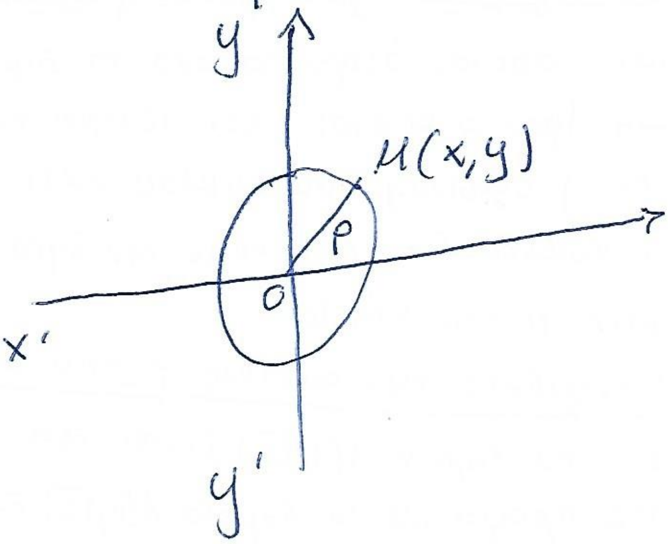
Εξισώσεις Κύκλου

① Εξίσωση κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ



Έστω C ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων δηλ. το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ. Ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου ανήκει στον κύκλο C αν και μόνο αν ισχύει $(OM)=\rho$ ①

Γνωρίζουμε $(OM)=\sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}$

$$=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$$

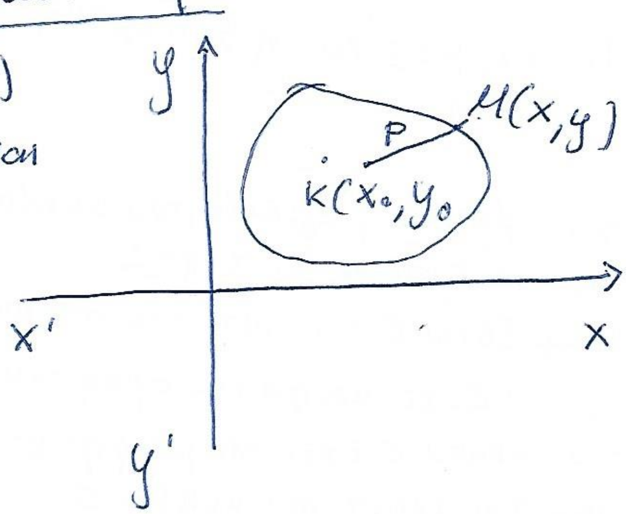
$$=\sqrt{x^2+y^2}$$

Έτσι, από την σχέση ① παίρνουμε: $\sqrt{x^2+y^2}=\rho$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=\rho^2$$

$$\boxed{x^2+y^2=\rho^2} \quad (A)$$

② Εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ



Έστω C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ. Ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου είναι σημείο του κύκλου C αν και μόνο αν ισχύει:

$$(KM)=\rho \quad ②$$

Γνωρίζουμε $(KM)=\sqrt{(x_M-x_K)^2+(y_M-y_K)^2}$

$$=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Συνεπώς, από την ② προκύπτει: $\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^2=\rho^2$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$$

Άρα, $\boxed{C: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2}$ (B)

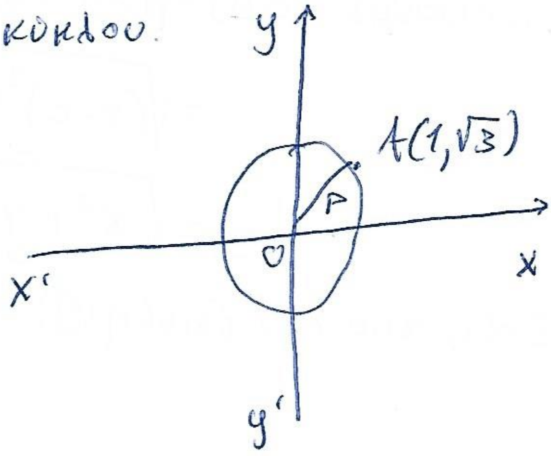
Παρατήρηση: Για $x_0 = y_0 = 0$ απο τη σχεση (Β) προκυπτει η σχέση (Α)

Παραδείγματα: 1) Να βρεθει η εξίσωση του κυκλου με κέντρο την αρχη των αξό-νων ο οποιος διέρχεται απο το σημειο $A(1,\sqrt{3})$

Λύση: Αφου ο κύκλος εχει κεντρο την αρχη των αξόνων δηλ. το σημειο $O(0,0)$ τοτε η εξίσωση του κύκλου εχει την μορφη: $x^2+y^2=\rho^2$, οπου ρ η ακτίνα του κύκλου. Για να βρούμε την ζητούμενη εξίσωση αρκει να υπολογίσουμε την ακτινα ρ του κύκλου.

