# Τριγωνική ανισότητα

Υπενθυμίζουμε από την Ευκλείδεια γεωμετρία πως ισχύει σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η εξής σχέση:

$(AB) \leq (A\Gamma)+(B\Gamma)$

Επίσης, $|(A\Gamma)-(B\Gamma)| \leq (AB)$

Τελικά, $|(A\Gamma)-(B\Gamma)| \leq (AB) \leq (A\Gamma)+(B\Gamma)$

Παρατηρούμε ότι $|\vec{AB}|=(AB)$, $|\vec{A\Gamma}|=(A\Gamma)$ και $|\vec{B\Gamma}|=(B\Gamma)$. Άρα έχουμε

$\big||\vec{A\Gamma}|-|\vec{B\Gamma}|\big| \leq |\vec{AB}| \leq |\vec{A\Gamma}|+|\vec{B\Gamma}|$

$\big||\vec{A\Gamma}|-|\vec{B\Gamma}|\big| \leq |\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma B}| \leq |\vec{A\Gamma}|+|\vec{B\Gamma}|$

$\big||\vec{A\Gamma}|-|\vec{\Gamma B}|\big| \leq |\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma B}| \leq |\vec{A\Gamma}|+|\vec{\Gamma B}|$

Παρατηρήσεις:

1. Ισχύει ότι $|\vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma B}| = |\vec{A\Gamma}| + |\vec{\Gamma B}|$ αν και μόνο αν $\vec{A\Gamma} \uparrow\uparrow \vec{\Gamma B}$.

2. Ισχύει ότι $|\vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma B}| = ||\vec{A\Gamma}| - |\vec{\Gamma B}||$ αν και μόνο αν $\vec{A\Gamma} \uparrow\downarrow \vec{\Gamma B}$.

σελ. 29

1.27. Δίνονται $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ διανύσματα

$|\vec{\alpha}| \leq 2$ και $|\vec{\beta}| \leq 1$

(Ν.δ.ό) α) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq 3$

β) $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \leq 4$

γ) $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| \leq 7$

δ) $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \leq 8$

α) Έχουμε ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (1)

Αφού $|\vec{\alpha}| \leq 2$ και $|\vec{\beta}| \leq 1$ τότε $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \leq 2 + 1$ δηλ. $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \leq 3$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq 3$

β) Ισχύει ότι $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) + (-\vec{\beta})| = |\underbrace{(\vec{\alpha} - \vec{\beta})}_{\vec{u}} + \underbrace{(-\vec{\beta})}_{\vec{v}}| \leq |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| + |\vec{\beta}|$

$= |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| + |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + (-\vec{\beta})| + |\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |-\vec{\beta}| + |\vec{\beta}| =$

$= |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| + |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + 2|\vec{\beta}| \leq 2 + 2 \cdot 1 = 4$

δηλαδή $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + 2|\vec{\beta}| \leq 4$

Παρατήρηση: Ισχύει ότι $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

γ) $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| \leq 7$

Είναι $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| \leq |2\vec{\alpha}| + |3\vec{\beta}|$ (1)

$|2\vec{\alpha}| = |\vec{\alpha} + \vec{\alpha}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\alpha}| = 2|\vec{\alpha}|$

δηλ. $|2\vec{\alpha}| \leq 2|\vec{\alpha}|$ (2)

$|3\vec{\beta}| = |2\vec{\beta}+\vec{\beta}| \leq |2\vec{\beta}|+|\vec{\beta}| \leq 2|\vec{\beta}|+|\vec{\beta}| = 3|\vec{\beta}|$

δηλ. $|3\vec{\beta}| \leq 3|\vec{\beta}|$ (3)

Από (2) + (3) $\Rightarrow |2\vec{a}|+|3\vec{\beta}| \leq 2|\vec{a}| + 3|\vec{\beta}|$ (4)

Αφού $|\vec{a}| \leq 2$ τότε $2|\vec{a}| \leq 4$

Επίσης, $|\vec{\beta}| \leq 1$ τότε $3|\vec{\beta}| \leq 3$

$\left.\right\}$ (4) $\Rightarrow 2|\vec{a}|+3|\vec{\beta}| \leq 7$

Από (4), (5) $\Rightarrow |2\vec{a}|+|3\vec{\beta}| \leq 7$ (6)

Από (1), (6) $\Rightarrow |2\vec{a}+3\vec{\beta}| \leq 7$

σελ. 29

1.28 α) ν.δ.ό. $|\vec{a}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}| \leq |\vec{a}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|$

β) ν.δ.ό. $|\vec{a}|-|\vec{\beta}| \leq |\vec{a}-\vec{\beta}|$

Απόδειξη: α) Έχουμε ότι:

$|\vec{a}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}| = |(\vec{a}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}| \leq |\vec{a}+\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|$ (1)

Ισχύει ότι $|\vec{a}+\vec{\beta}| \leq |\vec{a}+\vec{\beta}|$

$|\vec{a}+\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}| \leq |\vec{a}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow |\vec{a}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}| \leq |\vec{a}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|$

β) Έχουμε ότι: $|\vec{a}| = |\vec{a}-\vec{\beta}+\vec{\beta}| = |(\vec{a}-\vec{\beta})+\vec{\beta}| \leq$

$\leq |\vec{a}-\vec{\beta}|+|\vec{\beta}|$

δηλ. $|\vec{a}| \leq |\vec{a}-\vec{\beta}|+|\vec{\beta}|$

$|\vec{a}|-|\vec{\beta}| \leq |\vec{a}-\vec{\beta}|$

1.27 δ) $|3a-2\vec{\beta}| \leq 8$

Έχουμε ότι: $|3\vec{a}-2\vec{\beta}| = |3\vec{a}+(-2\vec{\beta})| \leq |3\vec{a}|+$

δηλ. $|3\vec{a}-2\vec{\beta}| \leq |3\vec{a}|+|-2\vec{\beta}|$ (1)

Είναι $|3\vec{a}|+|-2\vec{\beta}| = |3\vec{a}|+|2\vec{\beta}|$ (2)

Από (1),(2) $\Rightarrow |3\vec{a}-2\vec{\beta}| \le |3\vec{a}|+|2\vec{\beta}|$ (3)

$|3\vec{a}| \le 3|\vec{a}|$ (4)

Πραγματικά $|3\vec{a}| \le |\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}| \le |\vec{a}|+|\vec{a}|+|\vec{a}| = 3\vec{a}$

Ομοίως, $|2\vec{\beta}| \le 2|\vec{\beta}|$ (5)

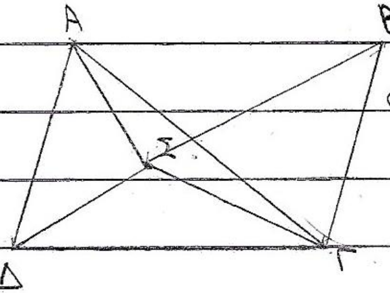
Από (4)+(5) $\Rightarrow |3\vec{a}|+|2\vec{\beta}| \le 3|\vec{a}|+2|\vec{\beta}|$ (6)

Από (3),(6) έπεται ότι $|3\vec{a}-2\vec{\beta}| \le 3|\vec{a}|+2|\vec{\beta}|$ (7)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αφού } |\vec{a}| \le 2 \text{ τότε } 3|\vec{a}| \le 6 \\ |\vec{\beta}| \le 1 \text{ τότε } 2|\vec{\beta}| \le 2 \end{array}\right\} \overset{(8)}{\Rightarrow} 3|\vec{a}|+2|\vec{\beta}| \le 8$$

Από (7),(8) $\Rightarrow |3\vec{a}-2\vec{\beta}| \le 8$

1.26




α) ΑΒΓΔ # άρα $\vec{AB}=\vec{\Delta\Gamma}$ (1)

$\vec{A\Gamma}-\vec{AB} \overset{(1)}{=} \vec{A\Gamma}-\vec{\Delta\Gamma}$ (2)

Έχουμε σημείο αναφοράς το Σ. Τότε:

Άρα $\vec{A\Gamma}-\vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Sigma}+\vec{\Sigma\Gamma}-(\vec{\Delta\Sigma}+\vec{\Sigma\Gamma}) = \vec{A\Sigma}+\cancel{\vec{\Sigma\Gamma}}-\vec{\Delta\Sigma}-\cancel{\vec{\Sigma\Gamma}} = \vec{A\Sigma}-\vec{\Delta\Sigma}$

Επομένως $\vec{A\Gamma}-\vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Sigma}-\vec{\Delta\Sigma} \Leftrightarrow \vec{A\Gamma}-\vec{\Delta\Gamma} = \vec{\Sigma\Delta}-\vec{\Sigma A}$ (3)

Οπότε από (2),(3) $\vec{A\Gamma}-\vec{AB} = \vec{\Sigma\Delta}-\vec{\Sigma A}$

β) $|\vec{\Sigma A}-\vec{\Sigma\Gamma}| = |\vec{\Sigma B}-\vec{\Sigma\Delta}| \Leftrightarrow |\vec{\Gamma A}| = |\vec{\Delta B}|$ το οποίο ισχύει αφού ΑΒΓΔ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

