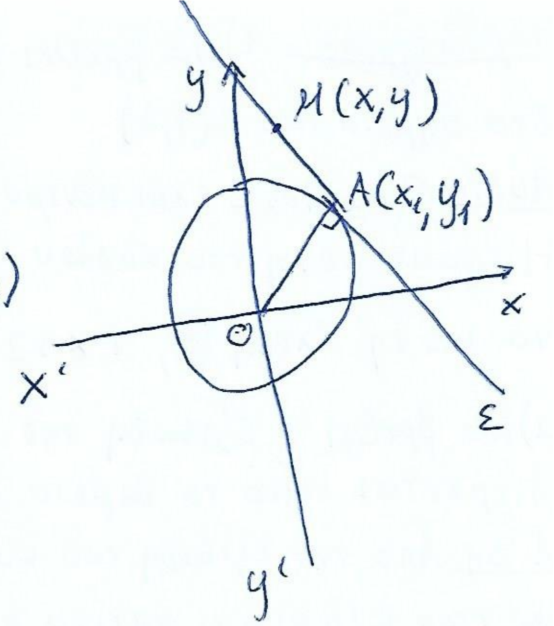
Εφαπτομένη κύκλου



Θεωρούμε ενα κυκλο c με κεντρο την αρχη των αξονων (Δηλ το σημειο $O(0,0)$) και ακτινα ρ
Εστω $A(x_1,y_1)$ ενα σημειο του κυκλου c και ε η εφαπτομένη ευθεια του κύκλου c στο σημειο $A(x_1,y_1)$
Αναζητούμε την εξίσωση της ευθειας ε.
Αφου η ευθεια ε ειναι εφαπτομενη του κύκλου c στο σημειο $A(x_1,y_1)$ ισχυει οτι $(OA)\perp ε$
Εστω $M(x,y)$ ενα σημειο του επιπέδου
Τοτε, το σημειο $M(x,y)$ ειναι πανω στην ευθεια ε αν και μονο αν $\vec{OA}\perp\vec{AM}$
ισχυει οτι $\vec{OA}\perp\vec{AM}$ αν και μονο αν $\vec{OA}\cdot\vec{AM}=0$
Οποτε, το σημειο $M(x,y)$ του επιπεδου ειναι πανω στην ευθεια ε αν και μονο αν $\vec{OA}\cdot\vec{AM}=0$ ①

Ειναι: $\vec{OA}=(x_A-x_O,\,y_A-y_O)=(x_1-0,\,y_1-0)=(x_1,y_1)$ ②

$\vec{AM}=(x_M-x_A,\,y_M-y_A)=(x-x_1,\,y-y_1)$ ③

Εχουμε οτι: $\vec{OA}\cdot\vec{AM}=(x_1,y_1)(x-x_1,y-y_1)=x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=x_1x-x_1^2+y_1y-y_1^2$

Ετσι, λογω της σχεσης ① προκυπτει $x_1x-x_1^2+y_1y-y_1^2=0$

$$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2 \quad ④$$

Αφου το σημειο $A(x_1,y_1)$ ειναι σημειο του κυκλου c τοτε οι συντεταγμενες του επαληθευουν την εξίσωση του κυκλου c, η οποια ειναι της μορφης: $x^2+y^2=\rho^2$ διοτι ο κυκλος c εχει κεντρο την αρχη των αξονων και ακτινα ρ
Ετσι ισχυει: $x_1^2+y_1^2=\rho^2$ ⑤

Απο τις σχεσεις ④ και ⑤ προκυπτει $x_1x+y_1y=\rho^2$ ⑥

Η εξίσωση ⑥ ειναι η εξίσωση της ευθειας ε.

<u>Συμπερασμα</u>: Η εφαπτομένη του κυκλου με κεντρο την αρχη των αξονων και ακτινα ρ σε ενα σημειο του $A(x_1,y_1)$ εχει εξίσωση $x_1x+y_1y=\rho^2$

Παραδείγματα: 1) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2+y^2=5$ στο σημείο του $A(1,2)$

Λύση: Ο κύκλος C έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$

Η εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο του $A(1,2)$ έχει εξίσωση, σύμφωνα με τη σχέση ⑥, $1\cdot x+2\cdot y=(\sqrt{5})^2$ Δηλαδή $x+2y=5$

