \pi/2, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Τιμές

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

$T_{2n}(0) = (-1)^n$ $\qquad$ $T_{2n+1}(0) = 0$

$T_n(1) = 1$ $\qquad$ $T_n(-1) = (-1)^n$

Αναπτύγματα σε σειρά

$$f(x) = \tfrac{1}{2}A_0T_0(x) + A_1T_1(x) + A_2T_2(x) + \cdots$$

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

18.8 Πολυώνυμα Chebyshev Δεύτερου Είδους

Διαφορική εξίσωση

Τα πολυώνυμα $U_n(x)$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n + 2)y = 0$$

Γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n$$

Πρώτα πολυώνυμα

$U_0(x) = 1$

$U_1(x) = 2x$

$U_2(x) = 4x^2 - 1$

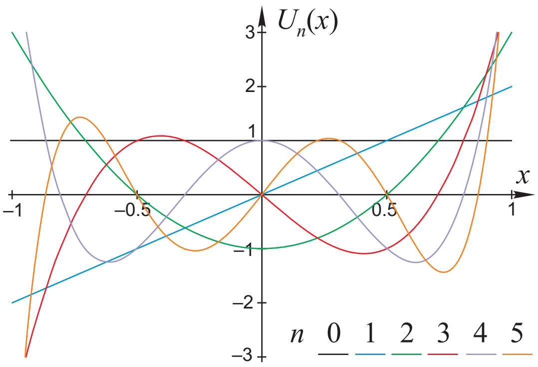
$U_3(x) = 8x^3 - 4x$

$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$

$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$

$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$

$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$



Σχ. 18-5

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}, \qquad n \geq 1$$

Ιδιότητες

Αναδρομικές σχέσεις

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$$

$$(1-x^2)U_n'(x) + nxU_n(x) - (n+1)U_{n-1}(x) = 0$$

Ορθογωνιότητα

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}$$

Τιμές

$$U_n(-x) = (-1)^n U_n(x)$$

$$U_{2n}(0) = (-1)^n \qquad U_{2n+1}(0) = 0$$

$$U_n(1) = n+1 \qquad U_n(-1) = (-1)^n(n+1)$$

Αναπτύγματα σε σειρά

$$f(x) = A_0U_0(x) + A_1U_1(x) + A_2U_2(x) + \cdots$$

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,f(x)U_k(x)dx$$

Σχέσεις μεταξύ πολυωνύμων Chebyshev

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$$

$$(1-x^2)U_n(x) = xT_{n+1}(x) - T_{n+2}(x)$$

$$T_n{}'(x) = nU_{n-1}(x)$$

$$U_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_{n+1}(\upsilon)d\upsilon}{(\upsilon - x)\sqrt{1-\upsilon^2}}$$

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\upsilon^2}\,U_{n-1}(\upsilon)}{x-\upsilon}d\upsilon$$

19 ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

19.1 Υπεργεωμετρικές Συναρτήσεις

Διαφορικές εξισώσεις

Η *υπεργεωμετρική διαφορική εξίσωση* (ΣΔΕ του Gauss) είναι

$$x(1-x)y'' + \{c-(a+b+1)x\}y' - aby = 0$$

Αν οι c, $a-b$, και $c-a-b$ δεν είναι ακέραιοι, η γενική λύση για $|x|<1$ είναι

$$y = c_1 F(a, b, c; x) + c_2 x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x)$$

όπου $F(a, b; c; x)$ είναι η *υπεργεωμετρική συνάρτηση*

$$F(a, b, c; x) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots$$

Με a, b, c πραγματικές σταθερές, αν η σειρά έχει άπειρους όρους, συγκλίνει (ομοιόμορφα και απόλυτα) στο διάστημα $-1 < x < 1$ (γενικότερα στο μιγαδικό επίπεδο για $|z|<1$, ενώ αποκλίνει για $|z|>1$).

Για $|x|=1$ (ή $|z|=1$), η σύγκλιση εξαρτάται από την ποσότητα $s = c-(a+b)$: Αν $s \le -1$, η σειρά αποκλίνει. Αν $-1 < s \le 0$, η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκες, εκτός από $x = 1$. Αν $s > 0$, η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

Η *συμπτυγμένη υπεργεωμετρική διαφορική εξίσωση*(ΣΔΕ του Kummer)

$$xy'' + (b-x)y' - ay = 0$$

προκύπτει από την υπεργεωμετρική διαφορική εξίσωση με σύμπτυξη δύο ανώμαλων σημείων. Η γενική λύση είναι

$$y = c_1 M(a, b; x) + c_2 x^{1-c} M(a-b+1, 2-b; x)$$

όπου $M(a, b; x)$ είναι η *συμπτυγμένη υπεργεωμετρική συνάρτηση*

$$M(a, b; x) = 1 + \frac{a}{b}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

που συγκλίνει για κάθε πεπερασμένο x. Συχνά χρησιμοποιούμε τη *συνάρτηση του Whittaker* $M_{\kappa\mu}(x) = e^{-x/2}x^{\mu+1/2}M(\mu-\kappa+\frac{1}{2}, 2\mu+1; x)$, που ικανοποιεί τη ΣΔΕ

$$x^2y'' + (-\tfrac{1}{4}x^2 + \kappa x + \tfrac{1}{4} - \mu^2)y = 0$$

Σχέσεις με άλλες συναρτήσεις

Για ορισμένες τιμές των παραμέτρων οι υπεργεωμετρικές συναρτήσεις δίνουν στοιχειώδεις συναρτήσεις.

$F(-p, b; b; -x) = (1+x)^p$

$F(1,\, p,\, p;\, x) = \dfrac{1}{1-x}$

$F(1, 1, 2; -x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$F\left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}; x^2\right) = \dfrac{1}{2x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$F(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; \sin^2 x) = \cos x$

$F(\tfrac{1}{2}, 1, 1; \sin^2 x) = \dfrac{1}{\cos x}$

$F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; x^2\right) = \dfrac{\sin^{-1} x}{x}$

$F\left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}; -x^2\right) = \dfrac{\tan^{-1} x}{x}$

$F\left(a, a+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; x^2\right) = \tfrac{1}{2}[(1+x)^{-2a} + (1-x)^{-2a}]$

$\lim_{n\to\infty} F\left(1, n, 1; \dfrac{x}{n}\right) = e^x$

$F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; -x^2\right) = \dfrac{1}{x}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$F\left(n+1, -n, 1; \dfrac{1-x}{2}\right) = P_n(x)$