Υπολογισμος της ακτινας ρ του κύκλου

Αφου το σημειο $A(1,\sqrt{3})$ ειναι ενα απο τα σημεια που διερχεται ο κύκλος τοτε προφανως το σημειο $A(1,\sqrt{3})$ ειναι σημειο του κύκλου.



Ετσι, ισχυει $\rho=(OA)$

Γνωρίζουμε $(OA)=\sqrt{(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2}$

$=\sqrt{(1-0)^2+(\sqrt{3}-0)^2}$

$=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{1+3}$

$=\sqrt{4}$

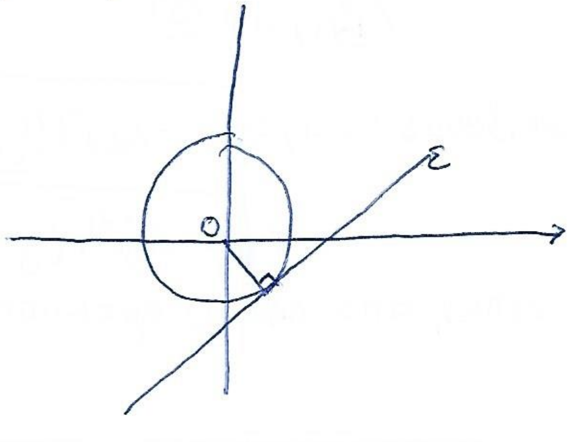
$=2$

Τελικά, $\rho=2$ και η ζητουμενη εξίσωση ειναι: $x^2+y^2=2^2$

Δηλ.: $x^2+y^2=4$

2) Να βρεθει η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχη των αξονων ο οποιος εφάπτε-ται της ευθειας ε: $x-y=2$

Λύση: Εστω C ο κυκλος του οποιου αναζητούμε την εξίσωση



Αφου ο C εχει κεντρο την αρχη των αξονων, η εξίσωση του κύκλου C εχει την μορφη: $x^2+y^2=\rho^2$ οπου ρ η ακτινα του κυκλου C.

Για να προσδιορισουμε την εξίσωση του κυκλου C αρκει να βρουμε την ακτινα του.

Υπολογισμος της ακτινας ρ του κύκλου C

Εστω d η αποσταση του σημειου $O(0,0)$ απο την ευθεια ε

Αφου ο κυκλος C εφαπτεται σε κάποιο σημείο του στην ευθεια ε τοτε ισχυει $d=\rho$

Η ευθεια ε εχει εξίσωση σε γενικη μορφη: $x-y-2=0$

Γνωρίζουμε $d=\frac{|x_0-y_0-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$, οπου x_0, y_0 οι συντεταγμενες του σημειου O

Ετσι, $d=\frac{|-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ Οποτε, $\rho=2$ και $C: x^2+y^2=(\sqrt{2})^2$

$$\boxed{x^2+y^2=2}$$

3) Να βρεθει η εξισωση του κυκλου με κεντρο το σημειο $K(0,1)$ ο οποιος διερχεται απο το σημειο $A(1,\sqrt{3})$

Λύση: Εστω C ο κυκλος του οποιου αναζητουμε την εξισωση.
Αφου ο κυκλος C εχει κεντρο το σημειο $K(0,1)$ τοτε η εξισωση του κυκλου C εχει τη μορφη: $(x-x_K)^2+(y-y_K)^2=\rho^2$, οπου x_K, y_K οι συντεταγμενες του σημειου K και ρ η ακτινα του κυκλου C

Αντικαθιστωντες τα x_K, y_K παιρνουμε: $x^2+(y-1)^2=\rho^2$
Για να προσδιορισουμε την εξισωση του κυκλου C αρκει να βρουμε την ακτινα ρ

Υπολογισμος της ακτινας ρ του κυκλου C

Αφου ο κυκλος C διερχεται απο το σημειο $A(1,\sqrt{3})$ τοτε το σημειο $A(1,\sqrt{3})$ ανηκει στον κυκλο C Δηλ. $\rho=(KA)$

Γνωρίζουμε $(KA)=\sqrt{(x_A-x_K)^2+(y_A-y_K)^2}=\sqrt{(1-0)^2+(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{1+(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$

$\cancel{=\sqrt{(0-0)^2+(\sqrt{3}-0)}}$

Οποτε, $\rho=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$ και $C: x^2+(y-1)^2=(\sqrt{5-2\sqrt{3}})^2$

Δηλ.

$$C: x^2+(y-1)^2=5-2\sqrt{3}$$

4) Να βρεθει η εξισωση του κυκλου με κεντρο το σημειο $K(0,1)$ που εφαπτεται στην ευθεια $\varepsilon: x-y=2$