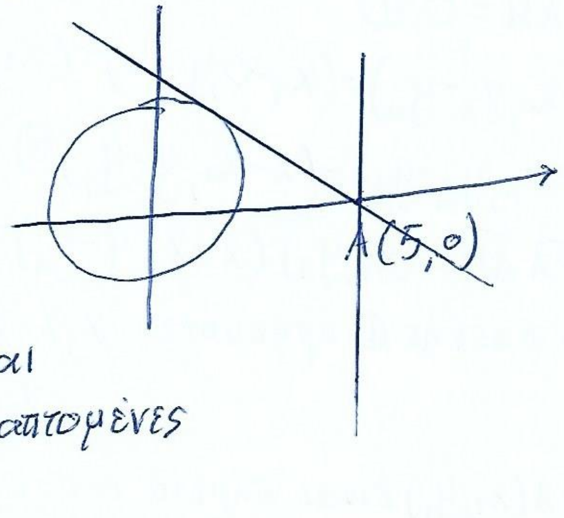
2) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2+y^2=5$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(5,0)$

Λύση: Από την εξίσωση του κύκλου C συμπεραίνουμε ότι ο κύκλος C έχει κέντρο $K(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$

Παρατηρούμε επίσης ότι το σημείο $A(5,0)$ δεν ανήκει (δηλ. δεν είναι σημείο) πάνω στον κύκλο C διότι η απόσταση του A από το K είναι:

$(KA)=\sqrt{(x_A-x_K)^2+(y_A-y_K)^2}=\sqrt{(5-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{5^2}=|5|=5\neq\sqrt{5}=\rho$

Έστω: ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=5$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(5,0)$



Αναζητούμε την εξίσωση της ευθείας ε

Με άλλα λόγια αναζητούμε όλες εκείνες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(5,0)$ και είναι εφαπτόμενες του κύκλου $C: x^2+y^2=5$

Από την ευκλείδια γεωμετρία γνωρίζουμε ότι μια ευθεία είναι εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=5$ αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου $K(0,0)$ του κύκλου $C: x^2+y^2=5$ ~~είναι~~ από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου C δηλ. ίση με $\rho=\sqrt{5}$

Αν d_1 η απόσταση του σημείου $K(0,0)$ από την ευθεία $x=5$ τότε $d_1=5$ Οπότε, σύμφωνα με τα παραπάνω η ευθεία $x=5$ δεν είναι εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=5$ (αφού $d_1\neq\sqrt{5}$)

Έτσι, η εξίσωση της ευθείας ε έχει την μορφή: $y-0=\lambda(x-5)$, όπου λ η κλίση της ευθείας ε Δηλαδή, η ευθεία ε έχει γενική εξίσωση $\varepsilon: \lambda x-y-5\lambda=0$

Είναι: $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|\lambda 0-0-5\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=\dfrac{5|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$ ①

Αφού η ε εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=5$ τότε $d(K,\varepsilon)=\sqrt{5}$ ②

Απο ①,② $\Rightarrow \frac{5|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \left(\frac{5|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}\right)^2=(\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow \frac{25|\lambda|^2}{(\sqrt{\lambda^2+1})^2}=(\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow \frac{25\lambda^2}{\lambda^2+1}=5$

$\Leftrightarrow 25\lambda^2=5(\lambda^2+1) \Leftrightarrow 25\lambda^2=5\lambda^2+5 \Leftrightarrow 20\lambda^2=5 \Leftrightarrow \lambda^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2}$

Για $\lambda=\frac{1}{2}$ η εξισωση ε ειναι: $\frac{1}{2}x-y-\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow x-2y-5=0$

Για $\lambda=-\frac{1}{2}$ η ευθεια ε ειναι $-\frac{1}{2}x-y+\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow x+2y-5=0$

Αρα, ο κυκλος $C: x^2+y^2=5$ εχει δυο εφαπτομενες που διερχονται απο το σημειο Α

$\varepsilon_1: x-2y-5=0$ και $\varepsilon_2: x+2y-5=0$

3) Να βρεθει η εξισωση της εφαπτομενης του κυκλου $C: x^2+y^2=5$ η οποια ειναι παραλληλη στην ευθεια $\varepsilon_1: y=2x+3$

Λυση: Απο την εξισωση του κυκλου C προκυπτει οτι το κεντρο του ειναι η αρχη των αξονων (δηλ. το $O(0,0)$) και η ακτινα του $\rho=\sqrt{5}$