$F\left(n, -n, \tfrac{1}{2}; \dfrac{1-x}{2}\right) = T_n(x)$

$F\left(n+2, -n, \tfrac{3}{2}; \dfrac{1-x}{2}\right) = \dfrac{1}{n+1}U_n(x)$

$$F\left(-n, n+2\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}; \dfrac{1-x}{2}\right) = \dfrac{n!}{(2a)(2\alpha+1)(2\alpha+2)\cdots(2\alpha+n-1)}C_n^{(\alpha)}(x)$$

[$C_n^{(\alpha)}(x)$ είναι τα πολυώνυμα Gegenbauer]

$$F\left(-n, \alpha+\beta+n+1, \alpha+1; \dfrac{1-x}{2}\right) = \dfrac{n!}{(a+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+n)}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

[$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ είναι τα πολυώνυμα Jacobi]

$M(-n, m+1; x) = L_n(x)$

$M(-n, m+1; x) = \dfrac{n!m!}{(n+m)!}L_n^m(x)$

$M\left(-n, \tfrac{1}{2}; x^2\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{(2n)!}H_{2n}(x)$

$M\left(-n, \tfrac{3}{2}; x^2\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{2(2n+1)!}H_{2n+1}(x)$

$M\left(n+\tfrac{1}{2}, 2n+1; 2ix\right) = \dfrac{2^n n! e^{ix}}{x^n}J_n(x)$

$M\left(n+\tfrac{1}{2}, 2n+1; 2x\right) = \dfrac{2^n n! e^{x}}{x^n}I_n(x)$

$M\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; -x^2\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x}\operatorname{erf}(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x}\int_0^x e^{-t^2}dt$

Ιδιότητες

$$F(a,\,b,\,c;\,1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\qquad (c\neq 0,-1,-2,\,\ldots,\;\; c-a-b>0)$$

$$F(a,\,b,\,c;\,x)=(1-x)^{c-a-b}F(c-a,\,c-b;\,c;\,x)$$

$$F(a,\,b,\,c;\,x)=(1-x)^{-a}F\left(a,\,c-b,\,c;\,\frac{-x}{1-x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}F(a,\,b,\,c;\,x)=\frac{ab}{c}F(a+1,\,b+1;\,c+1;\,x)$$

$$F(a,\,b,\,c;\,x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-ux)^{-a}\,du$$

$$M(a,\,b,\,x)=e^{x}M(b-a,\,b;\,-x)$$

$$M(a,\,b;\,x)=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^1 e^{xu}u^{a-1}(1-u)^{b-a-1}du,\qquad b>a>0$$

19.2 Ελλειπτικές Συναρτήσεις

Ελειπτικά ολοκληρώματα

Το *ελλιπές ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους* είναι

$$u=F(k,\,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^{x}\frac{d\upsilon}{\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k^2\upsilon^2)}}$$

όπου $\varphi=\mathrm{am}u$ είναι το *πλάτος* της u και $x=\sin\varphi$. Εδώ και παρακάτω υποθέτουμε ότι $0<k<1$.

Το *πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους* είναι

$$K=F(k,\,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^{1}\frac{d\upsilon}{\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k^2\upsilon^2)}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\cdots\right\}$$

Το *ελλιπές ελλειπτικό ολοκλήρωμα δεύτερου είδους* είναι

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{x}\frac{\sqrt{1-k^2v^2}}{\sqrt{1-v^2}}\,dv$$

Το *πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα δεύτερου είδους* είναι

$$E=E(k,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{1}\frac{\sqrt{1-k^2v^2}}{\sqrt{1-v^2}}\,dv$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^3}{3}-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{k^6}{5}-\cdots\right\}$$

Το *ελλιπές ελλειπτικό ολοκλήρωμα τρίτου είδους* είναι

$$\Pi(k,n,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^{x}\frac{d\theta}{(1+nv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$$

Το *πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα τρίτου είδους* είναι

$$\Pi(k,n,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^{1}\frac{d\theta}{(1+nv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$$

Ελλειπτικές συναρτήσεις

Οι *ελλειπτικές συναρτήσεις* sn$u$, cn$u$, dn$u$ ορίζονται με τις σχέσεις

$$\mathrm{sn}u=x=\sin\varphi=\sin(\mathrm{am}u)$$

$$\mathrm{cn}\,u=\sqrt{1-x^2}=\cos\varphi=\cos(\mathrm{am}\,u)$$

$$\mathrm{dn}\,u=\sqrt{1-k^2x^2}=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2u}$$

Μπορούμε ακόμα να ορίσουμε τις αντίστροφες συναρτήσεις $\mathrm{sn}^{-1}x$, $\mathrm{cn}^{-1}x$, $\mathrm{dn}^{-1}x$ και τις ακόλουθες

$$\mathrm{ns}\,u=\frac{1}{\mathrm{sn}\,u}\qquad \mathrm{sc}\,u=\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\qquad \mathrm{cs}\,u=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$$

$$\mathrm{nc}\,u=\frac{1}{\mathrm{cn}\,u}\qquad \mathrm{sd}\,u=\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\qquad \mathrm{dc}\,u=\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$$

$$\mathrm{nd}\,u=\frac{1}{\mathrm{dn}\,u}\qquad \mathrm{cd}\,u=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\qquad \mathrm{ds}\,u=\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$$

Τύποι αθροίσματος

$$\mathrm{sn}(u+\upsilon)=\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,\upsilon\,\mathrm{dn}\,\upsilon+\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,\upsilon\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2\upsilon}$$

$$\mathrm{cn}(u+\upsilon)=\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,\upsilon-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,\upsilon\,\mathrm{dn}\,u\,dn\,\upsilon}{1-k^2\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2\upsilon}$$

$$\mathrm{dn}(u+\upsilon)=\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,\upsilon-k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,\upsilon\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,\upsilon}{1-k^2\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2\upsilon}$$

Παράγωγοι

$$\frac{d}{du}\mathrm{sn}\,u=\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u \qquad \frac{d}{du}\mathrm{dn}\,u=-k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u$$

$$\frac{d}{du}\mathrm{sn}\,u=-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u \qquad \frac{d}{du}\mathrm{sc}\,u=\mathrm{dc}\,u\,\mathrm{nc}\,u$$

Σειρές

$$\mathrm{sn}\,u=u-(1+k^2)\frac{u^3}{3!}+(1+14k^2+k^4)\frac{u^5}{5!}-(1+135k^2+135k^4+k^6)\frac{u^7}{7!}+\cdots$$

$$\mathrm{cn}\,u=u-(1+k^2)\frac{u^3}{3!}+(1+4k^2)\frac{u^4}{4!}-(1+44k^2+16k^4)\frac{u^6}{6!}+\cdots$$

$$\mathrm{dn}\,u=1-k^2\frac{u^2}{2!}+k^2(4+k^2)\frac{u^4}{4!}-k^2(16+44k^2+k^4)\frac{u^6}{6!}+\cdots$$