Λυση: Εστω C ο κυκλος του οποιου αναζητουμε την εξισωση
Οπως, και στο προηγουμενο παραδειγμα η εξισωση του κυκλου C εχει τη μορφη

$x^2+(y-1)^2=\rho^2$, οπου ρ η ακτινα του κυκλου C

Εστω d η αποσταση του σημειου $K(0,1)$ απο την ευθεια ε:
Η ευθεια ε εχει γενικη εξισωση $\varepsilon: x-y-2=0$
Τοτε, $d=\frac{|x_K-y_K-2|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\frac{|0-1-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-3|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

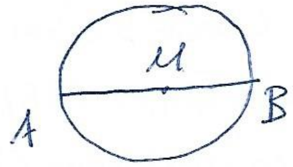
Αφου ο κυκλος C εφαπτεται της ευθειας ε τοτε $\rho=d=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ Αρα, $C: x^2+(y-1)^2=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$

5) Να βρειτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διαμετρο το τμήμα με ακρα τα σημεια $A(-1,2)$ και $B(3,8)$

<u>Λύση</u>: Εστω C ο κυκλος του οποιου αναζητουμε την εξισωση

Αφου το ευθ. τμημα (AB) ειναι διαμετρος του κυκλου C τοτε το μέσο του ευθ. τμηματος, το οποιο ας πουμε M, θα ειναι το κεντρο του κύκλου C και το μηκος (AM) ειναι η ακτινα του κυκλου C.

Αν $M(x_1,y_1)$ επειδη M μεσο του ευθ. τμηματος AB



ισχυει: $x_1=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-1+3}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

$$y_1=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+8}{2}=\frac{10}{2}=5$$

Δηλαδη, $M(1,5)$.

Επισης, αφου M το μέσο του ευθ. τμηματος (AB) ισχυει: $(AM)=\dfrac{(AB)}{2}$

Ειναι: $(AB)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$$=\sqrt{(3-(-1))^2+(8-2)^2}$$

$$=\sqrt{(3+1)^2+6^2}$$

$$=\sqrt{4^2+36}$$

$$=\sqrt{16+36}$$

$$=\sqrt{52}$$

Αρα, $(AM)=\dfrac{(AB)}{2}=\dfrac{\sqrt{52}}{2}$

Συνεπως $C:(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(AM)^2$

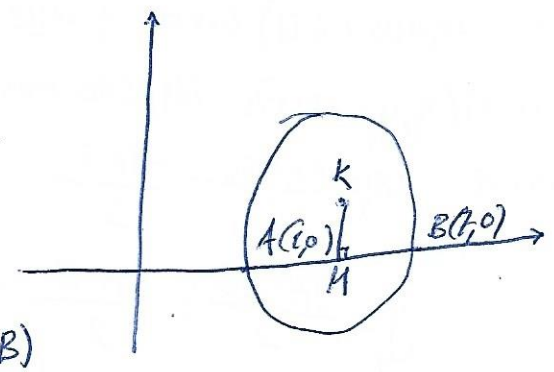
$$C:(x-1)^2+(y-5)^2=\left(\frac{\sqrt{52}}{2}\right)^2$$

$$C:(x-1)^2+(y-5)^2=\frac{52}{4}$$

$$C:(x-1)^2+(y-5)^2=13$$

6) Να βρεπε την εξίσωση του κύκλου που έχει ακτίνα $\rho = 5$ και τεμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεια $A(1,0)$ και $B(7,0)$

Λύση Εστω C ο κύκλος του οποιου αναζητούμε την εξίσωση.
Επειδη, γνωριζουμε την ακτινα του κύκλου C για να προσδιορισουμε την εξισωση του αρκει να βρούμε το κέντρο του κύκλου C.
Το σημειο A ειναι σημειο τομης του κύκλου C και του άξονα $x'x$
Επομένως, το σημειο A είναι σημειο του κύκλου C
Ομοιως, το σημειο B ειναι σημειο του κύκλου C
Οποτε, το ευθ τμήμα (AB) ειναι χορδη του κύκλου C



Προσοχη!!! το ευθ τμημα (AB) δεν ειναι διαμετρος του κυκλου C διοτι $(AB) = 6 \neq 10 = 2 \cdot 5 = 2\rho$

Γνωριζουμε οτι η ακτινα ρ ειναι καθετη στη χορδη (AB) και διερχεται απο το μεσο του ευθ. τμηματος (AB)
Εστω $M(x_1, y_1)$ το μεσο του ευθ. τμηματος (AB)

Τοτε, $x_1 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$ Δηλαδη, $M(4,0)$

$y_1 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+0}{2} = \frac{0}{2} = 0$