Επισης, απο την εξισωση της ευθειας ε_1 προκυπτει οτι η κλιση λ_1 της ε_1 ειναι $\lambda_1=2$

Εστω ε η εφαπτομενη του κυκλου $C: x^2+y^2=5$ με $\varepsilon//\varepsilon_1$ και λ η κλιση της ε

Αφου $\varepsilon//\varepsilon_1$ τοτε $\lambda=\lambda_1=2$

Αρα, η εξισωση της ευθειας ε ειναι της μορφης $y=2x+\beta$, οπου $\beta\in R$

Η γενικη εξισωση της ευθειας ε εχει τη μορφη $2x-y+\beta=0$, οπου $\beta\in R$

Αφου η ε εφαπτομενη του κυκλου C τοτε $d(O,\varepsilon)=\sqrt{5}$ ①

Γνωριζουμε οτι $d(O,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 0-0+\beta|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|\beta|}{\sqrt{5}}$ ②

Απο ①,② $\Rightarrow \frac{|\beta|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |\beta|=(\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow |\beta|=5 \Rightarrow \beta=\pm 5$

Αρα, $\varepsilon: 2x-y-5=0$ ή $\varepsilon: 2x-y+5=0$

Τελικα, υπαρχουν 2 εφαπτομενες του κυκλου $C: x^2+y^2=5$ παραλληλες στην $\varepsilon_1: y=2x+3$ οι ευθειες $\varepsilon_1: 2x-y-5=0$ και $\varepsilon_2: 2x-y+5=0$

4) Να βρεθει η εξισωση της εφαπτομενης του κυκλου $C: x^2+y^2=5$ η οποια ειναι καθετη στην ευθεια $\varepsilon_1: y=\frac{1}{2}x$

Λυση: Απο την εξισωση της ευθειας ε_1 βρισκουμε οτι η κλιση της ειναι $\lambda_{\varepsilon_1}=\frac{1}{2}$

Επισης, απο την εξισωση του κυκλου C βρισκουμε το κεντρο $O(0,0)$ και την ακτινα $\rho=\sqrt{5}$ του κυκλου.

Εστω ε η εφαπτομενη του κυκλου $C: x^2+y^2=5$ (σε καποιο σημειο του κυκλου C) η οποια ειναι καθετη στην ε_1 και λ η κλιση της ε.

Τοτε, αφου $\varepsilon\perp\varepsilon_1$ ισχυει $\left.\begin{matrix}\lambda\cdot\lambda_{\varepsilon_1}=-1\\ \text{ομως, } \lambda_{\varepsilon_1}=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lambda=-2$

Οποτε, η ευθεια ε εχει εξίσωση της μορφης $y=-2x+\beta$, οπου $\beta\in\mathbb{R}$

Η γενικη εξίσωση της ευθειας ε εχει τη μορφη $\varepsilon: 2x+y-\beta=0$, οπου $\beta\in\mathbb{R}$

Αφου η ε εφαπτομενη του κυκλου $C: x^2+y^2=5$ ισχυει $d(O,\varepsilon)=\sqrt{5}$ ①

Γνωριζουμε $d(O,\varepsilon)=\dfrac{|2\cdot 0+0-\beta|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|\beta|}{\sqrt{5}}$ ②

Απο ①, ② $\Rightarrow \dfrac{|\beta|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |\beta|=(\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow |\beta|=5 \Rightarrow \beta=\pm 5$

Αρα, $\varepsilon: 2x+y-5=0$ ή $\varepsilon: 2x+y+5=0$

Τελικα, υπαρχουν 2 εφαπτομενες του κυκλου $C: x^2+y^2=5$ καθετες στην $\varepsilon_1: y=\frac{1}{2}x$

οι ευθειες $\varepsilon_1: 2x+y-5=0$ και $\varepsilon_2: 2x+y+5=0$

5) Να βρεθει η εξίσωση της εφαπτομένης του κυκλου $C: x^2+y^2-2x+4y+4=0$

στο σημειο του $A(1,-1)$

Λύση: Με την βοήθεια της μεθοδου συμπληρωσης τετραγωνου φερνουμε την εξίσω-ση του κυκλου C στη μορφη: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ ωστε να βραυμε το κέ-ντρο και την ακτινα του κυκλου C