Σταθερή του Catalan

$$\frac{1}{2}\int_0^1 K\,dk=\frac{1}{2}\int_{k=0}^1\int_{\theta=0}^{\pi/2}\frac{d\theta\,dk}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots=0.915965594\ldots$$

Αν

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\ K'=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}\text{, όπου } k'=\sqrt{1-k^2}$$

τότε η sn$u$ έχει περιόδους $4K$ και $2iK'$, η cn$u$ έχει περιόδους $4K$ και $2K+2iK'$, η dn$u$ έχει περιόδους $2K$ και $4iK'$. Επίσης

$$\mathrm{sn}^2u+\mathrm{cn}^2u=1, \qquad \mathrm{dn}^2u+k^2\mathrm{sn}^2u=1, \qquad \mathrm{dn}^2u-k^2\mathrm{cn}^2u=k'^2$$

Τιμές

$\mathrm{sn}\,0 = 0 \qquad \mathrm{cn}\,0 = 1 \qquad \mathrm{dn}\,0 = 1 \qquad \mathrm{sc}\,0 = 0 \qquad \mathrm{am}\,0 = 0$

Ολοκληρώματα

$$\int \mathrm{sn}\,u\,du = \frac{1}{k}\ln(\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,u)$$

$$\int \mathrm{cn}\,u\,du = \frac{1}{k}\cos^{-1}(\mathrm{dn}\,u)$$

$$\int \mathrm{dn}\,u\,du = \sin^{-1}(\mathrm{sn}\,u)$$

$$\int \mathrm{sc}\,u\,du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln(\mathrm{dc}\,u + \sqrt{1-k^2}\,\mathrm{nc}\,u)$$

$$\int \mathrm{cs}\,u\,du = \ln(\mathrm{ns}\,u - \mathrm{ds}\,u)$$

$$\int \mathrm{cd}\,u\,du = \frac{1}{k}\ln(\mathrm{nd}\,u + k\,\mathrm{sd}\,u)$$

$$\int \mathrm{dc}\,u\,du = \ln(\mathrm{nc}\,u + \mathrm{sc}\,u)$$

$$\int \mathrm{sd}\,u\,du = \frac{-1}{k\sqrt{1-k^2}}\sin^{-1}(k\,\mathrm{cd}\,u)$$

$$\int \mathrm{ds}\,u\,du = \ln(\mathrm{ns}\,u - \mathrm{cs}\,u)$$

$$\int \mathrm{ns}\,u\,du = \ln(\mathrm{ds}\,u - \mathrm{cs}\,u)$$

$$\int \mathrm{nc}\,u\,du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\left(\mathrm{dc}\,u + \frac{\mathrm{sc}\,u}{\sqrt{1-k^2}}\right)$$

$$\int \mathrm{nd}\,u\,du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\cos^{-1}(\mathrm{cd}\,u)$$

19.3 Άλλες Συναρτήσεις

Συνάρτηση σφάλματος

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du$$

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots\right)$$

$$\mathrm{erf}(x) \sim 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots\right)$$

$\mathrm{erf}(-x) = -\,\mathrm{erf}(x), \qquad \mathrm{erf}(0) = 0, \qquad \mathrm{erf}(\#09) = 1$

Συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος

$$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2}\, du$$

$$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots \right)$$

$$\mathrm{erfc}(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} x} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots \right)$$

erfc(0) = 1, erfc(#09) = 0

Εκθετικό ολοκλήρωμα

$$Ei(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

$$Ei(x) = -\gamma - \ln x + \int_0^x \frac{1 - e^{-u}}{u}\, du$$

$$Ei(x) \sim \frac{\sim e^{-x}}{x} \left(1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \cdots \right)$$

Ei(#09) = 0

Ημιτονικό ολοκλήρωμα

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u}\, du$$

$$Si(x) = \frac{x}{1 \cdot 1!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots$$

$$Si(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\sin x}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \cdots \right) - \frac{\cos x}{x} \left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \cdots \right)$$

$Si(-x) = -Si(x)$, $Si(0) = 0$, $Si(\infty) = \pi/2$

Συνημιτονικό ολοκλήρωμα

$$Ci(x) = \int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\,du$$

$$Ci(x) = -\gamma - \ln x + \int_0^x \frac{1-\cos u}{u}\,du$$

$$Ci(x) = -\gamma - \ln x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} - \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \frac{x^6}{6\cdot 6!} - \frac{x^8}{8\cdot 8!} + \cdots$$

$$Ci(x) \sim \frac{\cos x}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \cdots\right) - \frac{\sin x}{x}\left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \cdots\right)$$

$$Ci(\infty) = 0$$

Ημιτονικό ολοκλήρωμα του Fresnel

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \sin u^2\,du$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x^3}{3\cdot 1!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \cdots\right)$$

$$S(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(\cos x^2)\left(\frac{1}{x} - \frac{1\cdot 3}{2^2 x^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4 x^9} - \cdots\right)\right.$$

$$\left. + (\sin x^2)\left(\frac{1}{2x^3} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 x^7} + \cdots\right)\right\}$$

$$S(-x) = -S(x), \qquad S(0) = 0, \qquad S(\infty) = \tfrac{1}{2}$$

Συνημιτονικό ολοκλήρωμα του Fresnel

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \cos u^2\,du$$

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \frac{x^{13}}{13\cdot 6!} + \cdots\right)$$

$$C(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(\sin x^2)\left(\frac{1}{x} - \frac{1\cdot 3}{2^2 x^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4 x^9} - \cdots\right)\right.$$

$$\left. -(\cos x^2)\left(\frac{1}{2x^3} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^3 x^7} + \cdots\right)\right\}$$

$$C(-x) = -C(x), \qquad C(0) = 0, \qquad C(\infty) = \tfrac{1}{2}$$

Συνάρτηση ζήτα του Riemann

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots$$

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{e^u - 1}\,du, \qquad x > 1$$

$$\zeta(1-x) = 2^{1-x}\pi^{-x}\Gamma(x)\cos(\pi x/2)\zeta(x)$$

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}B_k}{(2k)!}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

20 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

20.1 Το Ολοκληρωτικό Θεώρημα του Fourier

Αν (i) οι συναρτήσεις $f(t)$ και $f'(t)$ είναι τμηματικά συνεχείς σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $-L < t < L$, (ii) το $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$ συγκλίνει και (iii) η $f(t)$ ισούται με $\frac{1}{2}\{f(t+0)+f(t-0)\}$ σε κάθε σημείο ασυνέχειας, τότε

$$f(t)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t]\,d\omega$$

όπου

$$\begin{cases} A(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega u\,du \\[2ex] B(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\omega u\,du \end{cases}$$