Αν $K(x,y)$ το κέντρο του κύκλου C Τοτε, $(KM) \perp (AB)$ ①

Επειδη, $y_A = y_B = 0$ τοτε η ευθεια $AB // x'x$ ②

$$\left.\begin{array}{l}\text{Απο ①, ②} \Rightarrow (KM) \perp x'x \\ \text{ομως, } y'y \perp x'x\end{array}\right\} \Rightarrow (KM) // y'y \Rightarrow x = x_1 = 4 \text{ Δηλ. } K(4,y)$$

Θα προσδιορισουμε την τεταγμενη y του σημειου K

Αφου τα σημεια A και B ειναι σημεια του κύκλου C ισχυει $(KA) = \rho$ και $(KB) = \rho$
Απο υποθεση ειναι $\rho = 5$. Ετσι, $(KA) = 5$ ③ και $(KB) = 5$ ④

Γνωριζουμε οτι: $(KA) = \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-y)^2} = \sqrt{9 + y^2}$
Συνεπως, απο την σχεση ③ προκυπτει:

$$\sqrt{9+y^2} = 5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{9+y^2}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow 9 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$$

Ομοιως, επειδη $(KB) = \sqrt{9+y^2}$ απο την σχεση ④ παιρνουμε $\sqrt{9+y^2} = 5 \Rightarrow y = \pm 4$

Αρα, $K(4,-4)$ ή $K(4,4)$

Οποτε, $C_1: (x-4)^2 + (y+4)^2 = 5^2$ Δηλ. $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 25$

$C_2: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 5^2$ Δηλ. $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 25$

7) Να βρειτε την εξισωση του κυκλου που διερχεται απο τα σημεια $A(4,0)$ και $B(8,0)$ και εχει το κεντρο του στην ευθεια $y=x$

Λύση: Εστω C ο κυκλος του οποιου αναζητουμε την εξισωση

Για να προσδιορισουμε την εξισωση του κυκλου C πρεπει να βρουμε το κεντρο και την ακτινα του.

Εστω $K(x_1,y_1)$ το κεντρο και ρ η ακτινα του κυκλου C.

Απο την υποθεση το σημειο K ειναι πανω στην ευθεια $y=x$ οποτε οι συντεταγμενες του σημειου K επαληθευουν την εξισωση $y=x$ Δηλαδη ισχυει $y_1=x_1$ Αρα, οι συντεταγμενες του σημειου K ειναι (x_1,x_1)

Απλ. $K(x_1,x_1)$

Αφου τα σημεια $A(4,0)$ και $B(8,0)$ ειναι σημεια του κυκλου C τοτε ισχυει

$(KA)=(KB)$ ①

Ειναι: $(KA)=\sqrt{(x_A-x_K)^2+(y_A-y_K)^2}=\sqrt{(4-x_1)^2+(0-x_1)^2}=\sqrt{(4-x_1)^2+x_1^2}$

$(KB)=\sqrt{(x_B-x_K)^2+(y_B-y_K)^2}=\sqrt{(8-x_1)^2+(0-x_1)^2}=\sqrt{(8-x_1)^2+x_1^2}$

Ετσι, απο την σχεση ① προκυπτει: $\sqrt{(4-x_1)^2+x_1^2}=\sqrt{(8-x_1)^2+x_1^2}$

$$\left(\sqrt{(4-x_1)^2+x_1^2}\right)^2=\left(\sqrt{(8-x_1)^2+x_1^2}\right)^2$$

$$(4-x_1)^2+x_1^2=(8-x_1)^2+x_1^2$$

$$(4-x_1)^2=(8-x_1)^2$$

$$\sqrt{(4-x_1)^2}=\sqrt{(8-x_1)^2}$$

$$|4-x_1|=|8-x_1| \quad ②$$

Απο την ② επεται: $4-x_1=8-x_1 \Leftrightarrow 0x_1=4$ ΑΔΥΝΑΤΗ

ή $4-x_1=-(8-x_1) \Leftrightarrow 4-x_1=-8+x_1 \Leftrightarrow -2x_1=-12 \Leftrightarrow x_1=6$

Αρα, $K(6,6)$

Αφου το σημειο $A(4,0)$ ειναι σημειο του κυκλου C τοτε $\rho=(KA)=\sqrt{(4-x_1)^2+x_1^2}$