σελ.29
1.29. $||\vec{a}|-|\vec{\beta}|| \le |\vec{a}| \Leftrightarrow -|\vec{a}| \le |\vec{a}|-|\vec{\beta}| \le |\vec{a}|$

$|\vec{a}|-|\vec{\beta}| \ge -|\vec{a}|$ και $|\vec{a}|-|\vec{\beta}| \le |\vec{a}|$

Από την σχέση $|\vec{a}|-|\vec{\beta}| \ge -|\vec{a}|$ έχουμε:

$|\vec{a}|+|\vec{a}| \ge |\vec{\beta}|$

$2|\vec{a}| \ge |\vec{\beta}|$

Άρα $2|\vec{a}| \ge |\vec{\beta}|$

σελ.29
1.30 α) $|\vec{a}+\vec{\beta}|+|\vec{a}-\vec{\beta}| \ge 2|\vec{a}|$

$|\vec{a}+\vec{\beta}|+|\vec{a}-\vec{\beta}| \ge |(\vec{a}+\vec{\beta})+(\vec{a}-\vec{\beta})| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{\beta}|+|\vec{a}-\vec{\beta}| \ge |\vec{a}+\cancel{\vec{\beta}}+\vec{a}-\cancel{\vec{\beta}}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{\beta}|+|\vec{a}-\vec{\beta}| \ge |2\vec{a}| \Leftrightarrow$

Είναι $|2\vec{a}| = |\vec{a}+\vec{a}| = |\vec{a}|+|\vec{a}| = 2|\vec{a}|$

$\Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{\beta}|+|\vec{a}-\vec{\beta}| \ge 2|\vec{a}|$

β) $|\vec{a}+\vec{\beta}|+|\vec{a}-\vec{\beta}| \ge 2|\vec{\beta}|$

$|\vec{a}+\vec{\beta}|+|\vec{a}-\vec{\beta}| \ge ||\vec{a}+\vec{\beta}|-|\vec{a}+\vec{\beta}|| = |(\vec{a}+\vec{\beta})-(\vec{a}-\vec{\beta}$

$|\vec{a}+\vec{\beta}|+|\vec{a}-\vec{\beta}| \ge |\cancel{\vec{a}}+\vec{\beta}-\cancel{\vec{a}}+\vec{\beta}| \Leftrightarrow$

$|\vec{a}+\vec{\beta}|+|\vec{a}-\vec{\beta}| \ge |2\vec{\beta}| \Leftrightarrow$

Είναι $|2\vec{\beta}| = |\vec{\beta}+\vec{\beta}| = |\vec{\beta}|+|\vec{\beta}| = 2|\vec{\beta}|$

$|\vec{a}+\vec{\beta}|+|\vec{a}-\vec{\beta}| \ge 2|\vec{\beta}|$

σελ.29
1.31. $|\vec{a}| = 2 \quad |\vec{a}+\vec{\beta}| = 5$

$||\vec{a}|-|\vec{\beta}|| \le |\vec{a}+\vec{\beta}| \le |\vec{a}|+|\vec{\beta}|$

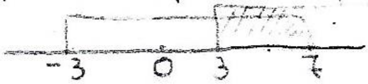
$|2-|\vec{\beta}|| \le 5 \le 2+|\vec{\beta}|$

Άρα έχουμε:

$-5 \le 2-|\vec{\beta}| \le 5 \Rightarrow -7 \le -|\vec{\beta}| \le 3 \Rightarrow 7 \ge |\vec{\beta}| \ge -3$

$2+|\vec{\beta}| \ge 5 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| \ge 3$

Άρα $3 \le |\vec{\beta}| \le 7$



$|x|^2 = x^2$

σελ.30
1.36 $\left||\vec{a}|-|\vec{\beta}|\right|^2+\left||\vec{a}|+|\vec{\beta}|\right|^2 = 4|\vec{a}|^2$ τότε $|\vec{\beta}| = |\vec{a}|$

$(|\vec{a}|-|\vec{\beta}|)^2 + (|\vec{a}|+|\vec{\beta}|)^2 = 4|\vec{a}|^2$

$|\vec{a}|^2 \cancel{-2|\vec{a}||\vec{\beta}|} + |\vec{\beta}|^2 + |\vec{a}|^2 \cancel{+2|\vec{a}||\vec{\beta}|} + |\vec{\beta}|^2 = 4|\vec{a}|^2$

$2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 - 4|\vec{a}|^2 = 0$

$-2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 = 0$

$-2|\vec{a}|^2 = -2|\vec{\beta}|^2 \iff \sqrt{|\beta|^2} = \sqrt{|a|^2} \iff ||\vec{\beta}|| = ||\vec{a}|| \iff |\vec{\beta}| = |\vec{a}|$