Δύο άλλες μορφές του *θεωρήματος του Fourier* είναι η

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega(u-t)\,du\,d\omega$$

και η

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\omega u}\,du\right]d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\omega(u-t)}\,du\,d\omega \end{aligned}$$

Αν η $f(t)$ είναι περιττή συνάρτηση [δηλ. $f(-t)=-f(t)$], τότε

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(u)\sin\omega u\,du\right]\sin\omega t\,d\omega$$

Αν η $f(t)$ είναι άρτια συνάρτηση [δηλ. $f(-t)=f(t)$], τότε

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(u)\cos\omega u\,du\right]\cos\omega t\,d\omega$$

Ουσιαστικά, όλα τα προηγούμενα συνοψίζονται στο εξής: Όλη η πληροφορία που υπάρχει στο χώρο t [δηλ. στην $f(t)$] μπορεί με μια ολοκλήρωση (ως προς u) να μεταφερθεί στο χώρο ω και μετά, με μια δεύτερη ολοκλήρωση, πίσω στο χώρο t.

20.2 Μετασχηματισμένες Fourier

Η *μετασχηματισμένη Fourier* της $f(t)$ ορίζεται με τη σχέση

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

Η *αντίστροφη μετασχηματισμένη Fourier* της $F(\omega)$ ορίζεται με τη σχέση

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Οι $f(t)$ και $F(\omega)$ καλούνται *ζεύγος μετασχηματισμένων Fourier.* Η $f(t)$ αντιπροσωπεύει την πληροφορία στο χώρο του χρόνου και η $F(\omega)$ στο χώρο των συχνοτήτων (συνήθως το t παριστάνει χρόνο και το ω συχνότητα).

Ιδιότητες

Αν $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ και $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$, τότε με a και b σταθερές έχουμε

$\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = aF(\omega) + bG(\omega)$	Γραμμικότητα
$\mathcal{F}\{f(at)\} = a^{-1}F(\omega/a)$	Αλλαγή κλίμακας
$\mathcal{F}\{f(t+a)\} = e^{-ia\omega}F(\omega)$	Μετατόπιση
$\mathcal{F}\{t^n f(t)\} = (-i)^n \dfrac{d^n F}{d\omega^n}$	Πολλαπλασιασμός επί δύναμη
$\mathcal{F}\{f(t)e^{iat}\} = F(\omega - a)$	Πολλαπλασιασμός επί e^{iat}

Αν $\lim_{a\to 0} \mathcal{F}\{f(t, a)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}$, τότε $\lim_{a\to 0} f(t, a)\} = f(t)$ όπου η $f(t)$ είναι συνεχής.

Αν επιπλέον (α) υπάρχουν οι παράγωγοι $f^{(r)}(t)$ μέχρι και τάξης n της $f(t)$ για κάθε t και (β) $f^{(r)}(t) \to 0$ για $|t| \to \infty$ και κάθε $r < n$, τότε

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (-i\omega)^n F(\omega)$$

Το θεώρημα της συνέλιξης

Αν $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t-u)\, du$ είναι η *συνέλιξη* δύο συναρτήσεων $f(t)$ και $g(t)$, τότε

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}$$

δηλ. η μετασχηματισμένη της συνέλιξης ισούται με το γινόμενο των μετασχηματισμένων. Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται και στη μορφή $f * g = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)G(\omega)]$.

Ταυτότητα του Parseval

Αν $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ και $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$, τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega)\,d\omega$$

όπου αστερίσκος σαν πάνω δείκτης σημαίνει το συζυγή μιγαδικό. Ειδικότερα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$$

20.3 Ημιτονοειδής και Συνημιτονοειδής Μετασχηματισμός Fourier

Η *ημιτονοειδής μετασχηματισμένη Fourier* της $f(t)$ είναι

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$$

Η *αντίστροφη ημιτονοειδής μετασχηματισμένη Fourier* της $F_s(\omega)$ είναι

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_s(\omega)\sin\omega t\,dt$$

Η *συνημιτονοειδής μετασχηματισμένη Fourier* της $f(t)$ είναι

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$$

Η *αντίστροφη συνημιτονοειδής μετασχηματισμένη Fourier* της $F_c(\omega)$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega$$

20.4 Πίνακας Μετασχηματισμένων Fourier

Στα επόμενα δίνονται σε κάθε περίπτωση (α) η (πραγματική) συνάρτηση $f(t)$ και (β) η αντίστοιχη μετασχηματισμένη Fourier $F(\omega)$ [ή $F_s(\omega)$ ή $F_c(\omega)$]. Επίσης δίνονται οι γραφικές παραστάσεις (γ) της $f(t)$ με πράσινο, (δ) της $\mathrm{Re}\{F(\omega)\}$ με κόκκινο, (ε) της $\mathrm{Im}\{F(\omega)\}$ με μωβ. Στον οριζόντιο άξονα οι αριθμοί είναι τιμές των t και ω συγχρόνως. Στον κατακόρυφο άξονα οι αριθμοί είναι τιμές των $f(t)$ και $F(\omega)$ συγχρόνως. Έτσι φαίνονται η μορφή της $f(t)$ και η κατανομή της $F(\omega)$.

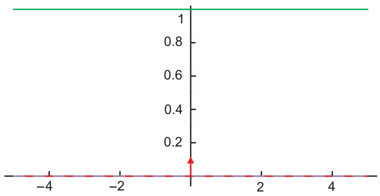
Για μερικές $f(t)$ το $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ δεν υπάρχει, αλλά η $F(\omega)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε τυπικούς (όχι αυστηρούς) υπολογισμούς.