$=\sqrt{(4-6)^2+6^2}$

$=\sqrt{(-2)^2+6^2}$

$=\sqrt{4+36}$

$=\sqrt{40}$

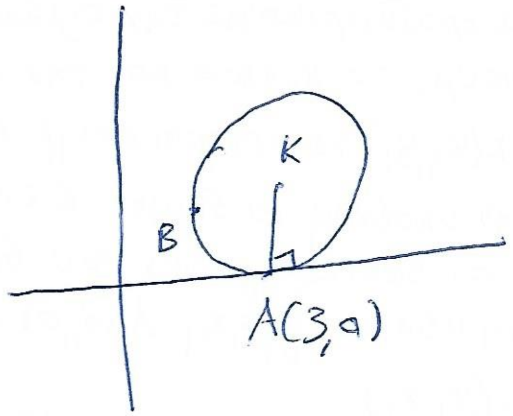
Αρα, $C: (x-6)^2+(y-6)^2=(\sqrt{40})^2$ Απλ. $C: (x-6)^2+(y-6)^2=40$

8) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $B(1,2)$

<u>Λύση</u>: Έστω C ο κύκλος του οποίου αναζητούμε την εξίσωση

Αν $K(x_1,y_1)$ το κέντρο του κύκλου C, τότε επειδή ο κύκλος C εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(3,0)$ ισχύει

$$\left.\begin{array}{l} KA \perp x'x \\ \text{Όμως, } y'y \perp x'x \end{array}\right\} \Rightarrow KA \parallel y'y$$



Αφού $KA \parallel y'y$ τότε $x_1 = x_A = 3$ Δηλ. $K(3,y)$

Επειδή τα σημεία A και B είναι σημεία του C (από υπόθεση) τότε ισχύει $(KA)=(KB)$ ①

Είναι: $(KA)=\sqrt{(x_A-x_K)^2+(y_A-y_K)^2}=\sqrt{(3-3)^2+(0-y_1)^2}=\sqrt{y_1^2}=|y_1|$

$(KB)=\sqrt{(x_B-x_K)^2+(y_B-y_K)^2}=\sqrt{(1-3)^2+(2-y_1)^2}=\sqrt{4+(2-y_1)^2}$

Έτσι, από την σχέση ① παίρνουμε $|y_1|=\sqrt{4+(2-y_1)^2}$

$$|y_1|^2=\left(\sqrt{4+(2-y_1)^2}\right)^2$$

$$y_1^2=4+(2-y_1)^2$$

$$y_1^2=4+4-4y_1+y_1^2$$

$$\boxed{y_1=2}$$

Δηλ. $K(3,2)$ και επειδή το σημείο B είναι σημείο του κύκλου ισχύει

$\rho=(KB)=\sqrt{4+(2-y_1)^2}=\sqrt{4+(2-2)^2}=\sqrt{4}=2$

Συνεπώς, $C:(x-3)^2+(y-2)^2=2^2$ Δηλ. $C:(x-3)^2+(y-2)^2=4$

9) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: 3x+4y=12$ στο σημείο $A(0,3)$

<u>Λύση</u>: Έστω C ο κύκλος του οποίου αναζητούμε την εξίσωση

Έστω $K(x_1,y_1)$ το κέντρο και ρ η ακτίνα του κύκλου C.

Η ευθεία ε έχει γενική εξίσωση $\varepsilon: 3x+4y-12=0$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(4,-3)$

Από υπόθεση ο κύκλος C εφάπτεται της ευθείας ε στο σημείο $A(0,3)$ οπότε $\overrightarrow{KA} \perp \varepsilon$ και επειδή $\varepsilon \parallel \vec{u}$ προκύπτει $\overrightarrow{KA} \perp \vec{u} \rightarrow \overrightarrow{KA}\cdot\vec{u}=0$ ①

Είναι: $\overrightarrow{KA}=(x_A-x_K, y_A-y_K)=(0-x_1, 3-y_1)=(-x_1, 3-y_1)$

$\overrightarrow{KA}\cdot\vec{u}=(-x_1,3-y_1)\cdot(4,-3)=-4x_1-3(3-y_1)$

Απο την σχεση ① αφοκοπτει: $-4x_1-3(3-y_1)=0$

$$-4x_1-9+3y_1=0$$

$$y_1=\frac{4x_1+9}{3}$$

$$y_1=\frac{4}{3}x_1+3 \quad ②$$

Δηλαδη $K(x_1, \frac{4}{3}x_1+3)$ και $\overrightarrow{KA}=(-x_1, 3-y_1)=(-x_1, 3-\frac{4}{3}x_1-3)=(-x_1, -\frac{4}{3}x_1)$

Ισχυει οτι:

$(KA)=|\overrightarrow{KA}|=\sqrt{(-x_1)^2+(-\frac{4}{3}x_1)^2}=\sqrt{x_1^2+\frac{16}{9}x_1^2}=\sqrt{\frac{9x_1^2+16x_1^2}{9}}=\sqrt{\frac{25x_1^2}{9}}=\frac{5}{3}|x_1|$

$(KO)=\sqrt{(x_O-x_K)^2+(y_O-y_K)^2}=\sqrt{(0-x_1)^2+(0-y_1)^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+(\frac{4}{3}x_1+3)^2}$

