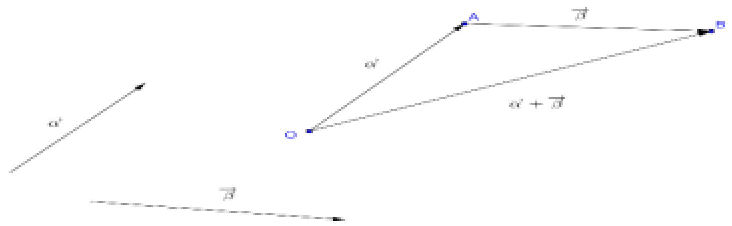
2. Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δυο μη μηδενικά διανύσματα. Για να τα προσθέσουμε κάνουμε τα εξής: Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο O του χώρου και γράφουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$ στη συνέχεια με αρχή το σημείο A γράφουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\beta}$ (Σχήμα 1)
Το άθροισμα ή συνισταμένη των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και είναι

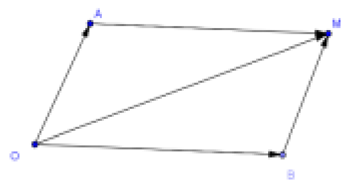


το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.
Δηλαδή, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

Σχήμα 1

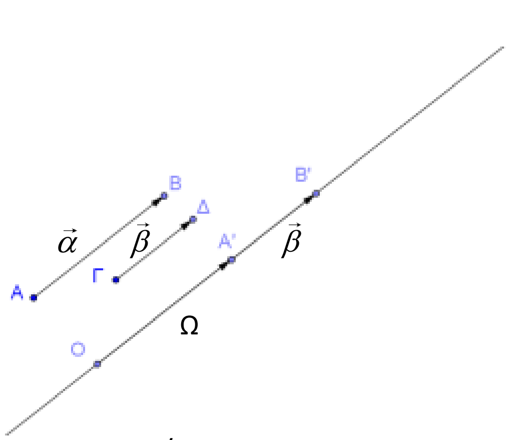
Παρατήρηση

1. Το άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητο από το σημείο O του χώρου που θεωρήσαμε ως αρχή
2. Το άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μπορεί να βρεθεί να βρεθεί και με τον κανόνα του παραλληλογράμμου ως εξής:
   Με αρχή το σημείο O γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}$ τότε το άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ αυτών είναι η διαγώνιος $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}$

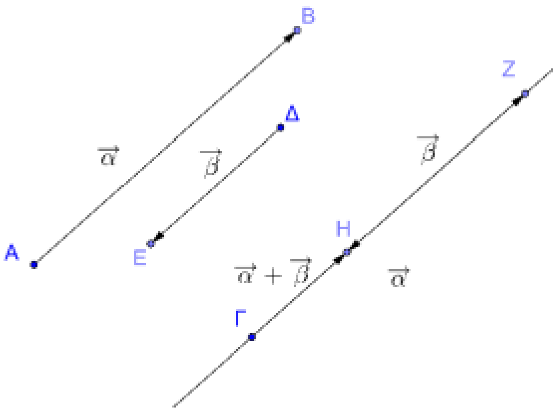
   

3. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, για να βρούμε, γεωμετρικά, το άθροισμα τους $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ μεταφέρουμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ σε μια ευθεία ε ώστε να είναι διαδοχικά(η αρχή του ενός συμπίπτει με το πέρας του προηγούμενου) Τότε το άθροισμα τους $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ θα είναι ένα διάνυσμα το οποίο βρίσκεται πάνω στην ίδια ευθεία ε με τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με λίγα λόγια αν τα

διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα τότε το άθροισμα τους $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι διάνυσμα παράλληλο με αυτά. Συγκεκριμένα, αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα τότε το άθροισμα τους $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι ένα διάνυσμα ομόρροπο με αυτά(Σχήμα 1α), ενώ αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα τότε το άθροισμα τους $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι ένα διάνυσμα παράλληλο με αυτά και έχει φορά τη φορά του διανύσματος με το μεγαλύτερο μέτρο(Σχήμα 1β).



Σχήμα 1α



Σχήμα 1β

Συμπέρασμα: *Για να προσθέσουμε δυο διανύσματα τα καθυστούμε διαδοχικά(δηλαδή η αρχή του ενός συμπίπτει με το πέρας του προηγούμενου) έτσι το άθροισμά τους είναι ένα διάνυσμα με αρχή, την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου διανύσματος.*

Ιδιότητες

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ διανύσματα τότε:

1. $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
2. $\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}$ (προσετεριστική ιδιότητα)
3. $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$
4. $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$

<u>Παρατήρηση:</u> Λόγο της αντιμεταθετικής ιδιότητας(ιδιότητα 1) το άθροισμα διανυσμάτων δεν μεταβάλλεται αν αλλάξουμε την σειρά των προσθετέων. Επίσης, το συνολικό άθροισμα διανυσμάτων δεν μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε μερικά διανύσματα με το άθροισμα τους. Έτσι η προσετεριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να γράφουμε απλά $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$

Δηλαδή, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}$

<u>Πρόταση 1</u> Σε κάθε τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}+\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=\vec{0}$

<u>Απόδειξη</u> Έχουμε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}+\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}=\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$

<u>Πρόταση 2</u> Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$ τότε $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}=\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} \Leftrightarrow -\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}=-\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}=\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}$

<u>Απόδειξη</u> Στη σχέση $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$ προσθέτουμε και στα 2 μέλη το $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$

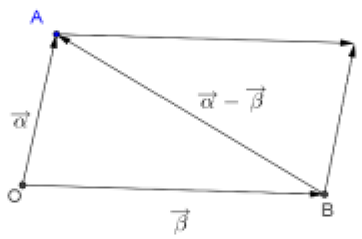
Οπότε, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}+\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}$