Μετασχηματισμένες Fourier ($—f(t)$, $—\mathrm{Re}\{F(\omega)\}$, $—\mathrm{Im}\{F(\omega)\}$, $-\infty<\omega<\infty$)

$$f(t)=1$$

$$F(\omega)=\sqrt{2\pi}\,\delta(\omega)$$

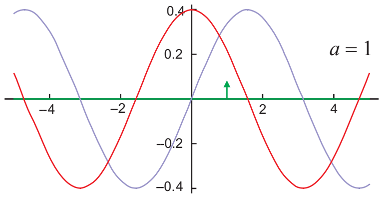
Σχ. 20-1



$$f(t)=\delta(t-a)$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ia\omega}$$

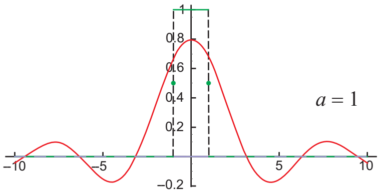
Σχ. 20-2



$$f(t)=\begin{cases}1, & |t|<a\\ 0, & |t|>a\end{cases}\qquad a>0$$

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin a\omega}{\omega}$$

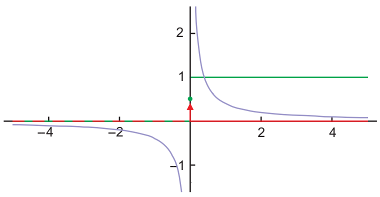
Σχ. 20-3



$$f(t)=\tfrac{1}{2}[1+\mathrm{sign}(t)]$$

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta(\omega)+\frac{i}{\sqrt{2\pi}\,\omega}$$

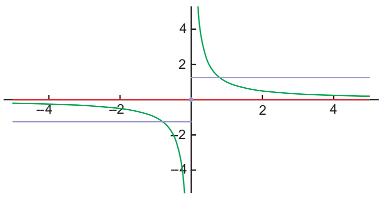
Σχ. 20-4



$$f(t)=\frac{1}{t}$$

$$F(\omega)=i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sign}(\omega)$$

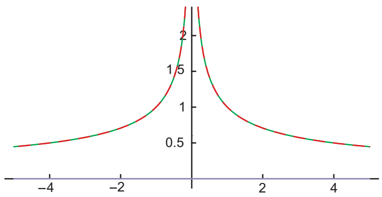
Σχ. 20-5



$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{|t|}}$$

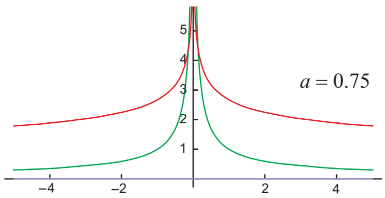
$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{|\omega|}}$$

Σχ. 20-6



$$f(t)=\frac{1}{|t|^{a}},\qquad 0<a<1$$

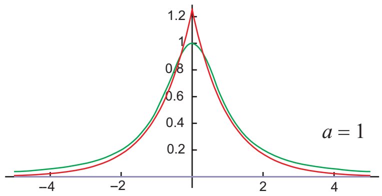
$$F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,|\,\omega\,|^{a-1}\,\Gamma(1-a)\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)$$



Σχ. 20-7

$$f(t)=\frac{1}{t^{2}+a^{2}},\qquad a>0$$

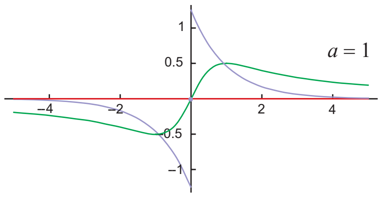
$$F(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-a|\omega|}}{a}$$



Σχ. 20-8

$$f(t)=\frac{t}{t^{2}+a^{2}},\qquad a>0$$

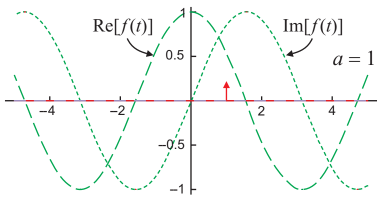
$$F(\omega)=i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sign}(\omega)\,e^{-a|\omega|}$$



Σχ. 20-9

$$f(t)=e^{iat}$$

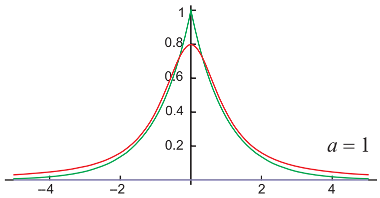
$$F(\omega)=\sqrt{2\pi}\;\delta(\omega+a)$$



Σχ. 20-10

$$f(t)=e^{-a|t|},\qquad a>0$$

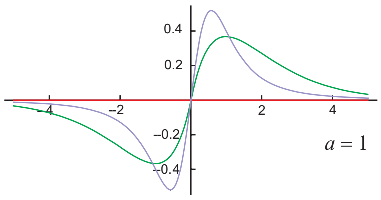
$$F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{\omega^{2}+a^{2}}$$



Σχ. 20-11

$$f(t)=t\,e^{-a|t|},\qquad a>0$$

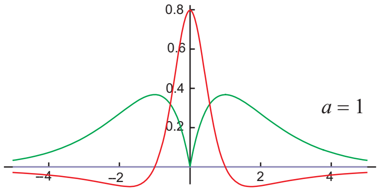
$$F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2a\omega i}{(\omega^{2}+a^{2})^{2}}$$



Σχ. 20-12

$f(t) = |t|e^{-a|t|}, \qquad a > 0$

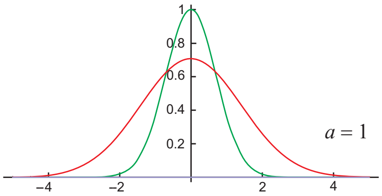
$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a^2-\omega^2}{(\omega^2+a^2)^2}$$



Σχ. 20-13

$f(t) = \exp(-at^2), \qquad a > 0$

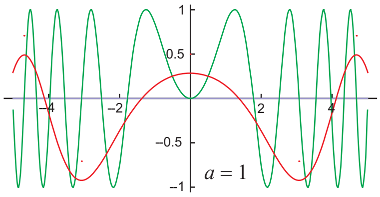
$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)$$



Σχ. 20-14

$f(t) = \sin(at^2), \qquad a > 0$

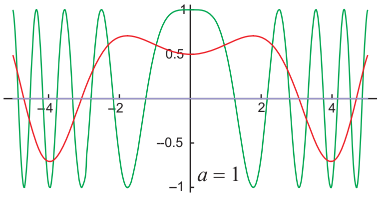
$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}+\frac{\pi}{4}\right)$$



Σχ. 20-15

$f(t) = \cos(at^2)$

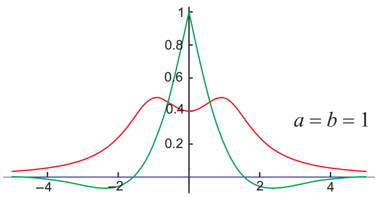
$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2|a|}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4|a|}-\frac{\pi}{4}\right)$$



Σχ. 20-16

$f(t) = e^{-a|t|}\cos bt, \qquad a > 0$

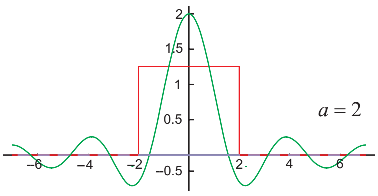
$$F(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{(\omega+b)^2+a^2}+\frac{1}{(\omega-b)^2+a^2}\right]$$