$=\sqrt{x_1^2+\frac{16}{9}x_1^2+8x_1+9}=\sqrt{\frac{25}{9}x_1^2+8x_1+9}$

Αφου τα σημεια $A(0,3)$ και $O(0,0)$ ειναι σημεια του κυκλου C τοτε ισχυει:

$(KA)=(KO)\Leftrightarrow \frac{5}{3}|x_1|=\sqrt{\frac{25}{9}x_1^2+8x_1+9}\Leftrightarrow \frac{25}{9}|x_1|^2=\left(\sqrt{\frac{25}{9}x_1^2+8x_1+9}\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{25}{9}x_1^2=\frac{25}{9}x_1^2+8x_1+9\Leftrightarrow 8x_1+9=0\Leftrightarrow x_1=-\frac{9}{8}$

οποτε, απο την σχεση ② παιρνουμε: $y_1=\frac{4}{3}(-\frac{9}{8})+3=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}$

Συνεπως, $K(-\frac{9}{8}, \frac{3}{2})$ το κεντρο του κυκλου C

Αφου $A(0,3)$ σημειο του κυκλου C τοτε $\rho=(KA)=\frac{5}{3}|x_1|=\frac{5}{3}|-\frac{9}{8}|=\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}=\frac{15}{8}$

Αρα, η εξισωση του κυκλου $C: (x-(-\frac{9}{8}))^2+(y-\frac{3}{2})^2=(\frac{15}{8})^2$

$$C: (x+\frac{9}{8})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{225}{64}$$

Θεώρημα: Κάθε κύκλος στο επίπεδο έχει εξίσωση της μορφής: $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ όπου $A^2+B^2-4\Gamma>0$

Απόδειξη: Έστω C ένας κύκλος του επιπέδου με κέντρο το σημείο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ. Τότε, η εξίσωση του κύκλου C είναι: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$

Η εξίσωση του κύκλου C γράφεται ισοδύναμα:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$$

$$x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2=\rho^2$$

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-\rho^2=0 \quad (1)$$

Θέτουμε $A=-2x_0$, $B=-2y_0$ και $\Gamma=x_0^2+y_0^2-\rho^2$

Έτσι, η (1) γράφεται: $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$

Ισχύει ότι: $A^2+B^2-4\Gamma=(-2x_0)^2+(-2y_0)^2-4(x_0^2+y_0^2-\rho^2)=4x_0^2+4y_0^2-4x_0^2-4y_0^2+4\rho^2$

$=4\rho^2$. Δηλαδή, $\left.\begin{matrix} A^2+B^2-4\Gamma=4\rho^2 \\ \text{Όμως } 4\rho^2>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A^2+B^2-4\Gamma>0$

Θεώρημα: Κάθε σχέση της μορφής: $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα

$\rho=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$

Απόδειξη: Η σχέση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ γράφεται ως εξής:

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$$

$$x^2+Ax+y^2+By=-\Gamma$$

$$x^2+2\frac{A}{2}x+y^2+2\frac{B}{2}y=-\Gamma$$

$$x^2+2\cdot\frac{A}{2}x+\left(\frac{A}{2}\right)^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2+y^2+2\cdot\frac{B}{2}y+\left(\frac{B}{2}\right)^2-\left(\frac{B}{2}\right)^2=-\Gamma$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2-\left(\frac{B}{2}\right)^2=-\Gamma$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-\Gamma$$

$$\left(x-\left(-\frac{A}{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(-\frac{B}{2}\right)\right)^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-\Gamma$$

$$\left(x-\left(-\frac{A}{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(-\frac{B}{2}\right)\right)^2=\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}$$

$$\left(x-\left(-\frac{A}{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(-\frac{B}{2}\right)\right)^2=\frac{\left(\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}\right)^2}{2^2} \quad \text{διότι } A^2+B^2-4\Gamma>0$$

$$\left(x-\left(-\frac{A}{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(-\frac{B}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}\right)^2 \quad (1)$$

Η σχέση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$$

<u>Παραδείγματα:</u> 1) Να εξετάσετε αν η εξίσωση

$$x^2+y^2+4x-4y-1=0$$

παριστάνει κύκλο. Στην περίπτωση που η εξίσωση παριστάνει κύκλο προσδιορίστε το κέντρο και την ακτίνα του

<u>Λύση</u>: Είναι $A=4$, $B=-4$ και $\Gamma=-1$

Για το αν η εξίσωση $x^2+y^2+4x-4y-1=0$ παριστάνει κύκλο πρέπει να εξετάσουμε το πρόσημο της παράστασης $A^2+B^2-4\Gamma$

