# Μ2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

## Φυλλάδιο 10

# Το Αξίωμα της Πληρότητας των Πραγματικών

Είδαμε οτι κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας δεκαδικής ακολουθίας, και οτι ένας πραγματικός αριθμός είναι ρητός εάν και μόνον εάν είναι το όριο μιας αναδρομικής δεκαδικής ακολουθίας. Επεται οτι οι άρρητοι αριθμοι είναι ακριβώς τα όρια μη αναδρομικών δεκαδικών ακολουθιών.

**Πρόβλημα 10.1** Ο άπειρος δεκαδικός $0.101001000100001\ldots$ έχει 1 στις $\frac{1}{2}n(n+1)$-οστές θέσεις, και 0 στις υπόλοιπες. Μπορεί το όριό του να είναι ρητός αριθμός;

Γνωρίζουμε οτι κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας δεκαδικής ακολουθίας, η οποία είναι μοναδική εκτός εάν ο αριθμός είναι δεκαδικός, οπότε υπάρχουν δύο δεκαδικές ακολουθίες με το ίδιο όριο. Δεν γνωρίζουμε ομως εάν κάθε δεκαδική ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό. Αυτό μας το εξασφαλίζει το τελευταίο αξίωμα των πραγματικών αριθμών, το Αξίωμα της Πληρότητας.

**Αξίωμα Πληρότητας** Κάθε αύξουσα και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό.

**Παράδειγμα** Η ακολουθία $\left(-\frac{1}{n}\right)$ είναι φραγμένη και αύξουσα. Συγκλίνει με όριο 0.

Σε αυτό το παράδειγμα γνωρίζουμε ήδη το όριο της ακολουθίας. Αλλά η ισχύς του Αξιώματος Πληρότητας είναι οτι εάν μπορούμε να δείξουμε οτι μια ακολουθία είναι αύξουσα και φραγμένη, τότε γνωρίζουμε οτι η ακολουθία συγκλίνει, ακόμα και εάν δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το όριό της.

**Πρόβλημα 10.2** Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)$ που ορίζεται αναδρομικά

$$a_1 = 1 \text{ και } a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$$

1. Δείξτε με επαγωγή οτι $1 \leq a_n \leq 2$.
2. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα ${a_n}^2 - a_n - 2 = (a_n - 2)(a_n + 1)$, για να δείξετε οτι η ακολουθία είναι αύξουσα.

Συμπεραίνουμε από το Αξίωμα Πληρότητας οτι η ακολουθία $(a_n)$ συγκλίνει.

**Πρόβλημα 10.3** Εάν $(a_n)$ είναι αύξουσα ακολουθία που δεν είναι άνω φραγμένη, δείξτε οτι $(a_n) \to \infty$.

**Ορισμός** Πληρότητα Ενα υποσύνολο $X$ των πραγματικών αριθμών ονομάζεται πλήρες εάν κάθε αύξουσα και φραγμένη ακολουθία της οποίας οι όροι είναι στοιχεία του $X$ συγκλίνει σε ένα σημείο στο $X$.

Το Αξίωμα Πληρότητας λέει οτι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών είναι πλήρες.

**Πρόβλημα 10.4** Χρησιμοποιήστε τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$ για να κατασκευάσετε ακολουθίες ώστε να δείξτε οτι:

1. Το σύνολο των αρρήτων αριθμών δεν είναι πλήρες.
2. Το σύνολο των ρητών αριθμών δεν είναι πλήρες.

**Πρόβλημα 10.5** Θεωρήστε ρητούς αριθμούς $a$ και $b$, με $a < b$. Δείξτε ότι $(a+b\sqrt{2})/(1+\sqrt{2})$ δεν είναι ρητός. Δείξτε επίσης ότι $a < (a+b\sqrt{2})/(1+\sqrt{2}) < b$. Συμπεράνατε ότι υπάρχει ένας άρρητος αριθμός μεταξύ κάθε δύο διαφορετικών ρητών.

**Θεώρημα** Κάθε φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

**Πρόβλημα 10.6** Χρησιμοποιήστε το Αξίωμα Πληρότητας για να αποδείξετε το Θεώρημα.

Στην Ασκηση 9.5 δείξαμε οτι κάθε δεκαδική ακολουθία είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Αφού κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη, έπεται οτι καθε δεκαδική ακολουθία είναι αύξουσα και φραγμένη, και συνεπώς συγκλίνει.

**Θεώρημα** Κάθε δεκαδική ακολουθία συγκλίνει.

# Συνέπειες της Πληρότητας

## Φραγμένες ακολουθίες

**Ασκηση 10.7** Βρείτε ένα άνω φράγμα και ένα κάτω φράγμα για τις ακολουθίες

1. $a_n = (-1)^n$
2. $b_n = (-1)^n(1 + 1/n)$

Συγκλίνει κάποια από αυτές τις ακολουθίες; Σε κάθε περίπτωση βρείτε μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι η συγκλίνουσα υπακολουθία μονότονη;
Ξανακοιτάξτε την απόδειξή σας οτι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη, (Ασκηση 6.2). Ισχύει το αντίστροφο, οτι κάθε φραγμένη ακολουθία συγκλίνει;

**Θεώρημα Bolzano–Weierstrass** Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (ή κάθε μη-πεπερασμένο και φραγμένο υποσύνολο $E$ του $\mathbb{R}$ έχει ένα τουλάχιστον οριακό σημείο).

**Ασκηση 10.8** Αποδείξτε το Θεώρημα. (Τί γνωρίζουμε για την ύπαρξη μονότονων υπακολουθιών;)

**Πρόβλημα** Θέλουμε να δείξουμε οτι οι ρητοί αριθμοί καταλαμβάνουν ένα πολύ μικρό μέρος της ευθείας των πραγματικών. Για την ακρίβεια, θα δείξουμε οτι μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο των πραγματικών αρθμών, που αποτελείται από ανοικτά διαστήματα, με συνολικό μήκος μικρότερο από οποιονδήποτε δοθέντα θετικό αριθμό, που περιέχει όλους τους ρητούς. Θυμηθείτε οτι οι ρητοί είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο. Συνεπώς μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $(a_n)$ της οποίας οι όροι περιέχουν όλους τους ρητούς αριθμούς.
Εάν $\varepsilon$ είναι ένας θετικός αριθμός, θεωρούμε για κάθε $n$ το διάστημα $(a_n - \varepsilon/2^n, a_n + \varepsilon/2^n)$. Πόσο μήκος έχει αυτό το διάστημα; Εάν πάρουμε την ένωση όλων αυτών των διαστημάτων, γιά όλα τα $n$, το συνολικό μήκος του συνόλου δεν θα είναι μικρότερο από το άθροισμα των μηκών των διαστημάτων; Πόσο είναι αυτό το άθροισμα; Πόσο μέρος της ευθείας καταλαμβάνουν οι ρητοί αριθμοί; Εάν διαλέξουμε έναν (πραγματικά) τυχαίο πραγματικό αριθμό, τι πιθανότητα έχουμε να είναι αυτός ρητός;