Σχ. 20-17

$f(t) = t^{-1}\sin at, \qquad a > 0$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}[1+\operatorname{sign}(a-|\omega|)]$$

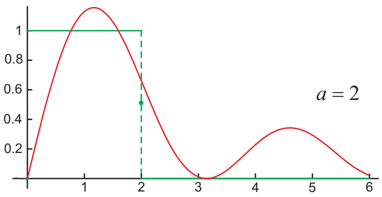


Σχ. 20-18

Ημιτονοειδείς Μετασχηματισμένες Fourier ($—f(t)$, $—F_s(\omega)$, $0<\omega<\infty$)

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<a,\\ 0, & t>a\end{cases} \qquad a>0$$

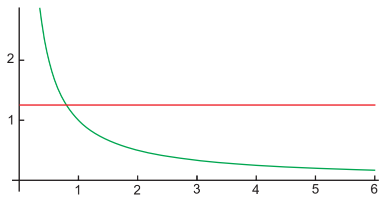
$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos a\omega}{\omega}$$



Σχ. 20-19

$$f(t)=t^{-1}$$

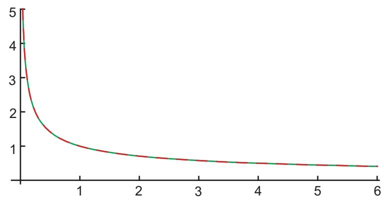
$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$



Σχ. 20-20

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$$

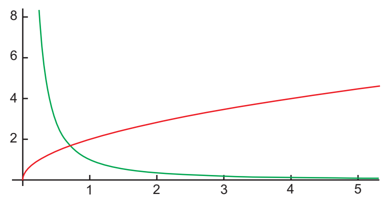
$$F_s(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$



Σχ. 20-21

$$f(t)=t^{-3/2}$$

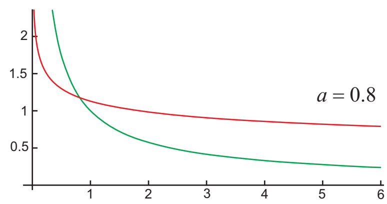
$$F_s(\omega)=2\sqrt{\omega}$$



Σχ. 20-22

$$f(t)=t^{-a}, \qquad 0<a<2$$

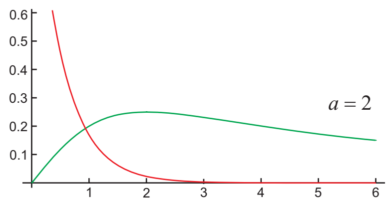
$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(1-a)\,\omega^{a-1}\cos\frac{a\pi}{2}$$



Σχ. 20-23

$$f(t)=\frac{t}{t^2+a^2}, \qquad a>0$$

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-a\omega}$$

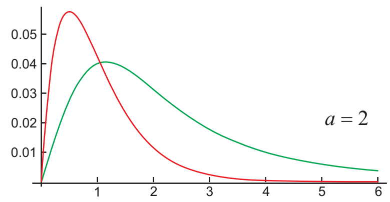


Σχ. 20-24

$$f(t) = \frac{t}{(t^2 + a^2)^2}, \qquad a > 0$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{2a} e^{-a\omega}$$

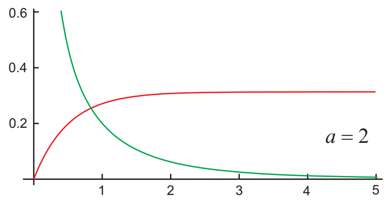
Σχ. 20-25



$$f(t) = \frac{1}{t(t^2 + a^2)}, \qquad a > 0$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{-a\omega}}{a^2}$$

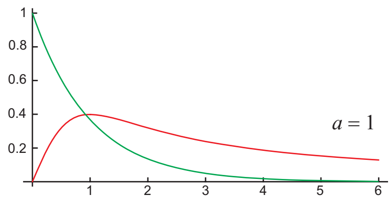
Σχ. 20-26



$$f(t) = e^{-at}, \quad a > 0$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$$

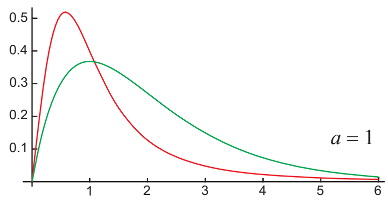
Σχ. 20-27



$$f(t) = te^{-at}, \quad a > 0$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2a\omega}{(\omega^2 + a^2)^2}$$

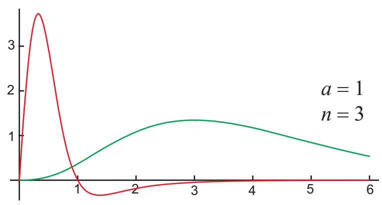
Σχ. 20-28



$$f(t) = t^n e^{-at}, \quad a > 0, \; n > -2$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(n+1) \sin[(n+1) \tan^{-1}(\omega/a)]}{(\omega^2 + a^2)^{(n+1)/2}}$$

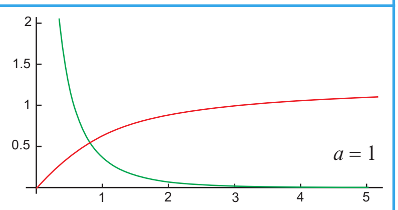
Σχ. 20-29



$$f(t) = \frac{1}{t} e^{-at}, \qquad a > 0$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

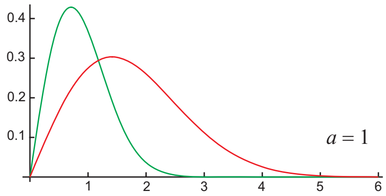
Σχ. 20-30



$$f(t) = t\exp(-at^2), \qquad a > 0$$

$$F_S(\omega) = \frac{\omega}{(2a)^{3/2}}\exp\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right)$$

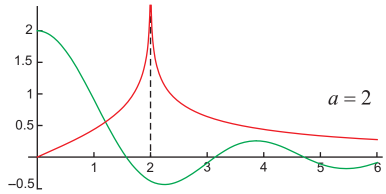
Σχ. 20-31



$$f(t) = \frac{\sin at}{t}, \qquad a > 0$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln\left|\frac{\omega + a}{\omega - a}\right|$$