Είναι: $A^2+B^2-4\Gamma=4^2+(-4)^2-4(-1)=16+16+4=36>0$

Αφού $A^2+B^2-4\Gamma>0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα η εξίσωση

$$x^2+y^2+4x-4y-1=0$$

παριστάνει κύκλο, τον οποίο ας πούμε C

Τώρα, για να βρούμε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C που παριστάνει η εξίσωση $x^2+y^2+4x-4y-1=0$ χρησιμοποιούμε την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή η εξίσωση $x^2+y^2+4x-4y-1=0$ γράφεται ως εξής:

$$x^2+y^2+4x-4y-1=0$$
$$x^2+4x+y^2-4y=1$$
$$x^2+2\cdot 2x+y^2-2\cdot 2y=1$$
$$x^2+2\cdot x\cdot 2+y^2-2y\cdot 2=1$$
$$x^2+2x\cdot 2+2^2-2^2+y^2-2y\cdot 2+2^2-2^2=1$$
$$(x+2)^2-2^2+(y-2)^2-2^2=1$$
$$(x+2)^2+(y-2)^2=1+2^2+2^2$$
$$(x+2)^2+(y-2)^2=9$$
$$(x-(-2))^2+(y-2)^2=3^2$$

Με τη βοήθεια της μεθόδου της συμπλήρωσης τετραγώνου φέραμε την εξίσωση $x^2+y^2+4x-4y-1=0$ στη μορφή $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$

Ετσι, ο κυκλος C εχει κεντρο $K(-2,2)$ και ακτινα $\rho=3$

2) Να εξετασετε αν η εξισωση $x^2+y^2+4x-4y+9=0$ παριστανει κυκλο. Στην περιπτωση που η εξισωση αυτη παριστανει κυκλο να προσδιοριστει το κεντρο και η ακτινα του.

Λυση: Ειναι $A=4$, $B=-4$ και $\Gamma=9$

Για να αποφανθουμε αν η εξισωση $x^2+y^2+4x-4y+9=0$ παριστανει κυκλο αρκει να βρουμε το προσημο της παραστασης $A^2+B^2-4\Gamma$.

Ειναι: $A^2+B^2-4\Gamma=4^2+(-4)^2-4 9=16+16-36=32-36=-4<0$

Αφου $A^2+B^2-4\Gamma<0$ συμφωνα με το Θεωρημα η εξισωση $x^2+y^2+4x-4y+9=0$ δεν παριστανει κυκλο

3) Να εξετασετε αν η εξισωση $x^2+y^2-10x+12y-20=0$ παριστανει κυκλο. Στην περιπτωση που η εξισωση $x^2+y^2-10x+12y-20=0$ παριστανει κυκλο να βρεθει το κεντρο και η ακτινα του κυκλου αυτου.

Λυση: Ειναι $A=-10$, $B=12$ και $\Gamma=-20$

Εξεταζουμε το προσημο της παραστασης $A^2+B^2-4\Gamma$

Ειναι: $A^2+B^2-4\Gamma=(-10)^2+12^2-4(-20)=100+144+80=324>0$

Αφου $A^2+B^2-4\Gamma>0$ συμφωνα με το Θεωρημα η εξισωση $x^2+y^2-10x+12y-20=0$ παριστανει κυκλο, τον οποιο ας πουμε C

Χρησιμοποιουμε τη μεθοδο συμπληρωσης τετραγωνου ωστε να φερουμε την εξισωση $x^2+y^2-10x+12y-20=0$ στη μορφη $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ για να προσδιορισουμε το κεντρο και την ακτινα του κυκλου C που παριστανει η εξισωση $x^2+y^2-10x+12y-20=0$

Ειναι: $x^2+y^2-10x+12y-20=0$

$$x^2-10x+y^2+12y=20$$
$$x^2-2\cdot5\cdot x+y^2+2\cdot6\cdot y=20$$
$$x^2-2\cdot x\cdot5+y^2+2y\cdot6=20$$
$$x^2-2x\cdot5+5^2-5^2+y^2+2y\cdot6+6^2-6^2=20$$
$$(x-5)^2-5^2+(y+6)^2-6^2=20$$
$$(x-5)^2+(y+6)^2=20+5^2+6^2$$
$$(x-5)^2+(y+6)^2=81$$
$$(x-5)^2+(y-(-6))^2=9^2$$

Αρα, ο κυκλος C που παριστανει η εξισωση $x^2+y^2-10x+12y-20=0$ εχει κεντρο το σημειο $K(5,-6)$ και ακτινα $\rho=9$

4) Να εξετασετε αν η εξισωση: $3x^2+3y^2+6x-9y+1=0$ παριστανει κυκλο. Στην περιπτωση που η εξισωση αυτη παριστανει κυκλο να βρειτε το κεντρο και την ακτινα του κυκλου αυτου.