Εχουμε: $x^2+y^2-2x+4y+4=0$

$x^2-2x+y^2+4y+4=0$

$x^2-2x\cdot 1+y^2+2\cdot 2y+2^2=0$

$x^2-2x\cdot 1+1^2-1^2+y^2+2\cdot 2y+2^2=0$

$(x-1)^2-1^2+(y+2)^2=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=1^2$

$(x-1)^2+(y-(-2))^2=1^2$ ①

Απο την σχεση ① επεται οτι ο κυκλος C εχει κεντρο $K(1,-2)$ και ακτινα

$\rho=1$

Εστω ε η εφαπτομένη του κυκλου C στο σημειο του $A(1,-1)$ Τοτε, $\varepsilon\perp(KA)$ ①

Αφου τα σημεια K και A εχουν την ιδια τετμημενη τοτε $(KA)\parallel y'y$

Οποτε, $x'x\perp(KA)$ ②

Απο ①, ② $\Rightarrow \varepsilon\parallel x'x$ και επειδη η ε διερχεται απο το σημειο $A(1,-1)$ εχει

εξίσωση $\boxed{\varepsilon: y=-1}$

6) Να βρεθει η εξισωση της εφαπτομενης του κυκλου $C: x^2+y^2-2ax-2\beta y+a^2-3\beta^2=0$ στο σημειο του $A(a,-\beta)$

Λυση: Φερνουμε την εξισωση του κυκλου C στη μορφη: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ ωστε να προσδιορισουμε το κεντρο και την ακτινα του κυκλου C

Εχουμε: $x^2+y^2-2ax-2\beta y+a^2-3\beta^2=0$

$$x^2+y^2-2ax-2\beta y+a^2+\beta^2-4\beta^2=0$$

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2\beta y+\beta^2-4\beta^2=0$$

$$(x-a)^2+(y-\beta)^2-4\beta^2=0$$

$$(x-a)^2+(y-\beta)^2=4\beta^2$$

$$(x-a)^2+(y-\beta)^2=4|\beta|^2$$

$$(x-a)^2+(y-\beta)^2=(2|\beta|)^2 \quad (1)$$

Απο την σχεση (1) επεται οτι ο κυκλος C εχει κεντρο $K(a,\beta)$ και ακτινα

$\rho=2|\beta|$

Εστω ε η εφαπτομενη του κυκλου C στο σημειο του $A(a,-\beta)$ Τοτε, $(KA)\perp \varepsilon$ (2)

Παρατηρουμε οτι τα σημεια K και A εχουν την ιδια τετμημενη (καθε μια ειναι ιση με a) Συνεπως, $(KA)//y'y$

$$\left.\begin{array}{l}(KA)//y'y\\ \text{Ομως, } y'y\perp x'x\end{array}\right\} \Rightarrow (KA)\perp x'x \quad (3)$$

Απο (2),(3) $\Rightarrow$ $\varepsilon//x'x$ και επειδη η ευθεια ε διερχεται απο το σημειο $A(a,-\beta)$ εχει εξισωση $\boxed{\varepsilon: y=-\beta}$

Ασκήσεις

3/σελ. 87 Σχολ. Βιβλ.

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2=2$ και $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $\Gamma(-1,-1)$ και $\Delta(+1,-1)$ τα σημεία του C

Ν.Δ.Ο. οι εφαπτομένες του κύκλου C στα σημεία A, B, Γ και Δ σχηματίζουν τετράγωνο του οποίου οι διαγώνιες είναι οι άξονες $x'x$ και $y'y$

Λύση: Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ και ε_4 οι εφαπτομένες του κύκλου $C: x^2+y^2=2$ στα σημεία του A, B, Γ και Δ αντίστοιχα

Από την εξίσωση του κύκλου C έπεται ότι το κέντρο του κύκλου C είναι το σημείο $K(0,0)$ και η ακτίνα του $\sqrt{2}$

Αφού ο κύκλος C έχει κέντρο την αρχή των αξόνων εφαρμόζουμε τον τύπο ⑥ για να βρούμε τις εφαπτομένες του κύκλου $C: x^2+y^2=2$ στα σημεία του A, B, Γ και Δ Έχουμε:

$$\varepsilon_1: x+y=2$$
$$\varepsilon_2: -x+y=2$$
$$\varepsilon_3: -x-y=2$$
$$\varepsilon_4: x-y=2$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_3}=-1$ και $\lambda_{\varepsilon_2}=\lambda_{\varepsilon_4}=1$ Οπότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_3$ και $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_4$