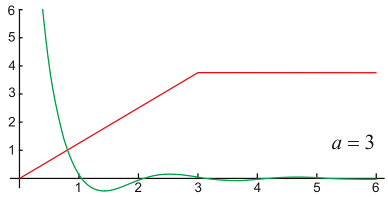
Σχ. 20-32



$$f(t) = \frac{\sin at}{t^2}, \qquad a > 0$$

$$F_s(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\pi/2}\,\omega, & \omega \le a \\ \sqrt{\pi/2}\,a, & \omega > a \end{cases}$$

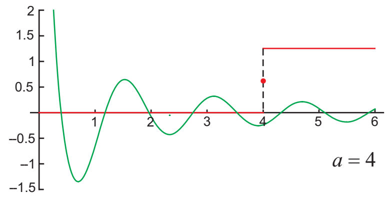
Σχ. 20-33



$$f(t) = \frac{\cos at}{t}$$

$$F_s(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < a \\ \sqrt{\pi/8}, & \omega = a \\ \sqrt{\pi/2}, & \omega > a \end{cases}$$

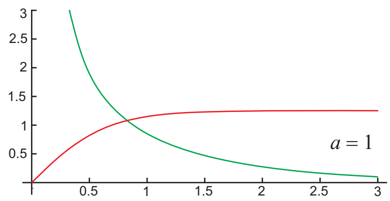
Σχ. 20-34



$$f(t) = \frac{1}{\sinh at}$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a}\tanh\frac{\pi\omega}{2a}$$

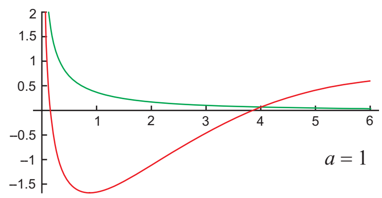
Σχ. 20-35



$$f(t) = \tan^{-1}\left(\frac{t}{a}\right), \qquad a > 0$$

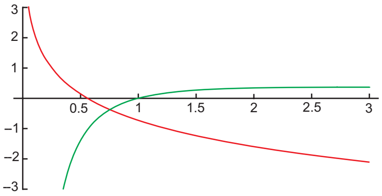
$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-a\omega}}{\omega}$$

Σχ. 20-36



$$f(t)=\frac{\ln t}{t}$$

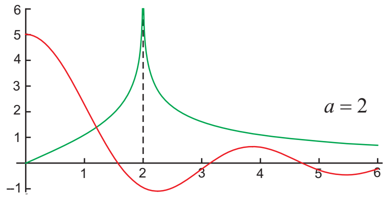
$$F_s(\omega)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\gamma+\ln\omega)$$



Σχ. 20-37

$$f(t)=\ln\left|\frac{t+a}{t-a}\right|, \qquad a>0$$

$$F_s(\omega)=\sqrt{2\pi}\,\frac{\sin a\omega}{\omega}$$



Σχ. 20-38

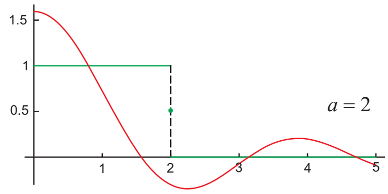
$$f(x)=\frac{1}{e^{2x}-1}$$

$$F_S(\omega)=\frac{\pi}{4}\coth\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)-\frac{1}{2\omega}$$

Συνημιτονοειδείς Μετασχηματισμένες Fourier (— $f(t)$, — $F_c(\omega)$, $0<\omega<\infty$)

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<a,\\ 0, & t>a\end{cases} \qquad a>0$$

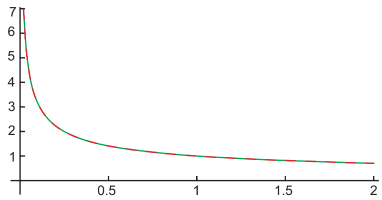
$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin a\omega}{\omega}$$



Σχ. 20-39

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$$

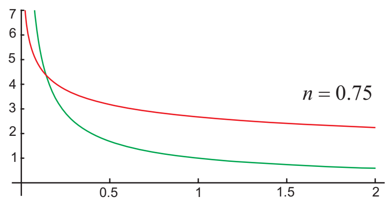
$$F_c(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$



Σχ. 20-40

$$f(t)=t^{-n}, \qquad 0<n<1$$

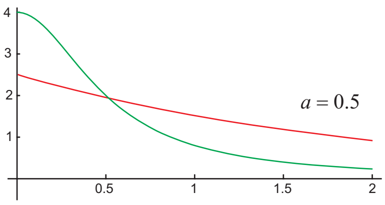
$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega^{n-1}\Gamma(1-n)\sin(n\pi/2)$$



Σχ. 20-41

$$f(t)=\frac{1}{t^2+a^2},\qquad a>0$$

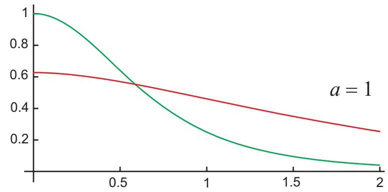
$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-a\omega}}{a}$$



Σχ. 20-42

$$f(t)=\frac{1}{(t^2+a^2)^2},\qquad a>0$$

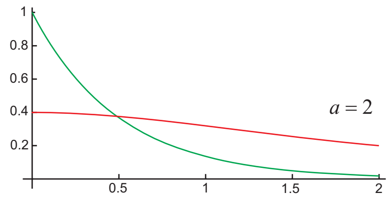
$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(1+a\omega)e^{-a\omega}}{2a^3}$$



Σχ. 20-43

$$f(t)=e^{-at},\qquad a>0$$

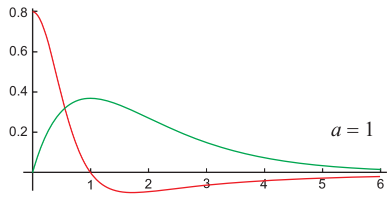
$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{\omega^2+a^2}$$



Σχ. 20-44

$$f(t)=te^{-at},\qquad a>0$$

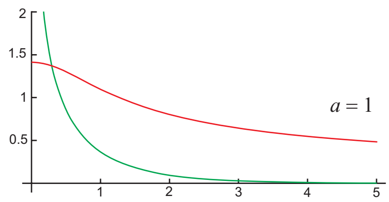
$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a^2-\omega^2}{(\omega^2+a^2)^2}$$



Σχ. 20-45

$$f(t)=\frac{e^{-at}}{\sqrt{t}},\qquad a>0$$

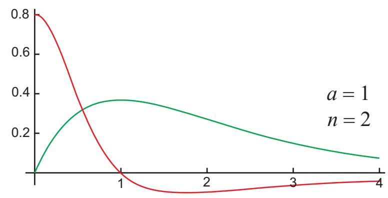
$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{a+\sqrt{\omega^2+a^2}}{\omega^2+a^2}}$$