Από την τελευταία έπεται $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}=\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} \Leftrightarrow -\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}=-\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}=\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}$

<u>Αφαίρεση διανυσμάτων</u>

Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα. Η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και ορίζεται ως το διάνυσμα $\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$

Δηλαδή, $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$



Σχήμα 2

<u>Παρατήρηση</u>

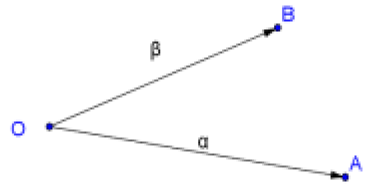
1. Γεωμετρικά το διάνυσμα $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι η δεύτερη διαγώνιος του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
2. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{x}$ τέτοιο ώστε $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha}$

   Πράγματι, για το διάνυσμα $\vec{x}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$ έχουμε:

   $$\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\beta}+(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=(\vec{\beta}+\vec{\alpha})-\vec{\beta}=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}-\vec{\beta})=\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$$

   Έστω $\vec{\gamma}$ ένα διάνυσμα για το οποίο ισχύει $\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}$

   Τότε, $\vec{\gamma}=\vec{\gamma}+\vec{0}=\vec{\gamma}+(\vec{\beta}-\vec{\beta})=(\vec{\gamma}+\vec{\beta})-\vec{\beta}=(\vec{\beta}+\vec{\gamma})-\vec{\beta}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$



<u>Διάνυσμα θέσεως</u>

Έστω O ένα αυθαίρετο αλλά σταθερό σημείο του χώρου.

Για κάθε σημείο A του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

Σχήμα3

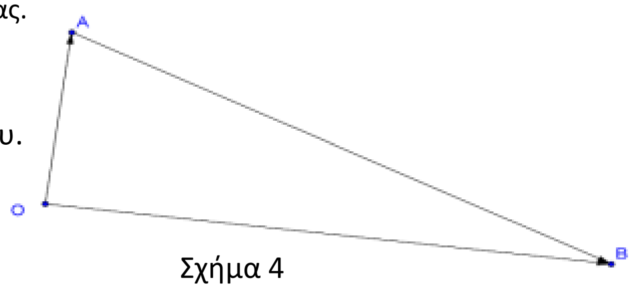
το οποίο λέγεται **<u>διάνυσμα θέσεως ή διανυσματική ακτίνα του σημείου</u>** A

Το σημείο O που είναι η αρχή όλων των διανυσματικών ακτινών των σημείων του χώρου λέγεται **<u>σημείο αναφοράς</u>** (Σχήμα 3)

<u>Παρατήρηση</u>

1. Σε ασκήσεις μπορούμε να θεωρούμε ως σημείο αναφοράς οποιοδήποτε σημείο του χώρου, ακόμα και κάποιο σημείο του σχήματος μας.
2. Κάθε διάνυσμα ισούται με την διαφορά της διανυσματικής ακτίνας της αρχής από την διανυσματική ακτίνα του πέρα τος του. Δηλαδή,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$



Σχήμα 4

Με πιο απλά λόγια **<u>κάθε διάνυσμα ισούται με την διανυσματική ακτίνα του τέλους μείον την διανυσματική ακτίνα της αρχής</u>**.

Πράγματι, έστω $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ένα διάνυσμα τότε όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα 4 ισχύει:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

3. Αν οι διανυσματικές ακτίνες δυο σημείων M και N είναι ίσες τότε τα σημεία αυτά ταυτίζονται.

Πράγματι, αν $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ τότε $\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{NM}}=\vec{0}\Rightarrow\mathrm{M}\equiv\mathrm{N}$

<u>Μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων</u>

Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα. Στο διπλανό σχήμα παριστάνεται το άθροισμα τους. Για το τρίγωνο AOB γνωρίζουμε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα

$$|(\mathrm{OA})-(\mathrm{AB})| \leq (\mathrm{OB}) \leq (\mathrm{OA})+(\mathrm{AB})$$

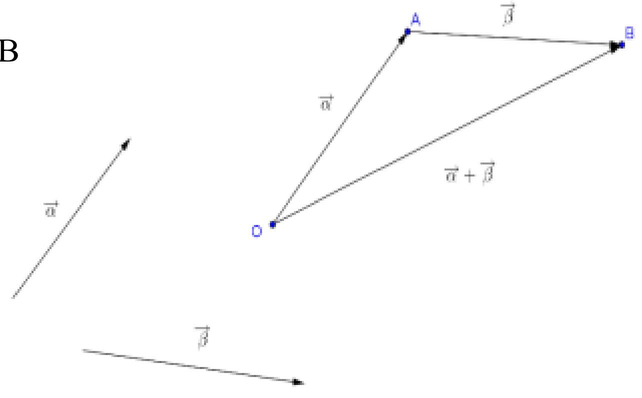
Επειδή,

$$(\mathrm{OA}) = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\vec{\alpha}|$$

$$(\mathrm{AB}) = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\vec{\beta}|$$

$$(\mathrm{OB}) = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$$

έπεται ότι $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ (*)



Σχήμα 5

<u>Παρατήρηση</u>

1. Η παραπάνω ανισότητα (*) λέγεται τριγωνική ανισότητα
2. Αν κάποιο από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ ή $\vec{\beta}$ είναι μηδενικό διάνυσμα τότε είναι προφανές ότι: $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$
3. $\vec{a} \nearrow\nearrow \vec{\beta}$ αν και μόνο αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ (Σχήμα 1α)

   $\vec{a} \nearrow\swarrow \vec{\beta}$ αν και μόνο αν $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ (Σχήμα 1β)
4. Επίσης, ισχύει: $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$