Θα βρούμε τα σημεία τομής των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_1, \varepsilon_4$ και $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ και $\varepsilon_3, \varepsilon_4$

Λύνοντας τα αντίστοιχα συστήματα:

$$\left.\begin{matrix} x+y=2 \\ -x+y=2 \end{matrix}\right\}(\Sigma_1) \quad \left.\begin{matrix} x+y=2 \\ x-y=2 \end{matrix}\right\}(\Sigma_2) \quad \left.\begin{matrix} -x+y=2 \\ -x-y=2 \end{matrix}\right\}(\Sigma_3) \text{ και } \left.\begin{matrix} -x-y=2 \\ x-y=2 \end{matrix}\right\}(\Sigma_4)$$

- Για το (Σ_1): $x+y=-x+y \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$ και $y=2$ Άρα, $E(0,2)$ το σημείο τομής $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
- Για το (Σ_2): $x+y=x-y \Leftrightarrow 2y=0 \Rightarrow y=0$ και $x=2$ Άρα, $Z(2,0)$ το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_4$
- Για το (Σ_3): $-x+y=-x-y \Leftrightarrow 2y=0 \Rightarrow y=0$ και $x=-2$ Άρα, $H(-2,0)$ το σημείο τομής των $\varepsilon_2, \varepsilon_3$
- Για το (Σ_4): $-x-y=x-y \Leftrightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$ και $y=-2$ Άρα, $\Theta(0,-2)$ το σημ. τομής των $\varepsilon_3, \varepsilon_4$

Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ έχει διαγωνίους τις $E\Theta$ και ZH

Έχουμε $\vec{E\Theta}=(x_\Theta-x_E, y_\Theta-y_E)=(0-0,-2-2)=(0,-4)$ και $|\vec{E\Theta}|=\sqrt{0^2+(-4)^2}=\sqrt{16}=4$

$\vec{ZH}=(x_H-x_Z, y_H-y_Z)=(-2-2,0-0)=(-4,0)$ και $|\vec{ZH}|=\sqrt{(-4)^2+0^2}=\sqrt{16}=4$

Επίσης, $\vec{E\Theta}\cdot\vec{ZH}=(0,-4)\cdot(-4,0)=0\cdot(-4)+(-4)\cdot 0=0+0=0$

Αφού $\vec{E\Theta}\cdot\vec{ZH}=0$ τότε $\vec{E\Theta}\perp\vec{ZH}$

Συνεπώς, επειδή οι διαγώνιες $E\Theta, ZH$ του τετραπλεύρου $EHZ\Theta$ είναι κάθετες και ίσες

το τετράπλευρο ΕΗΖΘ είναι τετράγωνο
Το τετράγωνο αυτό έχει εμβαδόν $E = |\vec{EZ}|^2$

Είναι $\vec{EZ} = (x_Z - x_E, y_Z - y_E) = (2-0, 0-2) = (2,-2)$
Άρα, $|\vec{EZ}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ Οπότε, $E = |\vec{EZ}|^2 = (\sqrt{8})^2 = 8$.

2/σελ: 88 σχολ. βιβλ.

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$
ν.δ.ο η ευθεία $\varepsilon: x \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + y\,\eta\mu\varphi = 4\eta\mu\varphi - 2\sigma\upsilon\nu\varphi$ εφάπτεται στον κύκλο C.

Λύση: Έχουμε ότι: $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y = 0$$
$$x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 + y^2 - 2 \cdot 4y = 0$$
$$x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 + y^2 - 2 \cdot 4y + 4^2 = 4^2 + 0$$
$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 4^2$$
$$(x-(-2))^2 + (y-4)^2 = 4^2$$

Το κέντρο του κύκλου C είναι το σημείο $K(-2,4)$ και η ακτίνα του $\rho = 4$
Η ευθεία ε έχει γενική εξίσωση $\varepsilon: x \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + y \cdot \eta\mu\varphi + 2\sigma\upsilon\nu\varphi - 4\eta\mu\varphi = 0$

Είναι: $$d(K,\varepsilon) = \frac{|-2\sigma\upsilon\nu\varphi + 4 \cdot \eta\mu\varphi + 2\sigma\upsilon\nu\varphi - 4\eta\mu\varphi - 4|}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi}} = \frac{|-4|}{\sqrt{1}} = \frac{4}{1} = 4 = \rho$$

Αφού $d(K,\varepsilon) = \rho$ τότε η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου C σε κάποιο σημείο.