ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ — **Εαρινό Εξάμηνο 2011-12**
Τμήμα Μαθηματικών — **Διδάσκων: Χ.Κουρουνιώτης**

M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Φυλλάδιο 8

Το κριτήριο λόγου του d'Alembert.

Πρόβλημα 8.1

α′. Υπολογίστε (με το χέρι ή με κομπιουτεράκι) τους όρους της ακολουθίας $(n^2/2^n)$ για $n = 1, 2, 5, 10, 20$. Υποθέτετε ότι η ακολουθία είναι μηδενική;

β′. Επαληθεύσατε ότι ο λόγος $a_{n+1}/a_n = \frac{1}{2}(1 + 1/n)^2$.

γ′. Βρείτε έναν ακέραιο N τέτοιο ώστε, εάν $n \geq N$, τότε ο λόγος $a_{n+1}/a_n < \frac{3}{4}$.

δ′. Χρησιμοποιήστε την παρατήρηση ότι $a_{N+1} < \frac{3}{4}a_N$ και $a_{N+2} < \frac{3}{4}a_{N+1}$, κλπ., για να δείξετε ότι για κάθε n, $a_{N+n} < (\frac{3}{4})^n a_N$.

ε′. Γιατί είναι η ακολουθία $\left((\frac{3}{4})^n a_N\right)$ μηδενική;

ϛ′. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Παρεμβολής, για να δείξετε ότι η ακολουθία $(n^2/2^n)$ είναι μηδενική.

ζ′. Ποιούς αριθμούς θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αντί του $3/4$ στο (γ′), πιθανώς με διαφορετικό N, ώστε να πάρουμε πάλι απόδειξη ότι η ακολουθία είναι μηδενική;

Πρόβλημα 8.2 Εάν (a_n) είναι μία ακολουθία θετικών όρων, και

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to l < 1$$

δείξτε ότι, για αρκετά μεγάλο n, η ακολουθία (a_n) βρίσκεται μεταξύ του 0 και μίας κατάλληλα επιλεγμένης μηδενικής γεωμετρικής προόδου.
Συμπεράνατε ότι η ακολουθία (a_n) είναι μηδενική.

Πρόβλημα 8.3 Εάν (a_n) είναι ακολουθία θετικών όρων και

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to l > 1$$

δείξτε ότι, για αρκετά μεγάλα n, οι όροι της ακολουθίας είναι μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους όρους μιας κατάλληλα επιλεγμένης γεωμετρικής προόδου, η οποία τείνει στο $+\infty$.
Συμπεράνατε ότι $(a_n) \to +\infty$.

Πρόβλημα 8.4 Δώστε ένα παράδειγμα μίας μηδενικής ακολουθίας θετικών όρων (a_n) για την οποία

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to 1.$$

Δώστε επίσης ένα παράδειγμα μίας ακολουθίας θετικών όρων (a_n) που δεν συγκλίνει, για την οποία

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνθήκη πως ο λόγος των διαδοχικών όρων τείνει στο 1 δεν καθορίζει το εάν συγκλίνει η αρχική ακολουθία.

Θεώρημα Κριτήριο Λόγου του d'Alembert

Θεωρούμε μια ακολουθία (a_n) και υποθέτουμε οτι η ακολουθία $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to \ell$. Εάν

α΄. $-1 < \ell < 1$ τότε $(a_n) \to 0$.

β΄. $\ell > 1$ και $a_n > 0$ τότε $(a_n) \to \infty$.

γ΄. $\ell > 1$ και $a_n < 0$ τότε $(a_n) \to -\infty$.

δ΄. $\ell < -1$ τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει, ούτε τείνει στο $\pm\infty$.

ε΄. $\ell = \pm 1$ τότε δεν έχουμε κανένα συμπέρασμα.

Πρόβλημα 8.5 Χρησιμοποιήστε τις απαντήσεις στα προηγούμενα Προβλήματα για να αποδείξετε το Κριτήριο Λόγου του d'Alembert.

Πρόβλημα 8.6 Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

$$\left(\frac{n^2 10^n + n^3 9^n}{7^{2n} + 1}\right)$$

$$\left(\left(4^{10} + 2^n\right)^{1/n}\right)$$

$$\left(\frac{3n^3 + n\cos^2 n}{n^2 + \sin^2 n}\right)$$

$$\left(\left(3n^2 + n\right)^{1/n}\right)$$

Ακολουθίες σε διαστήματα.

Πρόβλημα 8.7 Εάν $(a_n) \to a$, $0 \le a_n$ και $a \le 0$, χρησιμοποιήστε την ανισότητα $0 \le a_n \le a_n - a$ για να δείξετε ότι $a = 0$.
Συμπεράνατε ότι, εάν $(a_n) \to a$ και $0 \le a_n$, τότε υποχρεωτικά $0 \le a$.

Πρόβλημα 8.8 Εάν $(a_n) \to a$, $(b_n) \to b$ και $a_n \le b_n$ για κάθε n, εξετάστε την ακολουθία $(b_n - a_n)$ για να δείξτε ότι $a \le b$.

Πρόβλημα 8.9 Εξετάστε τις ακολουθίες που ορίζονται από $a_n = -1/n$ και $b_n = 1/n$ για να αποδείξετε ότι, ακόμα και αν $a_n < b_n$ για όλα τα n, $(a_n) \to a$ και $(b_n) \to b$ δεν συνεπάγεται ότι $a < b$.

Θεώρημα Υποθέτουμε οτι $(a_n) \to a$ και $(b_n) \to b$. Εάν τελικά $a_n \le b_n$, τότε $a \le b$.

Πρόβλημα 8.10 Εάν $(a_n) \to a$ και $A \le a_n \le B$ για όλα τα n, αποδείξτε ότι $A \le a \le B$.
Αυτός είναι ο λόγος που ονομάζουμε το διάστημα $\{x | A \le x \le B\}$ **κλειστό**: καμία συγκλίνουσα ακολουθία μέσα στο διάστημα δεν μπορεί να έχει όριο που βρίσκεται έξω από το διάστημα.
Δώστε ένα παράδειγμα για να δείξτε ότι εάν $(a_n) \to a$ και $A < a_n < B$ για όλα τα n, δεν έπεται ότι $A < a < B$.
Το διάστημα $\{x | A < x < B\}$ ονομάζεται **ανοικτό**, γιατί μια συγκλίνουσα ακολουθία στο διάστημα μπορεί να έχει όριο έξω από το διάστημα.

Πόρισμα Υποθέτουμε οτι $(a_n) \to a$. Εάν τελικά $A \le a_n \le B$, τότε $A \le a \le B$.