Σχ. 20-46

$$f(t)=t^{n-1}e^{-at},\qquad a>0,\ n>0$$

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(n)\,\frac{\cos[n\tan^{-1}(\omega/a)]}{(\omega^2+a^2)^{n/2}}$$

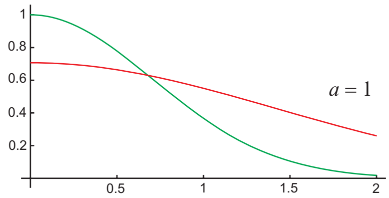


Σχ. 20-47

$$f(t) = \exp(-at^2), \qquad a > 0$$

$$F_c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right)$$

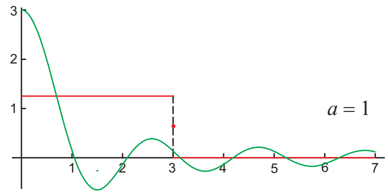
Σχ. 20-48



$$f(t) = \frac{\sin at}{t}, \qquad a > 0$$

$$F_c(\omega) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,[1 + \operatorname{sign}(a-\omega)]$$

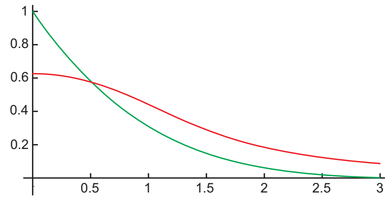
Σχ. 20-49



$$f(t) = t^{-1} e^{-t} \sin t$$

$$F_c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tan^{-1}\left(\frac{2}{\omega^2}\right)$$

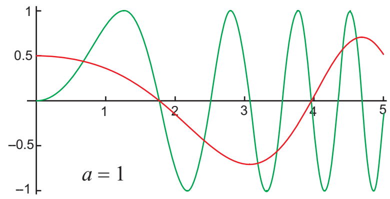
Σχ. 20-50



$$f(t) = \sin(at^2), \qquad a > 0$$

$$F_c(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\cos\frac{\omega^2}{4a} - \sin\frac{\omega^2}{4a}\right)$$

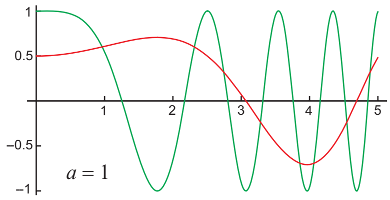
Σχ. 20-51



$$f(t) = \cos(at^2), \qquad a > 0$$

$$F_c(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\cos\frac{\omega^2}{4a} + \sin\frac{\omega^2}{4a}\right)$$

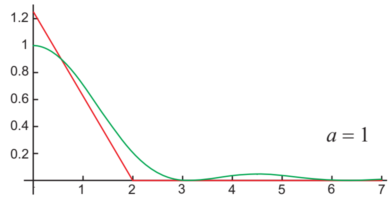
Σχ. 20-52



$$f(t) = t^{-2} \sin^2 at, \qquad a > 0$$

$$F_c(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(a - \frac{1}{2}\omega\right), & \omega < 2a \\ 0, & \omega \geq 2a \end{cases}$$

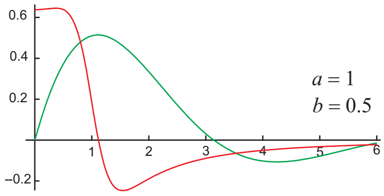
Σχ. 20-53



$$f(t) = e^{-bt}\sin at, \qquad a>0,\; b>0$$

$$F_c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{a+\omega}{b^2+(a+\omega)^2} + \frac{a-\omega}{b^2+(a-\omega)^2}\right]$$

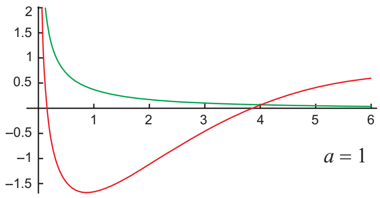
Σχ. 20-54



$$f(x) = \frac{e^{-a\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\left\{\cos(2a\sqrt{\omega}) - \sin(2a\sqrt{\omega})\right\}$$

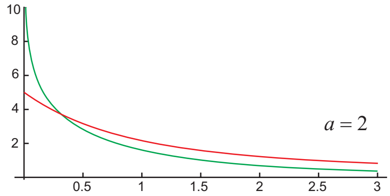
Σχ. 20-55



$$f(t) = \ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right), \qquad a>0$$

$$F_c(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\frac{1-e^{-a\omega}}{\omega}$$

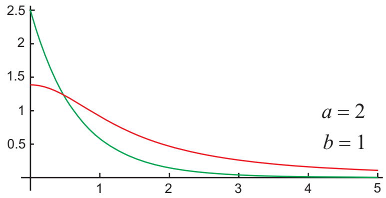
Σχ. 20-56



$$f(t) = \ln\left(\frac{a^2+t^2}{b^2+t^2}\right), \qquad a>0,\, b>0$$

$$F_c(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\frac{e^{-b\omega} - e^{-a\omega}}{\omega}$$

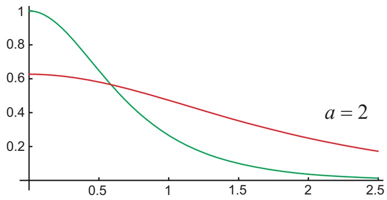
Σχ. 20-57



$$f(t) = \frac{1}{\cosh at}, \qquad a>0$$

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a\cosh(\pi\omega/2a)}$$

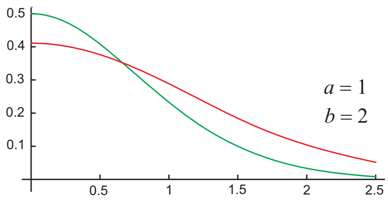
Σχ. 20-58



$$f(t) = \frac{\sinh at}{\sinh bt}, \qquad 0<a<b$$

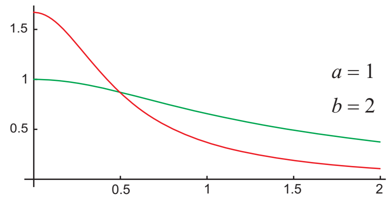
$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\sinh(\pi a/b)}{b[\cos(\pi\omega/b)+\cos(\pi a/b)]}$$

Σχ. 20-59



$$f(t) = \frac{\cosh at}{\cosh bt}, \qquad 0 < a < b$$

$$F_c(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\frac{\cos[\pi a/(2b)]\cosh[\pi\omega/(2b)]}{b[\cos(\pi\omega/b) + \cos(\pi a/b)]}$$



Σχ. 20-60