σελ.30
1.37. $|\vec{a}|(|\vec{a}|+|\vec{\beta}|) + |\vec{\beta}|(|\vec{a}|+|\vec{\beta}|) = |\vec{a}+\vec{\beta}|^2$ τότε $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$

$|\vec{a}|^2 + |\vec{a}||\vec{\beta}| + |\vec{\beta}|^2 + |\vec{a}||\vec{\beta}| = |\vec{a}+\vec{\beta}|^2$

$|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{\beta}| + |\vec{\beta}|^2 = |\vec{a}+\vec{\beta}|^2$

$(|\vec{a}|+|\vec{\beta}|)^2 = |\vec{a}+\vec{\beta}|^2 \iff \sqrt{(|\vec{a}|+|\vec{\beta}|)^2} = \sqrt{(|\vec{a}+\vec{\beta}|)^2} \iff ||\vec{a}|+|\vec{\beta}|| = |\vec{a}$

$|\vec{a}| + |\vec{\beta}| = |\vec{a}+\vec{\beta}|$ άρα $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$

σελ.30
1.39 $4x^2 - 4(|\vec{a}|+|\vec{\beta}|)x + |\vec{a}+\vec{\beta}|^2 = 0$

$\Delta = [4(|\vec{a}|+|\vec{\beta}|)]^2 - 4 \cdot 4|\vec{a}+\vec{\beta}|^2$

$\Delta = 16(|\vec{a}|+|\vec{\beta}|)^2 - 16|\vec{a}+\vec{\beta}|^2$

$\Delta = 16[(|\vec{a}|+|\vec{\beta}|)^2 - |\vec{a}+\vec{\beta}|^2]$

Αλλά:

$|\vec{a}+\vec{\beta}| \leq |\vec{a}|+|\vec{\beta}| \iff |\vec{a}+\vec{\beta}|^2 \leq (|\vec{a}|+|\vec{\beta}|)^2 \iff$

$(|\vec{a}|+|\vec{\beta}|)^2 - |\vec{a}+\vec{\beta}|^2 \geq 0$.

Οπότε $\Delta \geq 0$ άρα έχει πραγματικές ρίζες.

σελ. 30
140. α) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| + |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| \geq 3|\vec{\beta}|$

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| + |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| \geq |(\vec{\alpha}+\vec{\beta})-(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})|$

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| + |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| \geq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|$

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| + |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| \geq |3\vec{\beta}|$

β) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| + |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| \geq |\vec{\beta}-2\vec{\alpha}|$

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| + |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| \geq |(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})|$

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| + |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| \geq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|$

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| + |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| \geq |2\vec{\alpha}-\vec{\beta}| = |\vec{\beta}-2\vec{\alpha}|$

σελ. 30
142. α) i) Το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο Α και πέρας το σημείο Β. Συμβολίζεται: $\vec{AB}$

ii) Το διάνυσμα που η αρχή και το τέλος του ταυτίζονται

β) i) Ονομάζεται το μήκος ενός διανύσματος. Συμβολίζεται: |

ii) Το διάνυσμα που έχει μήκος 1.

γ) i) Η ευθεία που περιέχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{AB}$.

ii) Οποιαδήποτε ευθεία

δ) i) Αν έχουν τον ίδιο φορέα ή διαφορετικούς παράλληλους φορείς.

ii) Όταν είναι ίσα έχουν ίδια κατεύθυνση, όταν είναι αντίθετα έχουν αντίθετη κατεύθυνση.

ε) i) Όταν έχουν ίδιο μέτρο, ίδια φορά και ίδια διεύθυνση

ii) Όταν έχουν ίδιο μέτρο, ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη

στ) i) Είναι η κυρτή γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ώστε να γίνει ομόρροπο με το $\vec{\beta}$.

ii) Τα διανύσματα και η γωνία που σχηματίζουν είναι $90^\circ$.

γ) i) Ορίζεται το διάνυσμα που έχει για αρχή την αρχή του $\vec{a}$ και τέλος το τέλος του $\vec{\beta}$.

ii) Αν δύο διανύσματα έχουν κοινή αρχή τότε το βρίσκεται με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

θ) i) $\vec{a}-\vec{\beta}=\vec{a}+(-\vec{\beta})$.

ι) $\vec{AB}=\vec{AO}+\vec{OB} \Rightarrow \vec{AB}=-OA+\vec{OB} \Rightarrow \vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$

ια) $||\vec{A\Gamma}|-|\vec{\Gamma B}|| \leq |\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma B}| \leq |\vec{A\Gamma}|+|\vec{\Gamma B}|$