Λυση: Στο παραδειγμα αυτο η εξισωση που μας ρωτουν αν παριστανει κυκλο ή οχι στο x^2 και y^2 εχει συντελεστες διαφορετικους απο το 1. Πριν ξεκινησουμε την διαδικασια της διερευνησης πρεπει να κανουμε τους συντελεστες του x^2 και του y^2 να ειναι 1. Αυτο γινεται εδω διαιρωντας και τα δυο μελη της εξισωσης με 3. Οποτε:

$$\frac{3x^2+3y^2+6x-9y+1}{3}=\frac{0}{3}$$

$$\frac{3x^2}{3}+\frac{3y^2}{3}+\frac{6x}{3}-\frac{9y}{3}+\frac{1}{3}=0$$

$$x^2+y^2+2x-3y+\frac{1}{3}=0$$

$$x^2+y^2+2x-3y+\frac{1}{3}=0 \quad (1)$$

Η αρχικη εξισωση ειναι ισοδυναμη με την $x^2+y^2+2x-3y+\frac{1}{3}=0$
Ετσι, αν η εξισωση (1) παριστανει κυκλο τοτε και η αρχικη εξισωση παριστανει κυκλο. Εξεταζουμε λοιπον αν η εξισωση (1) παριστανει κυκλο.
Στην εξισωση (1) ειναι: $A=2$, $B=-3$ και $\Gamma=\frac{1}{3}$

Εχουμε $A^2+B^2-4\Gamma=2^2+(-3)^2-4\cdot\frac{1}{3}=4+9-\frac{4}{3}=\frac{12+27-1}{3}=\frac{38}{3}>0$

Αφου $A^2+B^2-4\Gamma>0$ τοτε η εξισωση (1) παριστανει κυκλο, τον οποιο ας πουμε C
Με τη μεθοδο συμπληρωσης τετραγωνου η εξισωση (1) γραφεται ως εξης:

$$x^2+2x\cdot1+1^2-1^2+y^2-2\cdot\frac{3}{2}y+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{3}=0$$

$$(x+1)^2-1^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1+\frac{9}{4}-\frac{1}{3}$$

$$(x-(-1))^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

Αρα, το κεντρο του κυκλου C ειναι $K\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ και η ακτινα $\rho=\sqrt{\frac{35}{12}}$

4) Να εξετασετε αν η εξισωση $x^2+y^2-4ax+10\beta y+4a^2+16\beta^2=0$ παριστανει κυκλο. Στην περιπτωση που η εξισωση αυτη παριστανει κυκλο να βρεθει το κεντρο και η ακτινα του.

Λυση: Ειναι $A=-4a$, $B=10\beta$ και $\Gamma=4a^2+16\beta^2$
Οποτε, $A^2+B^2-4\Gamma=(-4a)^2+(10\beta)^2-4(4a^2+16\beta^2)=16a^2+100\beta^2-16a^2-64\beta^2=36\beta^2>0$
Αφου $A^2+B^2-4\Gamma>0$ τοτε η εξισωση $x^2+y^2-4ax+10\beta y+4a^2+16\beta^2=0$ παριστανει κυκλο, ας τον πουμε C

Εχουμε οτι: $x^2+y^2-4\alpha x+10\beta y+4\alpha^2+16\beta^2=0$

$$x^2-4\alpha x+4\alpha^2+y^2+10\beta y+16\beta^2=0$$

$$x^2-2\cdot 2\alpha\cdot x+(2\alpha)^2+y^2+2\cdot 5\beta\cdot y+16\beta^2=0$$

$$(x-2\alpha)^2+y^2+2\cdot 5\beta y+25\beta^2-9\beta^2=0$$

$$(x-2\alpha)^2+y^2+2\cdot 5\beta\cdot y+(5\beta)^2-9\beta^2=0$$

$$(x-2\alpha)^2+(y+5\beta)^2-9\beta^2=0$$

$$(x-2\alpha)^2+(y+5\beta)^2=9\beta^2$$

$$(x-2\alpha)^2+(y+5\beta)^2=(3|\beta|)^2$$

$$(x-2\alpha)^2+(y-(-5\beta))^2=(3|\beta|)^2$$

Αρα, ο κυκλος C εχει κεντρο $K(2\alpha,-5\beta)$ και ακτινα $\rho=3|\beta|$

Παρατηρησετε οτι στο παραδειγμα αυτο δε χρησιμοποιησαμε τη μεθοδο συμπληρωσης τετραγωνου για τον προσδιορισμο του κεντρου Κ και της ακτινας ρ. απλως «σπασαμε» το $16\beta^2$ ως $16\beta^2=25\beta^2-9\beta^2$ για να φτιαξουμε την ταυτοτητα στο y. Σαν ασκηση δοκιμαστε να βρειτε το κεντρο και την ακτινα με τη μεθοδο συμπληρωσης τετραγωνου.